मॉड्यूल 1

बीजगणित

सभ्यता के उदय के साथ ही, मानव ने अपनी संपत्ति–सामान (माल), पत्थर, पशुओं, पेड़ों, इत्यादि का ब्यौरा रखने का प्रयास किया। जब भी पशुओं को चरने के लिए बाड़े से बाहर ले जाया जाता था, तब प्रत्येक बाहर ले जाये गए पशु के लिए, भूमि/पत्थर पर एक खरोंच का चिन्ह अंकित कर दिया जाता था। इस प्रकार, बाहर ले जाए गए पशुओं की संख्या लगाए गए खरोंच के चिह्नों की संख्या के बराबर होती थी (यह आजकल के मिलान चिह्नों के समान ही थे)। पशुओं के लौटने पर, प्रत्येक पशु के संगत एक खरोंच के चिह्न को मिटा दिया जाता था। इस विधि द्वारा, वे बिना गिनती के ज्ञान के अपनी संपत्ति का ब्यौरा (बिना किसी हानि के) रखते थे। धीरे धीरे सभ्यता उन्नत होती गई तथा सर्वप्रथम गणन संख्याएँ (प्राकृत संख्याएँ) प्रकट हुईं। आपको यह जानकर प्रसन्नता और अभिमान होगा कि संख्याओं 0, 1, 2, ...9 और स्थानीय मान पद्धति को सम्मिलित करते हुए, संख्यांकन की वर्तमान पद्धति विश्व के लिए हमारे प्राचीन भारतीयों की खोज है। भारत से ये संख्याएँ एक अरबी राजा अल मंसूर के राज्य में पहुँची, जिसके एक विद्वान अल–ख्वोरिजमी ने भारतीय विद्वानों और गणितज्ञों के कार्यों का अनुवाद किया। अरब देशों से यह संत्यांक (संख्याएँ) पश्चिमी देशों तक पहुँची। इसीलिए इन्हें ***हिन्दु–अरेबिक संख्यांक*** *कहा जाता है।*

आप जानते हैं कि बीजगणित अंकगणित का एक व्यापीकृत रूप है, जिसमें संख्याओं के लिए चरों का प्रयोग किया जाता है। आर्यभट्ट (476 AD) और ब्रह्मगुप्त (578 AD) ऐसे प्रथम भारतीय गणितज्ञ थे जिन्होंने संख्याओं के लिए चरों का प्रयोग किया तथा उन्हें ***यावत–तावत*** *कहा। उन्होंने चरों का प्रयोग करके व्यंजकों के योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन को स्पष्ट किया तथा यहाँ तक कि उनके वर्गों, घनों, वर्गमूलों और घनमूलों को भी ज्ञात किया। आर्यभट्ट और ब्रह्मगुप्त ने रैखिक, द्विघात और अनिर्घाय समीकरणों के हल करने पर भी कार्य किया। उन्होंने अनिर्धाय समीकरणों के हल करने की विधि को 'चक्रावल' कहा तथा बीजगणित को अव्याकत गणित दिया। भास्कराचार्य और महावीराचार्य ने भी इस क्षेत्र में अपना योगदान दिया, विशेषकर अनुपात ओर समानुपात में, तथा पिछले गणितज्ञों के समीकरणों, सूचकांकों (घातांकों) और करणियों पर किए गए कार्यों का विस्तार किया। 'एलजबरा' को 'बीजगणित' नाम देने का श्रेय अल–मंसूर के विद्वान अल–ख्वोरिजमी को जाता है।*

इस माड़्यूल में, हम संख्या पद्धतियों, बहुपदों, बीजीय व्यंजकों के गुणनखंडन, परिमेय व्यंजकों के सरलीकरण, रैखिक और द्विघात समीकरणों को हल करने, घातांकों और करणियों, समांतर और गुणोत्तर श्रेढ़ियों का अध्ययन करेंगे।

1

संख्या निकाय

सभ्यता के आरंभ से मानव अपनी सम्पत्ति–वस्तओं, गहनों, रत्नों, पशुधनों, पेड़ों, भेड़ों/बकरियों की गिनती के प्रयास विभिन्न तरीके अपनाकर करता रहा है।

– भूमि/पत्थरों पर निशान लगाकर

– पत्थरों के समूह से – प्रत्येक वस्तु जो रखी गई/ले जाई गई है के लिए एक रखकर

गिनती का ज्ञान न होने पर भी वह यह तरीका अपनी सम्पत्ति की गिनती करने के लिए करता था।

मानव सभ्यता के इतिहास में संख्या की खोज सबसे महत्वपूर्ण उपलब्धियों में से एक है। अनुमान कीजिए कि यदि आपको संख्या की जानकारी न हो तो प्रश्नों ''कितने हैं'', ''कितना अधिक'' के उत्तर देने में कितनी दुविधा होगी। संख्या निकाय तथा शून्य की खोज ने तथा उनके संयोजन की प्रक्रिया के नियमों ने हमें निम्न प्रकार के प्रश्नों के उत्तर देने में सक्षम किया है:

(i) टोकरी में कितने सेब हैं?

(ii) गोष्ठी को सम्बोधन करने के लिए कितने वक्ता बुलाये गए हैं?

(iii) मेज़ पर रखे गये खिलौनों की संख्या क्या है?

(iv) इस खेत से कितने बोरे गेहूँ की उपज हुई है?

उपरोक्त प्रकार के प्रश्नों तथा अन्य इसी प्रकार के कई अन्य प्रश्नों का उत्तर संख्याओं तथा उन पर संक्रियाओं के ज्ञान पर निर्भर करता है। यह इस ओर इंगित करता है कि पाठ्यक्रम में संख्याओं के निकाय तथा उनके प्रकार के ज्ञान की कितनी आवश्यकता है। इस पाठ में हम प्राकृत संख्याओं, पूर्णांकों तथा पूर्ण संख्याओं का संक्षिप्त पुनरावलोकन करेंगे। इसके पश्चात हम आपको परिमेय तथा अपरिमेय संख्याओं का विस्तार से परिचय कराऐंगे। हम पाठ का अन्त वास्तविक संख्याओं की परिचर्चा के बाद करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप समर्थ हो जाएंगे किः

- संख्या निकाय का विस्तार प्राकृत संख्याओं से वास्तविक (परिमेय तथा अपरिमेय) संख्याओं तक कर सकेंगे;
- विभिन्न प्रकार की संख्याओं की पहचान कर सकेंगे;
- एक पूर्णांक को एक परिमेय संख्या के रूप में लिख सकेंगे;
- एक परिमेय संख्या को एक सांत दशमलव अथवा असांत आवृति दशमलव के रूप में और विलोमतः लिख सकेंगे;
- दो परिमेय संख्याओं के बीच परिमेय संख्याएं लिख सकेंगे;
- एक परिमेय संख्या को संख्या रेखा पर निरूपित कर सकेंगे;
- अपरिमेय संख्याओं के उदाहरण दे सकेंगे;
- $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ को संख्या रेखा पर निरूपित कर सकेंगे;
- किन्हीं दो दी गई संख्याओं के बीच अपरिमेय संख्याएं ज्ञात कर सकेंगे;
- परिमेय तथा अपरिमेय संख्याओं का वांछित दशमलव के स्थानों तक लगभग मान ज्ञात कर सकेंगे;
- वास्तविक संख्याओं पर योग, घटा, गुणा तथा भाग की चारों मूलभूत संक्रियाएँ कर सकेंगे।

1.1 अपेक्षित पूर्वज्ञान

गिनती की संख्याओं के विषय में मूलभूत ज्ञान तथा उनका दिन प्रतिदिन के कार्यों में प्रयोग करना।

1.2 प्राकृत संख्याओं, पूर्णांकों तथा पूर्ण संख्याओं का पुर्नरावलोकन

1.2.1 प्राकृत संख्याएं

स्मरण कीजिए कि गिनती की संख्याओं से प्राकृत संख्याएं प्राप्त होती हैं। ये वे संख्याएं हैं जो हम दैनिक जीवन में प्रयोग में लाते हें।

स्मरण कीजिए कोई प्राकृत संख्या सबसे बड़ी नहीं होती क्योंकि किसी भी प्राकृत संख्या में 1 जोड़ने पर हम उससे बड़ी अगली संख्या प्राप्त कर सकते हैं जिसे हम उसका परवर्ती कहते हैं।

हमने प्राकृत संख्याओं पर चारों मूल–भूत संक्रियाओं के विषय में भी पढ़ा है उदाहरण के लिए:

$4 + 2 = 6$, जो फिर एक प्राकृत संख्या है;

$6 + 21 = 27$, जो फिर एक प्राकृत संख्या है;

$22 - 6 = 16$, जो फिर एक प्राकृत संख्या है, लेकिन

$2 - 6$ एक प्राकृत संख्या परिभाषित नहीं है।

इसी प्रकार, $4 \times 3 = 12$, जो फिर एक प्राकृत संख्या है

$12 \times 3 = 36$, जो फिर एक प्राकृत संख्या है।

$\frac{12}{2} = 6$ एक प्राकृत संख्या है लेकिन $\frac{6}{4}$ प्राकृत संख्याओं में परिभाषित नहीं है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि

i) a) दो प्राकृत संख्याओं का योग तथा गुणा एक प्राकृत संख्या होती है।

   b) दो प्राकृत संख्याओं में घटा तथा भाग सदा प्राकृत संख्या नहीं होती।

ii) प्राकृत संख्याएं संख्या रेखा पर निरूपित की जा सकती हैं जैसा नीचे दिया गया है

iii) दो प्राकृत संख्याओं का योग तथा गुणा किसी भी क्रम में करने पर परिणाम वही आता है। यह नियम, प्राकृत संख्याओं में घटा तथा भाग के लिए लागू नहीं होता।

1.2.2 पूर्ण संख्याएं

(i) जब एक प्राकृत संख्या को उसी में से घटाया जाता है तो हम नहीं कह सकते कि बची हुई संख्या क्या है। इस कठिनाई को हटाने के लिए प्राकृत संख्याओं में 0 को सम्मिलित करके उनका विस्तार किया जाता है, जिससे पूर्ण संख्याओं का निकाय मिलता है।

अतः पूर्ण संख्याएं हैं $0, 1, 2, 3,$ ....

जैसा पहले बताया गया है सबसे बड़ी कोई पूर्ण संख्या नहीं है।

(ii) संख्या 0 के निम्न गुणधर्म (गुण) हैं:

$$a + 0 = a = 0 + a$$

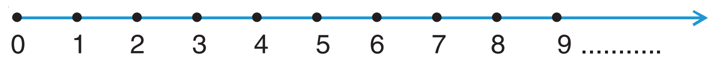
$a - 0 = a$ लेकिन $(0 - a \neq a)$

$a \times 0 = 0 = 0 \times a$

शून्य (0) द्वारा भाग परिभाषित नहीं है।

(iii) जिस प्रकार प्राकृत संख्याओं पर मूल–भूत संक्रियाएं की जाती हैं उसी प्रकार पूर्ण संख्याओं पर भी की जाती हैं। (घटा तथा भाग के प्रतिबंध के साथ)

(iv) पूर्ण संख्याओं को भी संख्या रेखा पर निम्न प्रकार से निरूपित किया जाता है:



1.2.3 पूर्णांक

प्राकृत संख्याओं तथा पूर्ण संख्याओं में कार्य करते समय हमने पाया कि एक संख्या को दूसरी से सदा घटाया नहीं जा सकता।

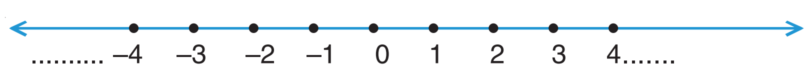
उदाहरणतया, (2 – 3), (3 – 7), (9 – 20), इत्यादि प्राकृत संख्याओं तथा पूर्ण संख्याओं के तंत्र में संभव नहीं है। इनके उत्तर प्राप्त करने के लिए हमें संख्या निकाय को एक बार और बढ़ाना पड़ेगा।

अतः, हम पूर्ण संख्याओं में ऐसी संख्याओं –1 (घटा एक) कहते हैं, –2 (घटा दो) कहते हैं तथा इसी प्रकार ऐसी अन्य संख्याओं को सम्मिलित करके पूर्णांक बनाते हैं। अतः पूर्णांक हैं:

$$\ldots, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

1.2.4 पूर्णांकों का संख्या रेखा पर निरूपण

पूर्ण संख्याओं के निरूपण में प्रयुक्त संख्या–रेखा को शून्य के बायीं ओर बढ़ाकर बिन्दु – 1, – 2, – 3, – 4, ... इस प्रकार अंकित कीजिए कि –1 तथा 1, –2 तथा 2, 3 तथा –3 शून्य से समदूरस्थ हों तथा विपरीत दिशाओं में हों। इस प्रकार प्राप्त होने वाली पूर्णांकों की संख्या–रेखा निम्न है:



अब हम पूर्णांकों को संख्या–रेखा पर निरूपित कर सकते हैं उदाहरण के लिए, आइए, हम – 5, 7, – 2, – 3, 4 को संख्या–रेखा पर निरूपित करें। नीचे दी गयी आकृति में बिन्दु A, B, C, D तथा E क्रमशः – 5, 7, – 2, – 3 तथा 4 निरूपित करते हैं।

हम नोट करते हैं कि यदि $a > b$ है, तो 'a' सदा 'b' के दायीं ओर होगा अन्यथा इसका उल्टा होगा।

उदाहरणतया, आकृति में $7 > 4$, अतः B, E के दायीं ओर स्थित है। इसी प्रकार $-2 > -5$, है अतः C (-2), A (-5) के दायीं ओर है।

विलोमतः, क्योंकि $4 < 7$, है, इसलिए 4, 7 के बायीं ओर है जैसा आकृति में है कि E, B के बायीं ओर है।

अतः दो पूर्णांकों a तथा b में से बड़ा (या छोटा) जानने के लिए हम निम्न नियम प्रयोग में लाते हैं:

i) $a > b$, यदि a, b के दायीं ओर है।

ii) $a < b$, यदि a, b के बायीं ओर है।

उदाहरण 1.1: निम्न में से प्राकृत संख्याएं, पूर्णांक तथा पूर्ण संख्याएं पहचानिए:

$15, 22, -6, 7, -13, 0, 12, -12, 13, -31$

हल: प्राकृत संख्याएं हैं: 7, 12, 13, 15 तथा 22

पूर्ण संख्याएं हैं: 0, 7, 12, 13, 15 तथा 22

पूर्णांक हैं: $-31, -13, -12, -6, 0, 7, 12, 13, 15$ तथा 22

उदाहरण 1.2: निम्न में से वे संख्याएँ पहचानिए जो (i) प्राकृत संख्याएं नहीं हैं (ii) पूर्ण संख्याएं नहीं हैं।

$-17, 15, 23, -6, -4, 0, 16, 18, 22, 31$

हल: i) $-17, -6, -4$ तथा 0 प्राकृत संख्याएं नहीं हैं।

ii) $-17, -6, -4$ पूर्ण संख्याएं नहीं हैं।

नोट: उपरोक्त उदाहरणों से हम कह सकते हैं कि

i) सभी प्राकृत संख्याएं पूर्णांक तथा पूर्ण संख्याएँ भी हैं परन्तु इसका विलोम सत्य नहीं है।

ii) सभी पूर्ण संख्याएं पूर्णांक भी हैं।

आपने पिछली कक्षाओं में पूर्ण संख्याओं पर चारों मूल–भूत संक्रियाओं के विषय में पढ़ा है। उन्हें दोहराए बिना, हम कुछ उदाहरण लेकर उन्हें स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 1.3: निम्न को सरल कीजिए तथा बताइए कि परिणाम एक पूर्णांक है या नहीं:

$12 \times 4, 7 \div 3, 18 \div 3, 36 \div 7, 14 \times 2, 18 \div 36, 13 \times (-3)$

हल: $12 \times 4 = 48$; यह एक पूर्णांक है।

$7 \div 3 = \frac{7}{3}$; यह पूर्णांक नहीं है।

$18 \div 3 = 6$; यह एक पूर्णांक है।

$36 \div 7 = \frac{36}{7}$; यह एक पूर्णांक नहीं है।

$14 \times 2 = 28$, यह एक पूर्णांक है।

$18 \div 36 = \frac{18}{36}$; यह एक पूर्णांक नहीं है।

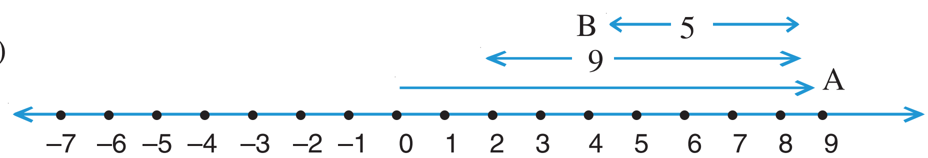
$13 \times (-3) = -39$; यह एक पूर्णांक है।

उदाहरण 1.4: संख्या रेखा का प्रयोग कर, निम्न पूर्णांकों का योग कीजिए:

(i) $9 + (-5)$ (ii) $(-3) + (-7)$

हल:

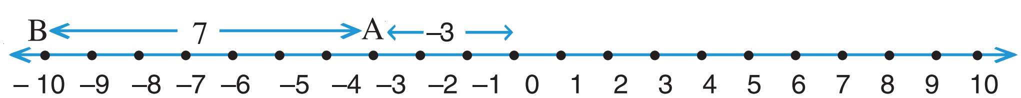
(i)



A संख्या रेखा पर 9 दर्शाता है। A से 5 इकाई बायीं ओर जाने पर हम बिन्दु B पर पहुँचते हैं, जो 4 दर्शाता है।

$\therefore 9 + (-5) = 4$

(ii)



0 से आरंभ करके 3 इकाई बायीं ओर जाकर हम बिन्दु A पर पहुंचते हैं जो –3 दर्शाता है। A से 7 इकाई बायीं ओर जाने पर हम बिन्दु B पर पहुँचते हैं जो –10 दर्शाता है।

$\therefore (-3) + (-7) = -10$

1.3 परिमेय संख्याएँ

आप उस स्थिति पर विचार कीजिए जब आप पूर्णांक a को एक शून्येतर पूर्णांक b से भाग देते हैं। निम्न दो स्थितियां बनती हैं:

(i) जब 'a' 'b' का गुणज है

माना $a = mb$, जहाँ m एक प्राकृत संख्या है अथवा पूर्ण संख्या है तो $\frac{a}{b} = m$

(ii) जब 'a', 'b' का गुणज नहीं है

इस दशा में $\frac{a}{b}$ एक पूर्णांक नहीं है। अतः यह एक नई प्रकार की संख्या है। ऐसी संख्या को हम परिमेय संख्या कहते हैं।

अतः, एक संख्या, जिसको $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है जहाँ p तथा q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$, है एक परिमेय संख्या कहलाती है।

अतः, $-\frac{2}{3}, \frac{5}{-8}, \frac{6}{2}, \frac{11}{7}$ सभी परिमेय संख्याएं हैं।

1.3.1 धन तथा ऋण परिमेय संख्याएँ

(i) एक परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ को धन परिमेय संख्या कहते हैं यदि p तथा q दोनों धन अथवा दोनों ऋण हों।

अतः $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{-3}{-2}, \frac{-8}{-6}, \frac{-12}{-57}$ सभी धन परिमेय संख्याएं हैं।

(ii) यदि p तथा q भिन्न चिन्हों के हों, तो $\frac{p}{q}$ को एक ऋण परिमेय संख्या कहते हैं।

इस प्रकार, $\frac{-7}{2}, \frac{6}{-5}, \frac{-12}{4}, \frac{16}{-3}$ सभी ऋण परिमेय संख्याएं हैं।

1.3.2 एक परिमेय संख्या का मानक रूप

हम जानते हैं कि

$$\frac{-p}{q}, \frac{p}{-q}, \frac{-p}{-q} \text{ and } \frac{p}{q}$$

रूप की संख्याएं परिमेय संख्याएं हैं जहाँ p तथा q धन पूर्णांक हैं।

हम देख सकते हैं कि

$$\frac{-p}{q} = -\left(\frac{p}{q}\right), \frac{-p}{-q} = \frac{-(-p)}{-(-q)} = \frac{p}{q}, \frac{p}{-q} = \frac{(-p)}{-(-q)} = \frac{-p}{q},$$

ऊपर की सभी दशाओं में हमने हर q को धन बनाया है।

एक परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$, जहाँ p तथा q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है, जहाँ q एक धन संख्या है (या इसे धन बनाया गया है) तथा p तथा q सह–अभाज्य हैं (अथवा जब उनका उभयनिष्ठ गुणनखंड 1 अथवा –1 से अन्य कोई नहीं है) को मानक रूप में कहा जाता है।

अतः परिमेय संख्या $\frac{2}{-3}$ का मानक रूप $\frac{-2}{3}$ है। इसी प्रकार $\frac{-5}{6}$ तथा $\frac{-3}{5}$ मानक रूप की परिमेय संख्याएं हैं।

नोट: "मानक रूप की एक परिमेय संख्या को न्यूनतम रूप में लिखी परिमेय संख्या भी कहते हैं। इस पाठ में हम इनको अन्तर्बदल रूप में प्रयोग करेंगे।

उदाहरण के लिए, परिमेय संख्या $\frac{18}{27}$ को मानक रूप में (या निम्नतम अथवा न्यूनतम रूप में) $\frac{2}{3}$ लिखा जाता है।

इसी प्रकार, $\frac{25}{-35}$, को मानक रूप (निम्नतम रूप में) $\frac{-5}{7}$ लिखा जाता है (अंश तथा हर दोनों में 5 से भाग देने पर)

कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

(i) प्रत्येक प्राकृत संख्या एक परिमेय संख्या भी है परन्तु इसका विलोम सत्य नहीं है।

(ii) प्रत्येक पूर्ण संख्या तथा पूर्णांक भी परिमेय संख्याएं है परन्तु इसका विलोम सत्य नहीं है।

उदाहरण 1.5: निम्न में से कौन सी परिमेय संख्याएं हैं तथा कौन सी परिमेय संख्या नहीं हैं?

$$-2, \frac{5}{3}, -17, \frac{15}{7}, \frac{18}{5}, -\frac{7}{6}$$

हल:

(i) –2 को $\frac{-2}{1}$, के रूप में लिख सकते हैं जो $\frac{p}{q}$ के रूप का है जहाँ $q \neq 0$

अतः –2 एक परिमेय संख्या है।

(ii) $\frac{5}{3}$, $\frac{p}{q}$ के रूप का है इसलिए एक परिमेय संख्या है।

(iii) –17 भी एक परिमेय संख्या है क्योंकि इसे $\frac{-17}{1}$ लिख सकते हैं।

(iv) इसी प्रकार $\frac{15}{7}, \frac{18}{5}$ तथा $\frac{-7}{6}$ उपरोक्त तर्क के अनुसार सभी परिमेय संख्याएं हैं।

उदाहरण 1.6: निम्न परिमेय संख्याओं को उनके न्यूनतम (निम्नतम) रूप में लिखिए:

(i) $\frac{-24}{192}$ (ii) $\frac{12}{168}$ (iii) $\frac{-21}{49}$

हल:

(i) $\frac{-24}{192} = \frac{-3\times 8}{3\times 8\times 8} = \frac{-1}{8}$

$-\frac{1}{8}$ परिमेय संख्या $\frac{-24}{192}$ का न्यूनतम रूप है।

(ii) $\frac{12}{168} = \frac{12}{12\times 14} = \frac{1}{14}$

$\therefore \frac{1}{14}$ परिमेय संख्या $\frac{12}{168}$ का न्यूनतम रूप है।

(iii) $\frac{-21}{49} = \frac{-3\times 7}{7\times 7} = \frac{-3}{7}$

$\therefore \frac{-3}{7}$ परिमेय संख्या $\frac{-21}{49}$ का न्यूनतम रूप है।

1.4 एक परिमेय संख्या के समतुल्य रूप

एक परिमेय संख्या को, उसके अंश तथा हर को एक ही संख्या से गुणा/भाग देने पर उसके समतुल्य रूप में लिखा जा सकता है।

उदाहरणतया

$$\frac{2}{3} = \frac{2\times 2}{3\times 2} = \frac{4}{6}, \quad \frac{2}{3} = \frac{2\times 4}{3\times 4} = \frac{8}{12}, \quad \frac{2\times 8}{3\times 8} = \frac{16}{24}$$

$\therefore \frac{4}{6}, \frac{8}{12}, \frac{16}{24}$, इत्यादि परिमेय संख्या $\frac{2}{3}$ के समतुल्य हैं।

इसी प्रकार

$$\frac{3}{8} = \frac{6}{16} = \frac{21}{56} = \frac{27}{72} = \ldots$$

तथा $\frac{4}{7}=\frac{8}{14}=\frac{12}{21}=\frac{28}{49}=\ldots$

उपरोक्त क्रमशः $\frac{3}{8}$ तथा $\frac{4}{7}$ के समतुल्य रूप हैं।

उदाहरण 1.7: निम्न परिमेय संख्याओं के पांच समतुल्य रूप लिखिए:

(i) $\frac{3}{17}$ (ii) $\frac{-5}{9}$

हल:

(i) $$\frac{3}{17}=\frac{3\times2}{17\times2}=\frac{6}{34},\ \frac{3}{17}=\frac{3\times4}{17\times4}=\frac{12}{68},\ \frac{3\times(-3)}{17\times(-3)}=\frac{-9}{-51}$$

$$\frac{3\times8}{17\times8}=\frac{24}{136},\ \frac{3}{17}\times\frac{7}{7}=\frac{21}{119}$$

$\therefore$ $\frac{3}{17}$ के पांच समतुल्य रूप हैं:

$$\frac{6}{34},\frac{12}{68},\frac{-9}{-51},\frac{24}{136},\frac{21}{119}$$

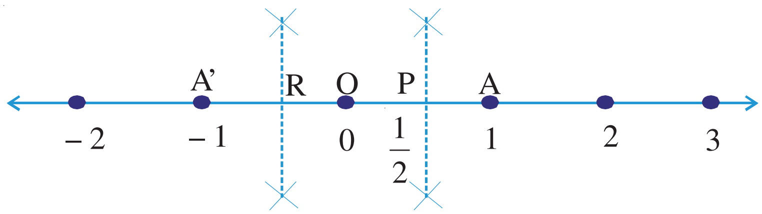
(ii) (i) की तरह $\frac{-5}{9}$ के पांच समतुल्य रूप हैं:

$$\frac{-10}{18},\frac{-15}{27},\frac{-20}{36},\frac{-60}{108},\frac{-35}{63}$$

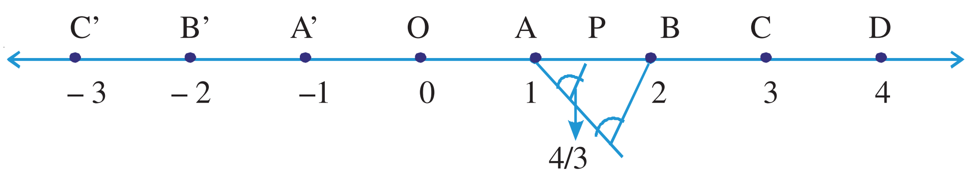
1.5 संख्या रेखा पर परिमेय संख्याएं

हम जानते हैं कि पूर्णांकों को संख्या रेखा पर कैसे निरूपित किया जाता है। आइए हम $\frac{1}{2}$ को संख्या रेखा पर निरूपित करने का प्रयास करें। परिमेय संख्या $\frac{1}{2}$ धन है तथा उसे 0 से दायीं

ओर निरूपित किया जाएगा क्योंकि $0 < \frac{1}{2} < 1$ है, $\frac{1}{2}$, 0 तथा 1 के बीच स्थित है। आकृति में दूरी OA को दो बराबर भागों में बाँटिये। इसे OA को P पर समद्विभाजित करके किया जा सकता है। P, $\frac{1}{2}$ निरूपित करता है। इसी प्रकार R, OA' का मध्य बिन्दु है, तथा परिमेय संख्या $-\frac{1}{2}$ दर्शाता है।



इसी प्रकार $\frac{4}{3}$ निम्न प्रकार से संख्या रेखा पर निरूपित किया जा सकता है।



क्योंकि $1 < \frac{4}{3} < 2$, अतः $\frac{4}{3}$, 1 तथा 2 के बीच स्थित है। दूरी AB को तीन समान भागो में बाँटिये। माना AP उसका एक भाग है।

अब $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} = OA + AP = OP$

अतः बिन्दु P संख्या रेखा पर $\frac{4}{3}$ निरूपित करता है।

1.6 परिमेय संख्याओं की तुलना

परिमेय संख्याओं की तुलना करने के लिए हम निम्न में से कोई एक तरीका प्रयोग में लाते हैं।

(i) यदि दो परिमेय संख्याओं, जिनकी तुलना की जानी है, का हर समान हो, तो उनके अंशों की तुलना कीजिए। वह संख्या, जिसका अंश बड़ा है, बड़ी परिमेय संख्या है।

अतः दो परिमेय संख्याओं $\frac{5}{17}$ and $\frac{9}{17}$ के लिए, जिनके हर समान धन संख्या 17 है,

$\frac{9}{17} > \frac{5}{17}$ क्योंकि 9 > 5

$\therefore \frac{9}{17} > \frac{5}{17}$

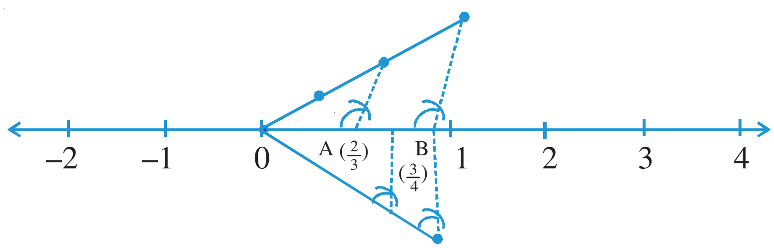
(ii) यदि दो परिमेय संख्याओं, जिनकी तुलना की जानी है, के हर असमान हों, तो उनके समतुल्य रूप लेकर उनके हर समान बनाकर, नयी बनी परिमेय संख्याओं के अंशों की तुलना कीजिए। वह संख्या जिसका अंश बड़ा होगा बड़ी परिमेय संख्या होगी।

उदाहरणतया, परिमेय संख्याओं $\frac{3}{7}$ तथा $\frac{6}{11}$ की तुलना के लिए, हम उनके हर निम्न प्रकार से समान बनाते हैं:

$\frac{3\times11}{7\times11} = \frac{33}{77}$ तथा $\frac{6\times7}{11\times7} = \frac{42}{77}$

क्योंकि $42 > 33$, $\frac{42}{77} > \frac{33}{77}$ अथवा $\frac{6}{11} > \frac{3}{7}$

(iii) दो दी गई परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित करके, हम देखें कि जो परिमेय संख्या दूसरी के दायीं ओर है, वह बड़ी परिमेय संख्या है उदाहरणतया $\frac{2}{3}$ तथा $\frac{3}{4}$ लीजिए। हम इन्हें संख्या रेखा पर निम्न प्रकार से निरूपित करते हैं:



$0 < \frac{2}{3} < 1$ तथा $0 < \frac{3}{4} < 1$. अतः $\frac{2}{3}$ तथा $\frac{3}{4}$ दोनों 0 तथा 1 के बीच स्थित हैं। किसी रेखा को समान भागों में बांटने के तरीके से A, $\frac{2}{3}$ निरूपित करता है तथा B, $\frac{3}{4}$ निरूपित करता है।

क्योंकि B, A के दायीं ओर है, अतः $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ अथवा $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$

अतः $\frac{2}{3}$ तथा $\frac{3}{4}$, में से संख्या $\frac{3}{4}$ बड़ी है।

देखें आपने कितना सीखा 1.1

1. निम्न में से परिमेय संख्याएं तथा पूर्णांक पहचान करके लिखिएः

$$4, \frac{-3}{4}, \frac{5}{6}, -36, \frac{12}{7}, \frac{3}{-8}, \frac{15}{7}, -6$$

2. नीचे दी गयी संख्याओं में उन्हें पहचान कर लिखिए जो

   (i) प्राकृत संख्याएं नहीं हैं

   (ii) पूर्ण संख्याएं नहीं हैं

   (iii) पूर्णांक नहीं हैं

   (iv) परिमेय संख्याएं नहीं हैं

$$-\frac{7}{4}, 16, \frac{-3}{7}, -15, 0, \frac{5}{17}, \frac{3}{-4}, -\frac{4}{3}$$

3. निम्न परिमेय संख्याओं को सरल करके बताइए कि प्रत्येक दशा में क्या परिणामी संख्या एक प्राकृत संख्या, पूर्ण संख्या, पूर्णांक अथवा परिमेय संख्या हैः

$$\text{(i) } 3+\frac{7}{3} \qquad \text{(ii) } -3+\frac{10}{4} \qquad \text{(iii) } -8-13 \qquad \text{(iv) } 12-12$$

$$\text{(v) } \frac{9}{2}-\frac{1}{2} \qquad \text{(vi) } 2\times\frac{5}{7} \qquad \text{(vii) } 8\div 3$$

4. संख्या रेखा का प्रयोग करके निम्न को जोड़िएः

   (i) $9+(-7)$ (ii) $(-5)+(-3)$ (iii) $(-3)+(4)$

5. निम्न में से कौन–कौन सी परिमेय संख्याएं अपने न्यूनतम रूप में हैंः

$$\frac{8}{12}, \frac{5}{7}, \frac{-3}{12}, \frac{-6}{7}, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{27}}, \frac{15}{24}$$

6. निम्न में से कौन–कौन सी परिमेय संख्याएं पूर्णांक हैंः

$$-10, \frac{15}{5}, \frac{-5}{15}, \frac{13}{5}, \frac{27}{9}, \frac{7\times 3}{14}, \frac{-6}{-2}$$

7. दी गई परिमेय संख्याओं के लिए 3 समतुल्य रूप की परिमेय संख्याएं लिखिएः

$$\frac{2}{5}, \frac{-5}{6}, \frac{17}{3}$$

8. निम्न परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए:

$\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$

9. निम्न परिमेय संख्याओं की (i) उनके समतुल्य परिमेय संख्याएं बनाकर (ii) संख्या रेखा का प्रयोग करके तुलना कीजिए:

(a) $\frac{2}{3}$ तथा $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{3}{5}$ तथा $\frac{7}{9}$ (c) $\frac{-2}{3}$ तथा $\frac{-1}{2}$

(d) $\frac{3}{7}$ तथा $\frac{5}{11}$ (e) $\frac{-7}{6}$ तथा $\frac{3}{2}$

1.7 परिमेय संख्याओं पर चारों मूलभूत संक्रियाएँ

1.7.1 परिमेय संख्याओं का योग

(a) परिमेय संख्याओं $\frac{p}{q}$ तथा $\frac{r}{q}$ के योग पर विचार कीजिए।

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{q}=\frac{p+r}{q}$$

उदाहरणतया

(i) $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{2+5}{3}=\frac{7}{3}$

(ii) $\frac{3}{17}+\frac{9}{17}=\frac{3+9}{17}=\frac{12}{17}$

तथा (iii) $\frac{14}{3}+\left(\frac{-5}{3}\right)=\frac{14-5}{3}=\frac{9}{3}=3$

(b) दो परिमेय संख्याएं $\frac{p}{q}$ तथा $\frac{r}{s}$ लीजिए

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{ps}{qs}+\frac{rq}{sq}=\frac{ps+rq}{qs}$$

उदाहरणतया

(i) $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{3\times 3+4\times 2}{4\times 3}=\frac{9+8}{12}=\frac{17}{12}$

(ii) $-\frac{4}{5}+\frac{7}{8}=\frac{-4\times8+5\times7}{5\times8}=\frac{35-32}{40}=\frac{3}{40}$

उपरोक्त दो दशाओं से, हम निम्न व्यापक नियम देते हैं:

(a) उभयनिष्ठ हर वाली दो परिमेय संख्याओं का योग एक ऐसी परिमेय संख्या होती है जिसका हर उनका उभयनिष्ठ हर तथा जिसका अंश उनके अंशों का योग होता है।

(b) विभिन्न हर वाली दो परिमेय संख्याओं का योग एक ऐसी परिमेय संख्या होती है जिसका हर दी गई परिमेय संख्याओं के हरों की गुणा तथा जिसका अंश पहली परिमेय संख्या के अंश तथा दूसरी के हर की गुणा तथा दूसरी परिमेय संख्या के अंश की पहली के हर से गुणा द्वारा प्राप्त संख्याओं का योग होता है।

आइए हम कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1.8: निम्न परिमेय संख्याओं के योग कीजिए:

(i) $\frac{2}{7}$ तथा $\frac{6}{7}$ (ii) $\frac{4}{17}$ तथा $\frac{-3}{17}$ (iii) $-\frac{5}{11}$ तथा $\frac{-3}{11}$

हल: (i) $\frac{2}{7}+\frac{6}{7}=\frac{2+6}{7}=\frac{8}{7}$

$$\therefore \frac{2}{7}+\frac{6}{7}=\frac{8}{7}$$

(ii) $\frac{4}{17}+\frac{(-3)}{17}=\frac{4+(-3)}{17}=\frac{4-3}{17}=\frac{1}{17}$

$$\therefore \frac{4}{17}+\frac{(-3)}{17}=\frac{1}{17}$$

(iii) $\left(-\frac{5}{11}\right)+\left(\frac{-3}{11}\right)=\frac{(-5)+(-3)}{11}=\frac{-5-3}{11}=\frac{-8}{11}$

$$\therefore \left(-\frac{5}{11}\right)+\left(-\frac{3}{11}\right)=-\frac{8}{11}$$

उदाहरण 1.9: निम्न परिमेय संख्याओं का योग कीजिए:

(i) $\frac{3}{4}$ तथा $\frac{1}{7}$ (ii) $\frac{2}{7}$ तथा $\frac{3}{5}$ (iii) $\frac{5}{9}$ तथा $-\frac{4}{15}$

हल: (i) हमें $\frac{3}{4}+\frac{1}{7}$ ज्ञात करना है।

$$=\frac{3\times7}{4\times7}+\frac{1\times4}{7\times4}$$

$$=\frac{21}{28}+\frac{4}{28}=\frac{21+4}{28}$$

$$=\frac{25}{28}$$

$$\therefore \frac{3}{4}+\frac{1}{7}=\frac{25}{28} \text{ अथवा } \left[\frac{3\times7+4\times1}{4\times7}=\frac{21+4}{28}=\frac{25}{28}\right]$$

(ii) $\frac{2}{7}+\frac{3}{5}$

$$=\frac{2\times5}{7\times5}+\frac{3\times7}{5\times7}$$

$$=\frac{10}{35}+\frac{21}{35}$$

$$=\frac{10+21}{35}=\frac{31}{35}$$

$$\therefore \frac{2}{7}+\frac{3}{5}=\frac{31}{35} \text{ अथवा } \left[\frac{2\times5+3\times7}{35}=\frac{10+21}{35}=\frac{31}{35}\right]$$

(iii) $\frac{5}{9}+\frac{(-4)}{15}$

$$=\frac{5\times15}{9\times15}+\frac{(-4)\times9}{15\times9}$$

$$=\frac{75}{135}+\frac{(-36)}{135}$$

$$=\frac{75-36}{135}=\frac{39}{135}=\frac{3\times13}{3\times45}=\frac{13}{45}$$

$$\therefore \frac{5}{9}+\frac{(-4)}{15}=\frac{13}{45} \text{ अथवा } \left[\frac{5\times15+9\times(-4)}{9\times15}=\frac{75-36}{135}=\frac{39}{135}=\frac{13}{45}\right]$$

1.7.2 परिमेय संख्याओं की घटा

(a) $\frac{p}{q}-\frac{r}{q}=\frac{p-r}{q}$

(b) $\frac{p}{q}-\frac{r}{s}=\frac{ps-qr}{qs}$

उदाहरण 1.10: निम्न को सरल कीजिए:

(i) $\frac{7}{4}-\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{3}{5}-\frac{2}{12}$

हल: (i) $\frac{7}{4}-\frac{1}{4}=\frac{7-1}{4}=\frac{6}{4}=\frac{2\times3}{2\times2}=\frac{3}{2}$

(ii) $\frac{3}{5}-\frac{2}{12}=\frac{3\times12}{5\times12}-\frac{2\times5}{12\times5}$

$=\frac{36}{60}-\frac{10}{60}=\frac{36-10}{60}$

$=\frac{26}{60}=\frac{13\times2}{30\times2}=\frac{13}{30}$

1.7.3 परिमेय संख्याओं की गुणा तथा भाग

(i) दो परिमेय संख्याओं $\left(\frac{p}{q}\right)$ तथा $\left(\frac{r}{s}\right)$ की गुणा, $q\neq0, s\neq0$ एक परिमेय संख्या $\frac{pr}{qs}$ है जहाँ $qs\neq0$

$=\frac{\text{अंशों की गुणा}}{\text{हरों की गुणा}}$

(ii) दो परिमेय संख्याओं $\frac{p}{q}$ तथा $\frac{r}{s}$, की भाग $q\neq0, s\neq0$, एक परिमेय संख्या $\frac{ps}{qr}$, है जहाँ $qr\neq0$

$\left(\frac{p}{q}\right)\div\left(\frac{r}{s}\right)=\frac{p}{q}\times\left(\frac{s}{r}\right)$

अथवा (प्रथम परिमेय संख्या) × (दूसरी परिमेय संख्या का व्युत्क्रम)

आइए हम कुछ उदाहरण लें

उदाहरण 1.11: निम्न परिमेय संख्याओं की गुणा कीजिए:

(i) $\frac{3}{7}$ तथा $\frac{2}{9}$ (ii) $\frac{5}{6}$ तथा $\left(\frac{-2}{19}\right)$ (iii) $\frac{7}{13}$ तथा $\left(\frac{-2}{-5}\right)$

हल: (i) $\frac{3}{7}\times\frac{2}{9}=\frac{3\times2}{7\times9}=\frac{3\times2}{7\times3\times3}=\frac{2}{21}$

$$\therefore \left(\frac{3}{7}\right)\times\left(\frac{2}{9}\right)=\frac{2}{21}$$

(ii) $$\frac{5}{6}\times\left(\frac{-2}{19}\right)=\frac{5\times(-2)}{6\times19}$$

$$=-\frac{2\times5}{2\times3\times19}=-\frac{5}{57}$$

$$\therefore \left(\frac{5}{6}\right)\times\left(-\frac{2}{19}\right)=-\frac{5}{57}$$

(iii) $$\frac{7}{13}\times\left(\frac{-2}{-5}\right)=\left(\frac{7}{13}\right)\left(\frac{-(-2)}{5}\right)$$

$$=\frac{7}{13}\times\frac{2}{5}=\frac{7\times2}{13\times5}=\frac{14}{65}$$

$$\therefore \left(\frac{7}{13}\right)\times\left(\frac{-2}{-5}\right)=\frac{14}{65}$$

उदाहरण 1.12: निम्न को सरल कीजिए:

(i) $\left(\frac{3}{4}\right)\div\left(\frac{7}{12}\right)$ (ii) $\frac{9}{16}\div\left(-\frac{105}{12}\right)$ (iii) $\left(\frac{87}{27}\right)\div\left(\frac{29}{18}\right)$

हल: (i) $$\left(\frac{3}{4}\right)\div\left(\frac{7}{12}\right)$$

$$=\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{12}{7}\right)$$ [$\frac{7}{12}$ का व्युत्क्रम $\frac{12}{7}$ है।]

$$=\frac{3\times12}{4\times7}=\frac{3\times3\times4}{7\times4}=\frac{9}{7}$$

$$\therefore \left(\frac{3}{4}\right)\div\left(\frac{7}{12}\right)=\frac{9}{7}$$

(ii) $\left(\frac{9}{16}\right) \div \left(\frac{-105}{2}\right)$

$$= \left(\frac{9}{16}\right) \times \left(\frac{2}{-105}\right) \qquad [\frac{-105}{2} \text{ का व्युत्क्रम } \frac{2}{-105} \text{ है}]$$

$$= -\frac{9 \times 2}{2 \times 8 \times 3 \times 35} = -\frac{3 \times 3 \times 2}{2 \times 8 \times 3 \times 35}$$

$$= \frac{-3}{8 \times 35} = \frac{-3}{280}$$

$$\therefore \left(\frac{9}{16}\right) \div \left(\frac{-105}{2}\right) = \frac{-3}{280}$$

(iii) $\left(\frac{87}{27}\right) \div \left(\frac{29}{18}\right)$

$$= \left(\frac{87}{27}\right) \times \left(\frac{18}{29}\right) = \frac{87}{27} \times \frac{18}{29} = \frac{29 \times 3 \times 2 \times 9}{9 \times 3 \times 29} = \frac{2}{1}$$

$$\therefore \left(\frac{87}{27}\right) \div \left(\frac{29}{18}\right) = \frac{2}{1}$$

देखें आपने कितना सीखा 1.2

1. निम्न परिमेय संख्याओं को जोड़िए:

   (i) $\frac{3}{7}, \frac{6}{7}$ (ii) $\frac{2}{15}, -\frac{6}{15}$ (iii) $\frac{3}{20}, \frac{-7}{-20}$ (iv) $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}$

2. निम्न परिमेय संख्याओं को जोड़िए:

   (i) $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ (ii) $\frac{17}{7}, \frac{5}{9}$ (iii) $\frac{2}{5}, \frac{-5}{7}$

3. संकेतित संक्रियाएं कीजिए:

   (i) $\left(-\frac{7}{8} + \frac{-5}{12}\right) + \frac{3}{16}$ (ii) $\left(\frac{7}{3} + \frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right)$

4. घटाइए:

(i) $\frac{13}{15}$ से $\frac{7}{15}$ (ii) $-\frac{5}{3}$ से $\frac{7}{3}$ (iii) $\frac{9}{24}$ से $\frac{3}{7}$

5. सरल कीजिए:

(i) $\left(3\frac{1}{5}+\frac{7}{5}-\frac{13}{6}\right)$ (ii) $\frac{5}{2}+\frac{13}{4}-6\frac{3}{4}$

6. गुणा कीजिए:

(i) $\frac{2}{11}$ की $\frac{5}{6}$ से (ii) $-\frac{3}{11}$ की $\frac{-33}{35}$ से (iii) $\frac{-11}{3}$ की $\frac{-27}{77}$ से

7. भाग दीजिए:

(i) $\frac{1}{2}$ को $\frac{1}{4}$ से (ii) $\frac{-7}{4}$ को $\frac{-4}{5}$ से (iii) $\frac{35}{33}$ को $\frac{-7}{22}$ से

8. निम्न को सरल कीजिए

(i) $\left(\frac{2}{3}+\frac{7}{8}\right)\times\frac{8}{25}\div\frac{37}{15}$ (ii) $\left[\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)\div\frac{1}{4}\right]\times 21$

9. $\frac{16}{7}$ तथा $\frac{-3}{14}$ के योग को उनके अन्तर से भाग कीजिए।

10. किसी संख्या को $\frac{13}{3}$ से गुणा करने पर परिणाम $\frac{39}{12}$ आता है। संख्या ज्ञात कीजिए।

1.8 एक परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण

आप एक पूर्णांक को दूसरे पूर्णांक से भाग करके परिणाम को दशमलव रूप में प्रकट करने की प्रक्रिया से परिचित हैं। एक परिमेय संख्या को दशमलव रूप में प्रकट करने की प्रक्रिया लम्बे विभाजन को दशमलव रूप में लिखने की है।

आइए कुछ उदाहरण लें:

उदाहरण 1.13: निम्न में से प्रत्येक का दशमलव निरूपण कीजिए:

(i) $\frac{12}{5}$ (ii) $\frac{-27}{25}$ (iii) $\frac{13}{16}$

हल: i) लम्बे विभाजन की प्रक्रिया का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\begin{array}{r} 2.4 \\ 5\overline{)12.0} \\ \underline{10} \\ 2.0 \\ \underline{2.0} \\ \times \end{array}$$

अतः, $\frac{12}{5} = 2.4$

ii)

$$\begin{array}{r} 25\overline{)-27}\ (-1.08 \\ \underline{25} \\ 200 \\ \underline{200} \\ \times \end{array}$$

अतः $\frac{-27}{25} = -1.08$

iii)

$$\begin{array}{r} 0.8125 \\ 16\overline{)13.0000} \\ \underline{128} \\ 20 \\ \underline{16} \\ 40 \\ \underline{32} \\ 80 \\ \underline{80} \\ \times \end{array}$$

अतः $\frac{13}{16} = 0.8125$

उपरोक्त उदाहरणों से, यह देखा जा सकता है कि भाग की प्रक्रिया सीमित पदों के बाद समाप्त हो जाती है जब शेषफल 0 हो जाता है तथा परिणामी दशमलव संख्या में दशमलव स्थानों की संख्या सीमित है। ऐसे दशमलव को हम सांत दशमलव कहते हैं।

नोट: नोट कीजिए कि उपरोक्त भाग की प्रक्रिया में, परिमेय संख्याओं के हरों के केवल 2 तथा 5 अथवा दोनों उनके अभाज्य गुणनखंड हैं।

वैकल्पिक तरीके से, हम $\frac{12}{5}$ का $\frac{12\times2}{5\times2} = \frac{24}{10} = 2.4$ लिख सकते थे। तथा इसी प्रकार अन्य परिमेय संख्याओं के लिए।

आइए एक अन्य उदाहरण लें।

उदाहरण 14: निम्न में से प्रत्येक का दशमलव निरूपण कीजिए:

(a) $\frac{7}{3}$ (b) $\frac{2}{7}$ (c) $\frac{5}{11}$

हल: (a)

$$
\begin{array}{r}
2.33 \\
3\overline{)7.00} \\
6 \\
\hline
1.0 \\
9 \\
\hline
1.0 \\
9 \\
\hline
1.00
\end{array}
$$

यहाँ शेषफल 1 बार–बार आ रहा है

अतः दशमलव एक सांत दशमलव नहीं है।

$\frac{7}{3} = 2.333...$ अथवा $2.\overline{3}$

(b)

$$
\begin{array}{r}
0.28571428 \\
7\overline{)2.000} \\
14 \\
\hline
60 \\
56 \\
\hline
40 \\
35 \\
\hline
50 \\
49 \\
\hline
10 \\
7 \\
\hline
30 \\
28 \\
\hline
20 \\
14 \\
\hline
60 \\
56 \\
\hline
4
\end{array}
$$

यहाँ जब शेषफल 3 होता है, तो उसके बाद के अंक दोहराये जाने लगते हैं

$\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$

नोटः एक अंक अथवा अंकों के समूह पर एक रेखा से अभिप्राय है कि वह अंक अथवा अंक समूह अनंत रूप से दोहराया गया है।

(c)

$$
\begin{array}{r}
0.454 \\
11\overline{)5.00} \\
44 \\
\hline
60 \\
55 \\
\hline
50 \\
44 \\
\hline
50...
\end{array}
$$

यहाँ फिर जब शेषफल 5 आता है, तो 5 के बाद अंक दोहराए जाने लगते हैं।

$\therefore \frac{5}{11} = 0.\overline{45}$

उपरोक्त से यह स्पष्ट है कि उन स्थितियों में जहाँ पर हर के गुणनखंड 2 तथा 5 के अतिरिक्त हैं, तो दशमलव निरूपण असांत हो जाता है। ऐसे दशमलव को असांत तथा आवर्ती कहते हैं।

अतः, हम उदाहरणों 1.13 तथा 1.14 से स्पष्ट है कि परिमेय संख्याओं का निरूपण

(i) या तो सांत दशमलव होता है (जहाँ सीमित पदों के बाद शेषफल 0 है।)

(ii) अथवा एक असांत आवर्ती दशमलव होता है (जहाँ भाग कभी समाप्त नहीं होता)

इस प्रकार एक परिमेय संख्या या तो सांत दशमलव है अथवा असांत आवर्ती दशमलव है।

1.8.1 एक परिमेय संख्या के दशमलव प्रसार को p/q के रूप में व्यक्त करना

आइए हम उदाहरणों से इसे स्पष्ट करें।

उदाहरण 1.15: (i) 0.48 तथा (ii) 0.1375 को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल: (i) $0.48 = \frac{48}{100} = \frac{12}{25}$

(ii) $0.1375 = \frac{1375}{10000} = \frac{55}{400} = \frac{11}{80}$

उदाहरण 1.16: (i) 0.666... (ii) 0.374374... को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल: (i) माना $x = 0.666...$ (A)

$\therefore\ 10x = 6.666...$ (B)

(B) – (A) से मिलता है $9x = 6$ अथवा $x = \frac{2}{3}$

(ii) माना $x = 0.374374374....$ (A)

$1000x = 374.374374374....$ (B)

(B) – (A) से मिलता है $999x = 374$

अथवा $x = \frac{374}{999}$

$\therefore 0.374374374... = \frac{374}{999}$

उपरोक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि

एक सांत दशमलव अथवा एक असांत आवर्ती दशमलव एक परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण है।

नोट: असांत आवर्ती दशमलव जैसे 0.374374374... को $0.\overline{374}$ के रूप में लिखा जाता है। अंक 374 के ऊपर खींची गयी रेखा (bar) दर्शाती है कि अंक समूह बार–बार आवर्त होता है।

देखें आपने कितना सीखा 1.3

1. निम्न परिमेय संख्याओं को दशमलव रूप में व्यक्त कीजिए:

   (i) $\frac{31}{80}$ (ii) $\frac{12}{25}$ (iii) $\frac{12}{8}$ (iv) $\frac{75}{12}$ (v) $\frac{91}{63}$

2. निम्न परिमेय संख्याओं को दशमलव रूप में व्यक्त कीजिए:

   (i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{5}{7}$ (iii) $\frac{25}{11}$

3. निम्न दशमलवों को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए:

   (a) (i) 2.3 (ii) – 3.12 (iii) –0.715 (iv) 8.146

   (b) (i) $0.\overline{333}$ (ii) $3.\overline{42}$ (iii) – 0.315315315...

1.9 दो परिमेय संख्याओं के बीच परिमेय संख्याएं

क्या दो दी गई परिमेय संख्याओं के बीच एक परिमेय संख्या ज्ञात करना संभव है? यह देखने के लिए, निम्न उदाहरण लीजिए:

उदाहरण 1.17: $\frac{3}{4}$ तथा $\frac{6}{5}$ के बीच एक परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: आइए हम संख्या $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{6}{5}\right)$ ज्ञात करें

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{15+24}{20}\right)=\frac{39}{40}$$

अब $\frac{3}{4}=\frac{3\times10}{4\times10}=\frac{30}{40}$

और $\frac{6}{5}=\frac{6\times8}{5\times8}=\frac{48}{40}$

स्पष्ट है कि $\frac{30}{40} < \frac{39}{40} < \frac{48}{40}$

अतः $\frac{3}{4}$ तथा $\frac{6}{5}$ के बीच $\frac{39}{40}$ एक परिमेय संख्या है।

नोटः $\frac{3}{4} = 0.75,\ \frac{39}{40} = 0.975$ तथा $\frac{6}{5} = 1.2$

स्पष्ट है कि $\therefore 0.75 < 0.975 < 1.2$

अथवा $\frac{3}{4} < \frac{39}{40} < \frac{6}{5}$

यह नीचे दिए गए दोनों में से किसी भी तरीके से किया जा सकता हैः

(i) दोनों दी गई परिमेय संख्याओं का हर समान बनाकर उनका माध्य लीजिए।

(ii) दोनों दी गई परिमेय संख्याओं को दशमलव में बदलकर उनका माध्य लीजिए।

अब प्रश्न यह उठता है कि दिये गए ''दो परिमेय संख्याओं के बीच कितनी परिमेय संख्याएं ज्ञात कर सकते हैं'' आप निम्न उदाहरण लीजिए।

उदाहरण 1.18: $\frac{1}{2}$ तथा $\frac{3}{4}$ के बीच 3 परिमेय संख्याएं ज्ञात कीजिए।

हलः $\frac{1}{2} = \frac{1\times 8}{2\times 8} = \frac{8}{16}$

तथा $\frac{3}{4} = \frac{3\times 4}{4\times 4} = \frac{12}{16}$

क्योंकि $\frac{8}{16} < \frac{9}{16} < \frac{10}{16} < \frac{11}{16} < \frac{12}{16}$

इस प्रकार, हम निम्न तीन परिमेय संख्याएं ज्ञात कर सकेः

$\frac{9}{16}, \frac{10}{16}$ तथा $\frac{11}{16}$

वस्तुतः हम दी गई दो परिमेय संख्याओं के बीच कितनी भी परिमेय संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं।

$$\frac{1}{2} = \frac{50}{2\times 50} = \frac{50}{100}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times25}{4\times25}=\frac{75}{100}$$

क्योंकि $\frac{50}{100}<\frac{51}{100}<\frac{52}{100}<\frac{53}{100}<.....<\frac{72}{100}<\frac{73}{100}<\frac{74}{100}<\frac{75}{100}<....$ (i)

$\therefore$ $\frac{1}{2}$ तथा $\frac{3}{4}$ के बीच 24 परिमेय संख्याएं ज्ञात कर सकते हैं जैसा कि ऊपर (i) में है।

इसी प्रकार हम इससे आगे भी जा सकते हैं।

देखें आपने कितना सीखा 1.4

1. निम्न परिमेय संख्याओं के बीच एक परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए:

   (i) $\frac{3}{4}$ तथा $\frac{4}{3}$ (ii) 5 तथा 6 (iii) $-\frac{3}{4}$ तथा $\frac{1}{3}$

2. निम्न परिमेय संख्याओं के बीच दो परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए:

   (i) $-\frac{2}{3}$ तथा $\frac{1}{2}$ (ii) $-\frac{2}{3}$ तथा $-\frac{1}{4}$

3. निम्न परिमेय संख्याओं के बीच 5 परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए:

   (i) 0.27 तथा 0.30 (ii) 7.31 तथा 7.35

   (iii) 20.75 तथा 26.80 (iv) 1.001 तथा 1.002

1.10 अपरिमेय संख्याएं

हमने देखा है कि प्रत्येक परिमेय संख्या सांत अथवा असांत आवर्ती होती हैं परन्तु क्या ऐसी दशमलव संख्याएं भी होती हैं जो न तो सांत हैं और न ही असांत आवर्ती हैं।

निम्न दशमलव पर विचार कीजिए:

0.10 100 1000 10000 1....... (i)

आप देख सकते हैं कि इसमें एक प्रतिरूप है तथा यह एक अनिश्चित स्थान तक के दशमलव के रूप का है परन्तु इस प्रतिरूप में किसी संख्या समूह की पुनरावृत्ति नहीं हुई है। यह एक

ऐसे दशमलव का उदाहरण है, जो न तो सांत है तथा न ही आवर्ती है। एक ऐसा अन्य दशमलव है:

0.1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13..... (ii)

क्या आप (i) तथा (ii) को दशमलव के 6 अंक तक लिख सकते हैं? (i) के अगले 6 अंक हैं 000001... तथा (ii) के अगले छः अंक हैं 14 15 16 ...

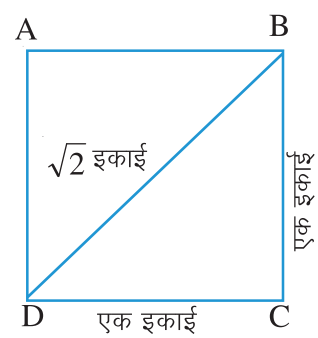
(i) तथा (ii) जैसे दशमलव अपरिमेय संख्याए प्रदर्शित करते हैं।

अतः, *एक दशमलव प्रसार जो न तो सांत है और न ही आवर्ती है एक अपरिमेय संख्या प्रदर्शित करता है।*

1.11 परिमेय संख्याओं की अपर्याप्तता

क्या हम सभी लम्बाइयों को परिमेय संख्याओं के पदों में व्यक्त कर सकते हैं? क्या हम सभी भारों (द्रव्यमानों) को परिमेय संख्याओं के पदों में व्यक्त कर सकते हैं?

आइए निम्न स्थिति पर विचार करें।



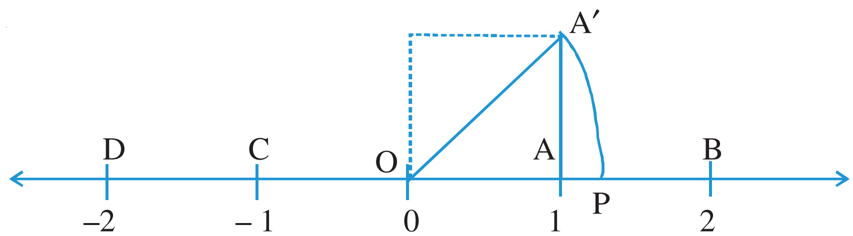
एक वर्ग ABCD लीजिए जिसकी भुजा एक इकाई है। स्वाभाविक रूप से, कर्ण BD की लम्बाई $\sqrt{2}$ इकाई है।

यह सिद्ध किया जा सकता है कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या नहीं है क्योंकि कोई ऐसी परिमेय संख्या नहीं जिसका वर्ग 2 है। [उत्पत्ति इस पाठ के कार्यक्षेत्र से बाहर है].

इसलिए हम निष्कर्ष निकालते हैं कि हम सभी रेखाखंडों का सही मान केवल परिमेय सख्याएं तथा एक ही इकाई का प्रयोग करके नहीं कर सकते। अतः परिमेय संख्याओं का प्रयोग करके एक ही इकाई में सभी लम्बाईयां नहीं मापी जा सकती। यह कमी आवश्यकता दर्शाती है कि परिमेय संख्याओं का विस्तार अपरिमेय संख्याओं (जो परिमेय नहीं हैं) तक किया जाए।

हमने यह भी पढ़ा है कि प्रत्येक परिमेय संख्या के लिए हम संख्या रेखा पर एक बिन्दु निरूपित कर सकते हैं। आइए हम इस कथन के विलोम पर ध्यान दें। क्या संख्या रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु के लिए सदा एक परिमेय संख्या निर्धारित कर सकते हैं? इस प्रश्न का उत्तर है नहीं। इसे स्पष्ट करने के लिए निम्न उदाहरण लीजिए।

संख्या रेखा पर बिन्दु O, A, B, C तथा D लीजिए जो क्रमशः परिमेय संख्याएं 0, 1, 2, –1 तथा –2 निरूपित करते हैं। A पर $AA' \perp OA$ खींचिए ताकि $AA' = 1$ इकाई



अतः $\therefore OA' = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ इकाई। O को केन्द्र मानकर OA′ त्रिज्या लेकर यदि हम एक चाप लगाएँ, तो हम बिन्दु P पर पहुँचते हैं, जो संख्या $\sqrt{2}$ को दर्शाता है।

क्योंकि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि (P के प्रकार के) और भी बिन्दु संख्या रेखा पर हैं जो अपरिमेय संख्याओं को निरूपित करते हैं इसी प्रकार हम दिखा सकते हैं कि संख्या रेखा पर $\sqrt{3},\ 2\sqrt{3},\ 5\sqrt{2}$ प्रकार के बिन्दु स्थित हैं, जो अपरिमेय संख्याएं निरूपित करते हैं।

$\therefore$ संख्या रेखा, जिस पर परिमेय संख्याओं को निरूपित करते बिन्दु हैं, के बीच रिक्त स्थान हैं। अतः संख्या रेखा पर स्थित बिन्दु परिमेय संख्याएं तथा अपरिमेय दोनों संख्याओं को निरूपित करते हैं।

इस प्रकार हमने परिमेय संख्याओं के निकाय का विस्तार करके उसमें अपरिमेय संख्याओं को भी सम्मिलित किया है। ऐसे निकाय को, जिसमें परिमेय तथा अपरिमेय दोनों संख्याएं होती हैं, वास्तविक संख्याओं का निकाय कहते हैं।

सभी परिमेय तथा अपरिमेय संख्याओं के निकाय को वास्तविक संख्याओं का निकाय कहते हैं।

देखें आपने कितना सीखा 1.5

1. निम्न के दशमलव निरूपण के प्रथम तीन अंक लिखिएः

   $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5}$

2. निम्न संख्याओं को वास्तविक संख्याओं की संख्या रेखा पर निरूपित कीजिएः

   (i) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (ii) $1+\sqrt{2}$ (iii) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

1.12 दो दी गई संख्याओं के बीच अपरिमेय संख्या ज्ञात करना

आइए उदाहरणों द्वारा दो दी गई संख्याओं के बीच अपरिमेय संख्या ज्ञात करने की विधि को स्पष्ट करें।

उदाहरण 1.19: 2 तथा 3 के बीच एक अपरिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: संख्या $\sqrt{2\times 3}$ को देखिए

हम जानते हैं कि $\sqrt{6}$ का लगभग मान 2.45 है।

$\therefore$ यह 2 तथा 3 के बीच स्थित है तथा यह एक अपरिमेय संख्या है।

उदाहरण 1.20: $\sqrt{3}$ तथा 2 के बीच एक अपरिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: संख्या $\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}$ को देखिए

$$=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 1+\frac{1.732}{2}=1.866$$

अतः $\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}\approx 1.866$, $\sqrt{3}$ (≈ 1.732) तथा 2 के बीच स्थित है।

अतः वांछित परिमेय संख्या $\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}$ है।

देखें आपने कितना सीखा 1.6

1. निम्न संख्या युग्मों के बीच एक अपरिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

   (i) 2 तथा 4 (ii) $\sqrt{3}$ तथा 3 (iii) $\sqrt{2}$ तथा $\sqrt{3}$

2. क्या आप 1 से 2 के बीच अपरिमेय संख्याओं की संख्या लिख सकते हैं? इसको आप उदाहरणों द्वारा स्पष्ट कीजिए।

1.13 दी गई संख्याओं का दशमलव के दिए गए स्थानों तक लगभग मान

कभी–कभी वास्तविक संख्याओं का दशमलव के लिए हुए स्थानों तक लगभग मान निकालना सुविधाजनक होता है। आइए इसे उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करें।

उदाहरण 1.21: संख्या 2.71832 का दो दशमलव स्थान तक लगभग मान ज्ञात कीजिए।

हल: हम दशमलव के तीसरे अंक के स्थान को देखते हैं। इस प्रश्न में यह 8 है, जो 5 से अधिक है। अतः 2.71832, का दशमलव के दो स्थानों तक लगभग मान 2.72 है।

उदाहरण 1.22: संख्या 12.78962 का दशमलव के 3 स्थानों तक लगभग मान ज्ञात कीजिए।

हल: हम दशमलव के चौथे अंक के स्थान को देखते हैं (इस प्रश्न में यह 6 है) जो 5 से अधिक है। अतः 12.78962 का दशमलव के तीन स्थानों तक लगभग मान 12.790 है।

अतः हम देखते हैं कि हम किसी संख्या को कुछ दशमलव के स्थानों तक लगभग मान ज्ञात करने के लिए हम उसके दशमलव भाग का अगला अंक देखते हैं।

(i) यदि अंक 5 से कम है, तो उसे उत्तर में छोड़ दिया जाता है।

(ii) यदि अंक 5 अथवा 5 से अधिक है तो हम उससे पिछले अंक में 1 जोड़कर अभीष्ट संख्या प्राप्त करते हैं।

देखें आपने कितना सीखा 1.7

1. निम्न संख्याओं का 3 दशमलव के स्थानों तक लगभग मान लिखिए:

   (i) 0.77777 (ii) 7.3259 (iii) 1.0118

   (iv) 3.1428 (v) 1.1413

आइए दोहराएँ

- प्राकृत संख्याओं, पूर्ण संख्याओं, पूर्णांकों तथा उन पर मूलभूत संक्रियाओं का पुनरावलोकन
- उपरोक्त का संख्या रेखा पर निरूपण
- पूर्णांकों का परिमेय संख्या तक विस्तार–परिमेय संख्या एक ऐसी संख्या है जो p/q, के रूप में लिखी जा सकती है, जहाँ p तथा q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$.
- जब q को धन बना दिया जाता है तथा p तथा q में कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है, तब एक परिमेय संख्या को मानक रूप तथा न्यूनतम रूप में कहा जाता है।
- दो परिमेय संख्याओं को एक ही संख्या का समतुल्य रूप कहा जाता है यदि दोनों का मानक रूप एक ही है।
- परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित किया जा सकता है।
- प्रत्येक परिमेय संख्या के संगत संख्या रेखा पर एक अद्वितीय बिन्दु स्थित होता है।
- परिमेय संख्याओं की तुलना की जा सकती है

- उनका एक ही हर बनाकर फिर उनके अंशों की तुलना से
- संख्या रेखा पर निरूपित करने पर बड़ी परिमेय संख्या दूसरी से दायीं ओर होती है।
- पूर्णांकों की तरह, परिमेय संख्याओं पर भी चारों मूलभूत संक्रियाएं की जा सकती हैं।
- एक परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण या तो सांत होता है अथवा असांत आवृति होता है।
- दो परिमेय संख्याओं के बीच अनंत परिमेय संख्याएं होती हैं।
- संख्या रेखा पर परिमेय संख्याओं को निरूपित करने वाले बिन्दुओं के अतिरिक्त अन्य बिन्दु भी होते हैं। यह परिमेय संख्याओं के निकाय की अपर्याप्तता है।
- परिमेय संख्याओं के निकाय का वास्तविक संख्याओं तक विस्तार किया गया है।
- परिमेय संख्याएं तथा अपरिमेय संख्याएं मिलकर वास्तविक संख्याओं का निकाय बनाती हैं।
- हम दो अपरिमेय संख्याओं के बीच सदा एक अपरिमेय संख्या ज्ञात कर सकते हैं।
- एक अपरिमेय संख्या का दशमलव निरूपण असांत अनावर्ती होता है।
- हम एक परिमेय अथवा अपरिमेय संख्या का दिये गए दशमलव के स्थानों तक लगभग मान ज्ञात कर सकते हैं।

आइए अभ्यास करें

1. निम्न संख्याओं में से चुनिए:

   (i) प्राकृत संख्याएं

   (ii) पूर्णांक जो प्राकृत संख्याएं नहीं हैं

   (iii) परिमेय संख्याएं जो प्राकृत संख्याएं नहीं हैं

   (iv) अपरिमेय संख्याएं

   $$-3, 17, \frac{6}{7}, \frac{-3}{8}, 0, -32, \frac{3}{14}, \frac{11}{6}, \sqrt{2}, 2+\sqrt{3}$$

2. निम्न पूर्णांकों को परिमेय संख्याओं के रूप में लिखिए:

   (i) – 14 (ii) 13 (iii) 0 (iv) 2

   (v) 1 (vi) –1 (vii) –25

3. निम्न परिमेय संख्याओं को न्यूनतम रूप में लिखिए:

   $$\frac{6}{8}, \frac{14}{21}, \frac{-17}{153}, \frac{13}{273}$$

4. निम्न परिमेय संख्याओं को दशमलव रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) $\frac{11}{80}$ (ii) $\frac{8}{25}$ (iii) $\frac{14}{8}$ (iv) $\frac{15}{6}$ (v) $\frac{98}{35}$

(vi) $\frac{15}{7}$ (vii) $-\frac{7}{6}$ (viii) $\frac{115}{11}$ (ix) $-\frac{17}{13}$ (x) $\frac{126}{36}$

5. निम्न दशमलवों को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) 2.4 (ii) – 0.32 (iii) 8.14 (iv) $3.\overline{24}$

(v) 0.415415415...

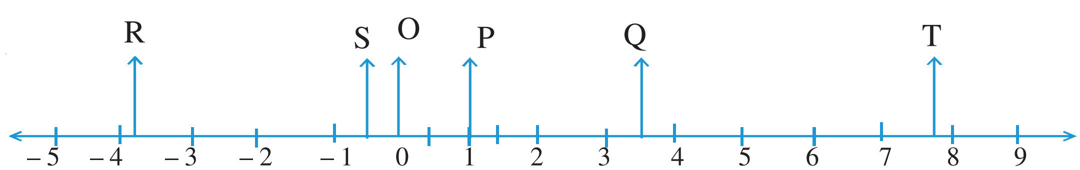
6. निम्न परिमेय संख्याओं के बीच एक परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए:

(i) $\frac{3}{4}$ तथा $\frac{7}{8}$ (ii) – 2 तथा – 3 (iii) $-\frac{4}{5}$ तथा $\frac{1}{3}$

7. निम्न परिमेय संख्याओं के बीच तीन परिमेय संख्याएं ज्ञात कीजिए:

(i) $\frac{3}{4}$ तथा $\frac{-3}{4}$ (ii) 0.27 तथा 0.28 (iii) 1.32 तथा 1.34

8. निम्न आकृति में बिन्दुओं O, P, Q, R, S तथा T के संगत परिमेय संख्याएँ लिखिए:



9. निम्न परिमेय संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए:

(i) $\frac{3}{5}, \frac{-7}{5}$ (ii) $-\frac{7}{9}, \frac{5}{9}$ (iii) $\frac{3}{5}, \frac{7}{3}$ (iv) $\frac{9}{5}, \frac{2}{3}$ (v) $\frac{18}{7}, -\frac{7}{6}$

10. निम्न परिमेय संख्याओं की गुणा ज्ञात कीजिए:

(i) $\frac{3}{5}, \frac{7}{3}$ (ii) $\frac{19}{5}, \frac{2}{3}$ (iii) $\frac{15}{7}, \frac{-14}{5}$

11. निम्न संख्या युग्मों के बीच एक अपरिमेय संख्या लिखिए:

    (i) 1 तथा 3 (ii) $\sqrt{3}$ तथा 3 (iii) $\sqrt{2}$ तथा $\sqrt{5}$ (iv) $-\sqrt{2}$ तथा $\sqrt{2}$

12. 2 तथा 7 के बीच कितनी परिमेय तथा कितनी अपरिमेय संख्याएं स्थित हैं?

13. निम्न संख्याओं का दशमलव के दो स्थानों तक सभी मान ज्ञात कीजिए:

    (i) 0.338 (ii) 3.924 (iii) 3.14159 (iv) 3.1428

14. निम्न का दशमलव के 3 स्थानों तक सही मान ज्ञात कीजिए:

    (i) $\frac{3}{4}$ (ii) $2+\sqrt{2}$ (iii) 1.7326 (iv) 0.9999...

15. निम्न को अपरिमेय संख्याओं के रूप में सरल कीजिए। पहला आपके लिए किया गया है:

    (i) $12\sqrt{3}+5\sqrt{3}-7\sqrt{3}=\sqrt{3}[12+5-7]=10\sqrt{3}$

    (ii) $3\sqrt{2}-2\sqrt{8}+7\sqrt{2}$

    (iii) $3\sqrt{2}\times 2\sqrt{3}\times 5\sqrt{6}$

    (iv) $[(\sqrt{8}\times 3\sqrt{2})\times 6\sqrt{2}]\div 36\sqrt{2}$

देखें आपने कितना सीखा के उत्तर

1.1

1. पूर्णांक: 4, – 36, – 6

   परिमेय संख्याएं: $4,\frac{-3}{4},\frac{5}{6},-36,\frac{12}{7},\frac{-3}{8},\frac{15}{7},-6$

2. (i) $-\frac{7}{4},-\frac{3}{7},-15,0.\frac{5}{17},-\frac{3}{4},-\frac{4}{3}$

   (ii) $-\frac{7}{4},-\frac{3}{7},-15,\frac{5}{17},-\frac{3}{4},-\frac{4}{3}$

   (iii) $-\frac{7}{4},-\frac{3}{7},\frac{5}{17},-\frac{3}{4},-\frac{4}{3}$

(iv) सभी परिमेय संख्याएं हैं।

3. (i) $\frac{16}{3}$, परिमेय संख्या (ii) $-\frac{1}{2}$, परिमेय संख्या (iii) –21, पूर्णांक तथा परिमेय संख्या

(iv) शून्य, पूर्ण संख्या, पूर्णांक तथा परिमेय संख्या (v) 4, सभी

(vi) $\frac{10}{7}$, परिमेय संख्या (vii) $\frac{8}{3}$, परिमेय संख्या

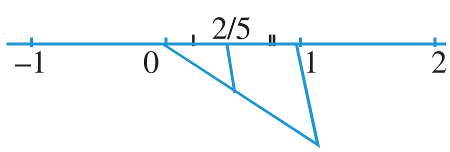
4. (i) 2 (ii) – 8 (iii) 1

5. $\frac{5}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$

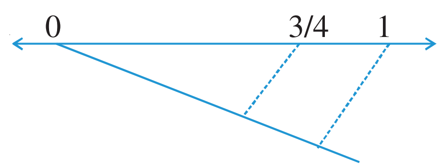
6. $-10, \frac{15}{5}, \frac{27}{9}, \frac{-6}{-2}$

7. (i) $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{6}{15}=\frac{8}{20}$ (ii) $-\frac{5}{6}=-\frac{10}{12}=-\frac{15}{18}=-\frac{20}{24}$ (iii) $\frac{17}{3}=\frac{34}{6}=\frac{51}{9}=\frac{68}{12}$

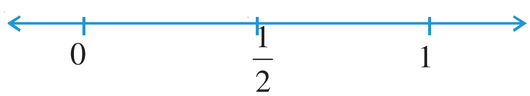
8. (i)



(ii)



(iii)



9. (a) $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ (b) $\frac{7}{9} > \frac{3}{5}$ (c) $\frac{-1}{2} > \frac{-2}{3}$ (d) $\frac{5}{11} > \frac{3}{7}$

(e) $\frac{3}{2} > -\frac{7}{6}$

1.2

1. (i) $\frac{9}{7}$ (ii) $-\frac{4}{15}$ (iii) $\frac{1}{2}$ (iv) $\frac{1}{2}$

2. (i) $\frac{19}{6}$ (ii) $\frac{188}{63}$ (iii) $-\frac{11}{35}$

3. (i) $-\frac{53}{48}$ (ii) $\frac{149}{60}$

4. (i) $\frac{2}{5}$ (ii) -4 (iii) $\frac{-3}{56}$

5. (i) $\frac{73}{30}$ (ii) -1

6. (i) $\frac{5}{33}$ (ii) $\frac{9}{35}$ (iii) $\frac{9}{7}$

7. (i) 2 (ii) $\frac{35}{16}$ (iii) $-\frac{10}{3}$

8. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) 7

9. $\frac{29}{35}$

10. $\frac{3}{4}$

1.3

1. (i) 0.3875 (ii) 0.48 (iii) 1.5 (iv) 6.25 (v) $1.\overline{4}$

2. (i) $0.\overline{6}$ (ii) $0.\overline{714285}$ (iii) $2.\overline{27}$

3. (a) (i) $\frac{23}{10}$ (ii) $-\frac{78}{25}$ (iii) $-\frac{143}{200}$ (iv) $\frac{4073}{500}$

   (b) (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{113}{33}$ (iii) $-\frac{35}{111}$

1.4

1. (i) $\frac{25}{24}$ (ii) 5.5 (iii) $\frac{-5}{24}$

2. (i) 0.2 and 0.3 (ii) $-0.30, -0.35$

3. (i) 0.271, 0.275, 0, 281, 0.285, 0.291

(ii) 7.315, 7.320 7.325, 7.330, 7.335

(iii) 21.75, 22.75, 23.75, 24.75, 25.75

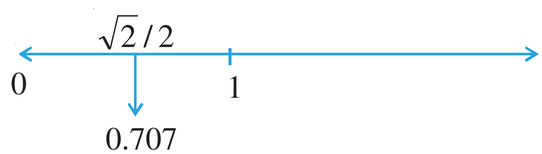
(iv) 1.0011, 1.0012, 1.0013, 1.0014, 1.0015

नोट: *अन्य उत्तर भी हो सकते हैं।*

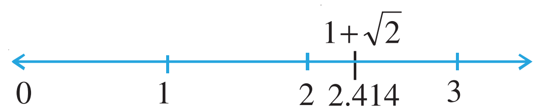
1.5

1. 1.414, 1.732, 2.236

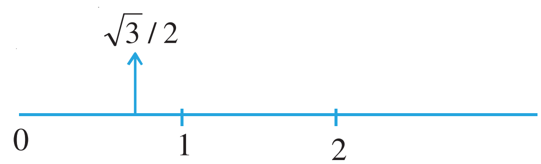
2. (i)



(ii)



(iii)



1.6

1. (i) $\sqrt{5}$ (ii) $\sqrt{3}+1$ (iii) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

2. अनंत:

1.0001, 1.0002, ..., 1.0010, 1.0011,......, 1.0020, 1.0021, ...

1.7

1. (i) 0.778 (ii) 7.326 (iii) 1.012 (iv) 3.143 (v) 1.141

आइए अभ्यास करें के उत्तर

1. प्राकृत संख्या 17,

पूर्णांक लेकिन प्राकृत संख्या नहीं –3, 0, – 32

परिमेय संख्याएं लेकिन प्राकृत संख्या नहीं $-3, \frac{6}{7}, \frac{-3}{8}, 0, -32, \frac{3}{14}, \frac{11}{6}$

अपरिमेय लेकिन परिमेय संख्या नहीं $\sqrt{2},\ 2+\sqrt{3}$

2. (i) $-\frac{14}{1}$ (ii) $\frac{13}{1}$ (iii) $\frac{0}{1}$ (iv) $\frac{2}{1}$

   (v) $\frac{1}{1}$ (vi) $\frac{-1}{1}$ (vii) $\frac{-25}{1}$

3. $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{21}$

4. (i) 0.1375 (ii) 0.32 (iii) 1.75 (iv) 2.5 (v) 2.8

   (vi) 2.142857 (vii) $-1.\overline{166}$ (viii) $10.\overline{45}$ (ix) $-1.\overline{307692}$ (x) 3.5

5. (i) $\frac{12}{5}$ (ii) $\frac{-8}{25}$ (iii) $\frac{407}{50}$ (iv) $\frac{107}{33}$ (v) $\frac{415}{999}$

6. (i) $\frac{13}{16}$ (ii) -2.5 (iii) शून्य

7. (i) 0.50, 0.25, 0.00 (ii) 0.271, 0.274, 0.277 (iii) 1.325. 1.33, 1.335

8. (i) R: -3.8 (ii) S: -0.5 (iii) O: 0.00 (iv) S: $-0.\overline{33}$ (v) Q: 3.5

   (vi) T: $7.\overline{66}$

9. (i) $-\frac{4}{5}$ (ii) $-\frac{2}{9}$ (iii) $\frac{44}{15}$ (iv) $\frac{37}{15}$ (v) $\frac{59}{42}$

10. (i) $\frac{7}{5}$ (ii) $\frac{38}{15}$ (iii) -6

11. (i) $\sqrt{3}$ (ii) $1+\sqrt{3}$ (iii) $\sqrt{3}$ (iv) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

12. अनंत

13. (i) 0.34 (ii) 3.92 (iii) 3.14 (iv) 3.14

14. (i) 0.75 (ii) 3.414 (iii) 1.733 (iv) 1.000

15. (ii) $6\sqrt{2}$ (iii) 180 (iv) 2