मॉड्यूल 3

ज्यामिति

ज्यामिति, गणित की एक शाखा है, जिसमें विभिन्न प्रकार की आकृतियों तथा उनके गुण–धर्मों का अध्ययन किया जाता है। ज्यामिति का अर्थ है भूमि मापना। अतः इसका प्रारम्भ प्राचीन काल में उस समय हुआ जब मानव ने अपने घर और खेतों की सीमा निर्धारण के लिए भूमि को मापना आरम्भ किया। मिश्र तथा बेबीलोनिया के निवासियों ने रैखिक आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए अनेक सूत्र ज्ञात किए तथा व्यवहार में उनका प्रयोग भी किया।

जैसा कि हड़प्पा तथा मोहनजोदाड़ों की सभ्यताओं से स्पष्ट होता है, भारतीय गणितज्ञों ने भी ज्यामिति के ज्ञान को विकसित करने में एक बहुत बड़ा योगदान दिया। वैदिक काल में प्रयोग किए जाने ''शुल्बसूत्र' तथा एक महान् गणितज्ञ 'बोधायन' का कार्य, जिसमें उसने वह साध्य स्थापित एवं सिद्ध किया जिसे आज पायथागोरस साध्य नाम दिया जाता है, ज्योमिति को भारत के गौरवमय अतीत का उल्लेखनीय देन है।

यूनान के एक गणितज्ञ 'यूक्लिड' ने अपने समय तक (330 ईसा पूर्व) उपलब्ध ज्यामिति के पूर्ण ज्ञान को एकत्रित कर उसे क्रमबद्ध किया तथा उसे विश्लेषण विधि द्वारा एक तर्क संगत विषय का रूप दिया। तब से आजतक इसे एक तर्क आधारित परिपूर्ण विषय बनाने के ही प्रयत्न किए जाते रहे हैं।

ज्यामिति को अपने पूर्ण तर्क संगत रूप में अध्ययन करना, एक बड़ा कठिन कार्य है। अतः हम ज्यामिति को सरल स्पष्ट एवं उपयोगी रूप में ही अध्ययन करेंगे। जिसमें हम अनेक परिभाषाओं को उपयुक्त उदाहरणों द्वारा, आकृतियों के गुणधर्मों की पुष्टि मुख्यतः जांच द्वारा तथा केवल कुछ ही महत्वपूर्ण गुणधर्मों को साध्य के रूप में सिद्ध करेंगे।

ज्यामिति के इस मॉड्यूल में हम रेखाओं, कोणों, त्रिभुजों, चतुर्भुजों तथा वृत्तों का अध्ययन, उनके गुणधर्मों सहित करेंगे।

10

रेखाएँ तथा कोण

अपने डेस्क या मेज की ऊपरी सतह को ध्यान से देखिए। अपनी हथेली को उस पर फिराइए। इससे आपको एक तल का विचार मिलता है। इसके किनारों से एक रेखा का, इसके कोनों से बिंदु का तथा दो किनारों के एक कोने पर मिलने से एक कोण का विचार मिलता है।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप समर्थ हो जाएंगे कि:

- बिंदु, रेखा, तल, कोण, समान्तर रेखाओं तथा प्रतिच्छेदी रेखाओं की धारणा की व्याख्या कर सकें;
- दो या दो से अधिक रेखाओं के साथ तिर्यक रेखा द्वारा बनाए गए कोणों के युग्मों की पहचान कर सकें;
- सत्यापन कर सकें कि यदि कोई किरण किसी रेखा पर खड़ी हो, तो इस प्रकार बने दो कोणों का योग 180° होता है;
- सत्यापन कर सकें कि जब दो रेखाएं प्रतिच्छेद करती हैं, तो शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं;
- सत्यापन कर सकें कि यदि कोई तिर्यक रेखा दो समान्तर रेखाओं को प्रतिच्छेद करती है, तो संगत कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर होता है;
- सत्यापन कर सकें कि यदि कोई तिर्यक रेखा दो समान्तर रेखाओं को प्रतिच्छेद करती है, तो

  (a) एकान्तर कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर होता है;

  (b) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्तः कोण संपूरक होते हैं;
- सिद्ध कर सकें कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है;
- सत्यापन कर सकें कि त्रिभुज का बहिष्कोण अन्तः सम्मुख कोणों के योग के बराबर होता है।

- दैनिक जीवन की परिस्थितियों पर आधारित उदाहरणों द्वारा बिन्दु पथ की धारणा की व्याख्या कर सकें;
- (a) दो दिए गए बिन्दुओं, (b) दो दी गई प्रतिच्छेदी रेखाओं से समदूरस्थ बिंदु का बिंदुपथ ज्ञात कर सकें;
- पाठ्यचर्या में दिए तारांकित परिणामों पर आधारित समस्याओं तथा अतारांकित परिणामों पर आधारित सीधे संख्यात्मक समस्याओं को हल कर सकें।

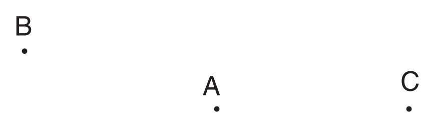
अपेक्षित पूर्वज्ञान

- बिंदु, रेखा, तल, किरण, कोण तथा प्रतिच्छेदी रेखाएँ
- समान्तर रेखाएँ

10.1 बिंदु, रेखा तथा कोण

पिछली कक्षाओं में आप बिंदु, रेखा, तल और कोण के बारे में पढ़ चुके हैं। आइए इनसे संबंधित धारणाओं को जल्दी से दोहराएं:–

बिंदु: यदि हम किसी पेन अथवा पैंसिल की नोक को एक कागज पर दबाकर कोई चिह्न प्राप्त करते हैं तो वह चिह्न एक बिंदु कहलाता है।



आकृति 10.1

एक बिंदु किसी वस्तु की स्थिति को दर्शाता है और अंग्रेजी भाषा के बड़े अक्षर से प्रदर्शित किया जाता है, जैसे A, B, C आदि।

10.1.1 रेखा

दो बिंदु A तथा B अंकित कीजिए। एक फुटे की सहायता से इन्हें मिलाइए तथा दोनों ओर बढ़ाइए। इससे हमें एक सरल रेखा या केवल एक रेखा प्राप्त होती है।

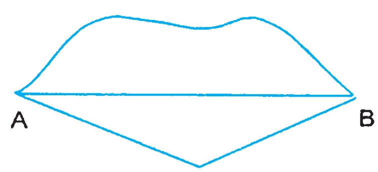
आकृति 10.2

ज्यामिति में रेखा दोनों ओर अनिश्चित रूप से विस्तृत होती है और इसे दर्शाने के लिए हम दोनों ओर तीर के निशान बना देते हैं। एक रेखा को नाम देने के लिए हम उस पर स्थित दो बिंदुओं का प्रयोग करते हैं जैसे AB अथवा अंग्रेजी के एक छोटे अक्षर, जैसे l, m आदि, का भी प्रयोग करते हैं (आकृति 10.3 देखिए)

आकृति 10.3

दो बिन्दुओं A तथा B के बीच रेखा का भाग रेखाखंड कहलाता है। और इसे उन दो बिन्दुओं को प्रयोग करके नाम AB देते हैं।

ध्यान दीजिए एक रेखाखंड ही दो बिन्दुओं A तथा B के बीच का न्यूनतम पथ है। (देखिए आकृति 10.4)



आकृति 10.4

10.1.2 किरण

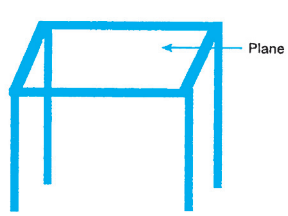
यदि हम एक बिंदु X अंकित करें और इससे आरम्भ कर रेखा खीचें जो एक ही ओर अनिश्चित रूप से विस्तृत हो, तो हमें एक किरण XY प्राप्त होती है।

आकृति 10.5

किरण XY का X प्रारंभिक बिंदु कहलाता है।

10.1.3 तल

यदि हम अपनी हथेली को एक मेज की ऊपरी सतह पर फिराते हैं, तब हमें एक तल का विचार मिलता है।



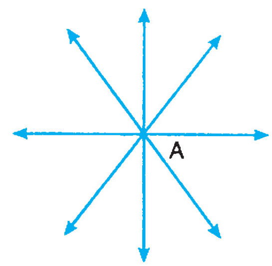
आकृति 10.6

इसी प्रकार, किसी कमरे का फर्श भी तल का एक उदाहरण है।

एक तल लम्बाई और चौड़ाई दोनों के अनुदिश अनिश्चित रूप से विस्तृत होता है।

किसी कागज पर एक बिंदु A अंकित कीजिए।

इस बिंदु से होकर जाती हुई कागज पर कितनी रेखाएं खींची जा सकती हैं? हम जितनी चाहें उतनी रेखाएं खींच सकते हैं।



आकृति 10.7

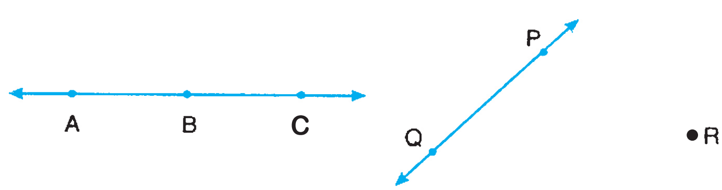
वास्तव में हम किसी एक बिंदु से होकर जाती हुई अनन्त रेखाएं खींच सकते हैं।

A से कुछ दूरी पर एक अन्य बिंदु B अंकित कीजिए। बिंदु B से होकर भी हम अनन्त रेखाएं खींच सकते हैं।

आकृति 10.8

इन रेखाओं में कितनी रेखाएं A और B दोनों बिन्दुओं से होकर जाती हैं? इन अनंत रेखाओं में केवल एक ही रेखा ऐसी होगी, जो दोनों बिन्दुओं A तथा B से होकर जाती है। इस प्रकार केवल एक ही रेखा दोनों बिन्दुओं A तथा B से होकर जाती है। हम निष्कर्ष निकालते हैं कि **एक तल में दिए गए दो बिंन्दुओं से केवल एक ही रेखा होकर जा सकती है।**

आइए अब एक तल में तीन बिंदु लें।



आकृति 10.9

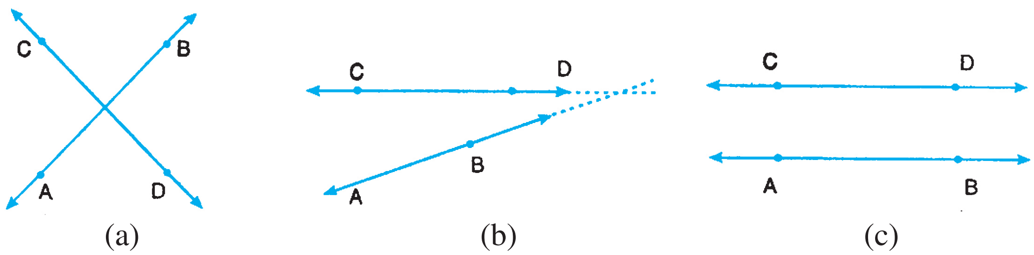
हम देखते हैं कि तीन बिंदुओं से होकर जाती हुई एक रेखा कभी खींची जा सकती है परंतु कभी नहीं।

यदि तीन या अधिक बिंदुओं से होकर जाती हुई एक रेखा खींची जा सकती है तब वे बिंदु **संरेखीय बिंदु** कहलाते हैं। उदाहरण के लिए आकृति 10.9 में किंदु A, B तथा C संरेखीय हैं।

यदि तीन (या अधिक) बिंदुआं से होकर जाती हुई एक रेखा न खींची जा सके तब वे बिंदु **असंरेखीय बिंदु** कहलाते हैं। उदाहरण के लिए आकृति 10.9 में बिंदु P, Q तथा R असंरेखीय बिंदु हैं।

क्योकि दो बिंदुओं से सदैव ही एक रेखा खींची जा सकती है अतः हम तीन या अधिक बिंदुओं के संरेख होने की ही बात करते हैं।

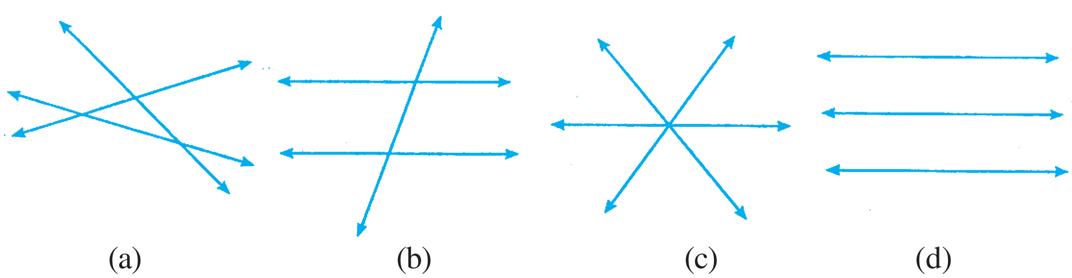
अब हम एक तल में दो विभिन्न रेखाएं AB तथा CD लेते हैं।



आकृति 10.10

ऐसी दो रेखाओं में कितने उभयनिष्ठ बिंदु हैं? हम देखते हैं कि ऐसी दो रेखाओं में (i) या तो एक बिंदु उभयनिष्ठ होगा, जैसे आकृति 10.10 (a) तथा (b). [ऐसी स्थिति में ये प्रतिच्छेदी रेखाएं कहलाती हैं] अथवा (ii) कोई भी बिंदु उभयनिष्ठ नहीं होगा, जैसे आकृति 10.10 (c)। ऐसी स्थिति में ये समांतर रेखाएं कहलाती हैं। इन्हें हम AB||CD लिखते हैं।

अब आइए एक ही तल में खींची गई तीन (या अधिक) रेखाओं पर ध्यान दें–



आकृति 10.11

यहाँ क्या संभावनाएं हो सकती हैं?

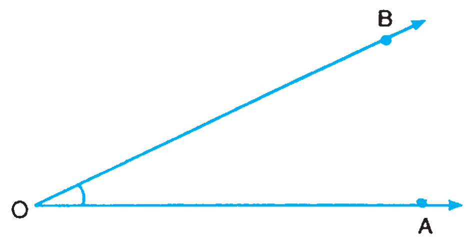
(i) ये एक दूसरे को एक से अधिक बिंदुओं पर प्रतिच्छेद कर सकती है, जैसे आकृति 10.11 (a) तथा 10.11 (b) में। अथवा

(ii) ये एक दूसरे को केवल एक ही बिंदु पर प्रतिच्छेद करें, जैसे आकृति 10.11 (c) में। ऐसी स्थिति में ये संगामी रेखाएं कहलाती हैं। अथवा

(iii) ये एक दूसरे को प्रतिच्छेद न करें, अर्थात समांतर हों जैसे आकृति 10.11 |(d) में।

10.1.4 कोण

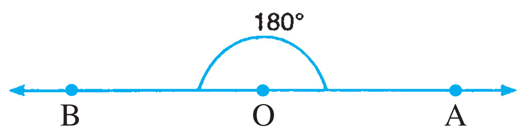
एक बिंदु O अंकित कीजिए और उससे आरंभ कर दो किरणें OA तथा OB खींचिए। इस प्रकार जो आकृति प्राप्त होती है उसे **कोण** कहते हैं। अतः, कोण एक ऐसी आकृति है जो एक ही बिंदु से आरंभ होने वाली दो किरणों से बनती है।



आकृति 10.11(a)

यह कोण AOB अथवा BOA कहलाता है या केवल कोण O; तथा इसे $\angle AOB$ या $\angle BOA$ या $\angle O$ के रूप में लिखते हैं। [आकृति 10.11(a) देखें]

कोण की माप अंशों में की जाती है। यदि हम एक बिंदु O लें और इससे आरंभ कर दो किरणें विपरीत दिशाओं में खींचें तो इस प्रकार बने कोण की माप 180 अंश ली जाती है जिसे 180° लिखते हैं।

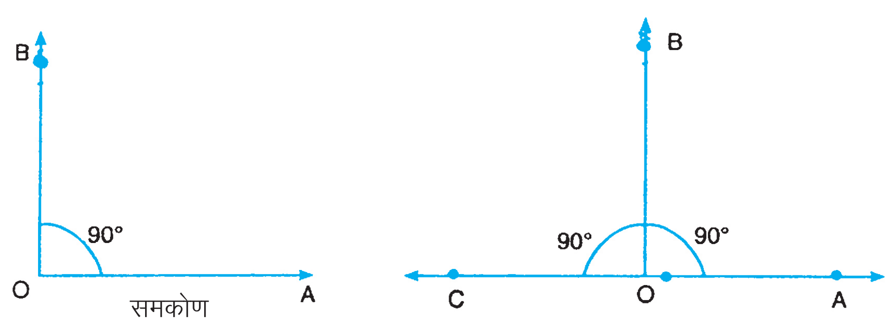


आकृति 10.12

इस कोण को यदि 180 बराबर भागों में बांटा जाए, तो एक भाग की माप एक अंश अथवा 1° होगी।

एक ही बिंदु से आरंभ होने वाली दो विपरीत किरणों से बने इस कोण को **सरल कोण** या ऋजु कोण कहते हैं।

90^0 के कोण को समकोण कहते हैं। उदाहरण के लिए, आकृति 10.13 में, $\angle BOA$ तथा $\angle BOC$ समकोण हैं।

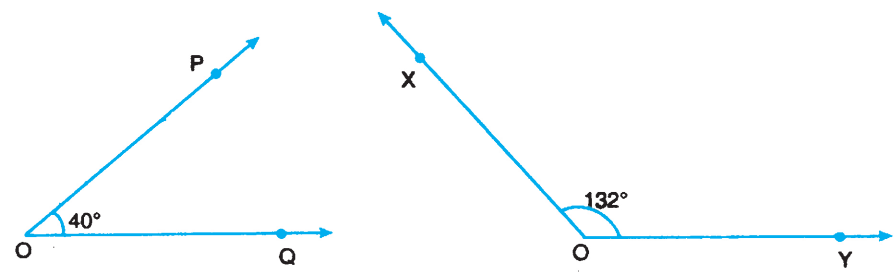


आकृति 10.13

दो रेखाएं अथवा दो किरणें जो एक दूसरे के साथ समकोण बनाती हैं, वे एक दूसरे पर लंब होती हैं। आकृति 10.13 में हम कह सकते हैं कि OA लंब है OB पर अथवा OB लंब है OA पर। सांकेतिक रूप से इसे $OA \perp OB$ या $OB \perp OA$ लिखते हैं।

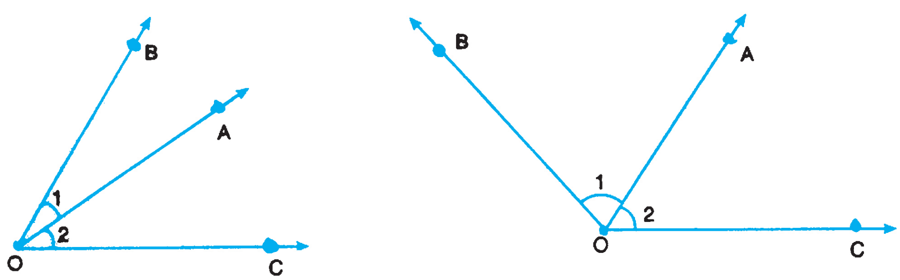
90° से कम और 0° से अधिक कोई भी कोण एक **न्यून कोण** कहलाता है। उदाहरण के लिए आकृति 10.14(a) में $\angle POQ$ एक न्यून कोण है।

90° से अधिक परंतु 180° से कम कोई भी कोण एक **अधिक कोण** कहलाता है। उदाहरण के लिए, आकृति 10.14(b) में, $\angle XOY$ एक अधिक कोण है।



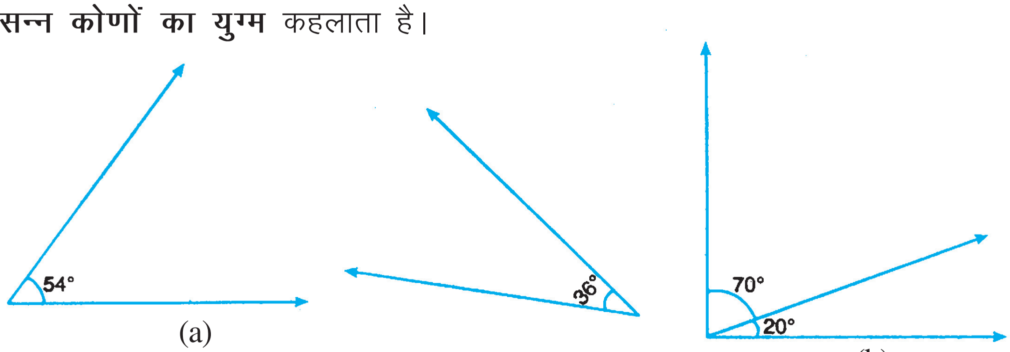
आकृति 10.14

10.2 कोणों के युग्म



आकृति 10.15

आकृति 10.15 में दिखाए गए $\angle 1$ तथा $\angle 2$ के युग्मों को देखिए। प्रत्येक युग्म में एक उभयनिष्ठ शीर्ष O है तथा OA तथा OB एवं OC के बीच एक उभयनिष्ठ भुजा OA है। कोणों का ऐसा युग्म **आसन्न कोणों का युग्म** कहलाता है।

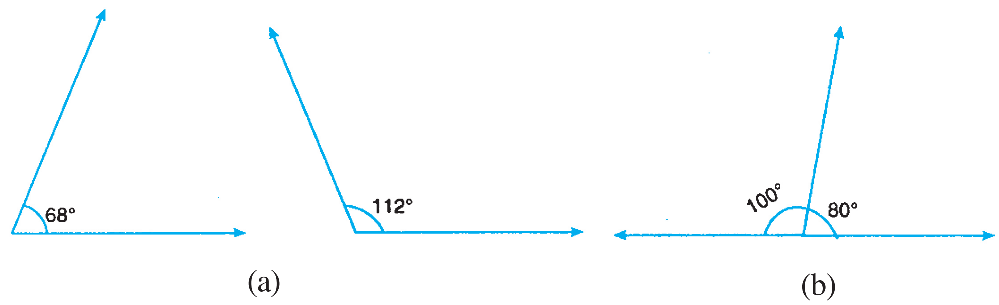


(a) (b)

आकृति 10.16

आकृति 10.16[(a) तथा (b)] में कोणों के प्रत्येक युग्म को ध्यान से देखिए। प्रत्येक युग्म में कोणो को योग करने पर योगफल 90° है।

कोणों का एक ऐसा युग्म जिसका योगफल 90° हो, **पूरक कोण** का युग्म कहलाता है। प्रत्येक कोण दूसरे का **पूरक** कहलाता है।



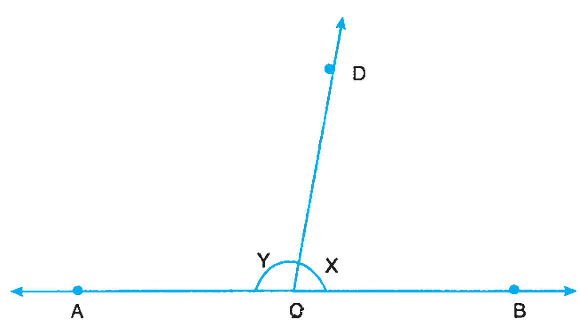
आकृति 10.17

आकृति 10.17[(a) तथा (b)] में बने कोणों के प्रत्येक युग्म पर ध्यान दीजिए। प्रत्येक युग्म में कोणों का योगफल 180° है।

कोणों का एक ऐसा युग्म जिसका योगफल 180° हो, संपूरक कोणों का युग्म कहलाता है।

ऐसा प्रत्येक कोण दूसरे का संपूरक कहलाता है।

अब रेखा AB खींचिए। इस पर कोई बिंदु C लेकर एक किरण CD, $\angle X$ तथा $\angle Y$ बनाती हुई खींचिए।



आकृति 10.18

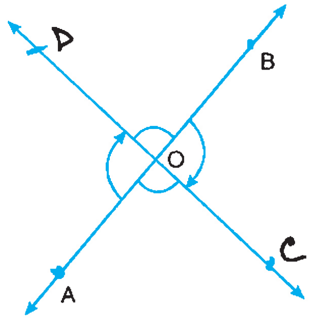
यदि हम $\angle X$ तथा $\angle Y$ को माप पर उनको जोड़े, तो प्राप्त योग सदैव 180° होता है, चाहे किरण CD की कोई स्थिति हो अथवा कोई दिशा हो। इस प्रकार हम निष्कर्ष निकालते हैं कि:

यदि कोई किरण किसी रेखा पर खड़ी हो, तो इस प्रकार बने आसन्न कोणों का योग 180° होता है।

आकृति 10.18 में बने इस प्रकार के कोणों के युग्म को **रैखिक युग्म** कहते हैं।

ध्यान दीजिए कि यह संपूरक कोणों का युग्म भी है।

दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ AB तथा CD एक दूसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हुई खींचिए।



आकृति 10.19

$\angle AOC$ तथा $\angle DOB$ एक दूसरे के सम्मुख है। ये **शीर्षाभिमुख कोणों** का एक युग्म बनाते हैं। इन्हें मापिए। आप सैदव पाएंगे कि

$$\angle AOC = \angle DOB$$

$\angle AOD$ तथा $\angle BOC$ शीर्षाभिमुख कोणों का एक अन्य युग्म है। इनको मापने पर भी हम पाते हैं:

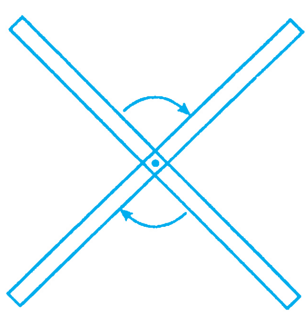
$$\angle AOD = \angle BOC$$

इस प्रकार हम निष्कर्ष निकालते हैं:

यदि दो रेखाएं एक दूसरे को प्रतिच्छेद करती हैं तो इस प्रकार बने शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं।

आपके लिए क्रियाकलाप

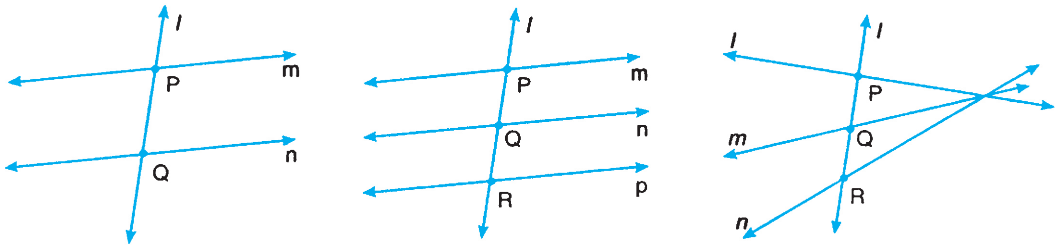
दो पट्टियों को एक कील द्वारा एक दूसरे के साथ आकृति के अनुसार जोड़िए।



आकृति 10.20

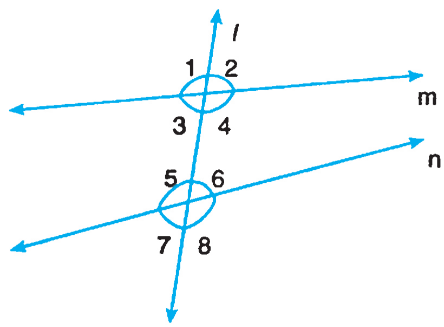
अब एक पट्टी स्थिर कर, दूसरी पट्टी को घुमाना आरंभ कीजिए। आप देखेंगे कि इस प्रकार बने शीर्षाभिमुख कोणों के युग्म सदैव बराबर हैं।

दो या दो से अधिक रेखाओं को भिन्न–भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा **तिर्यक रेखा** कहलाती है। उदाहरण के लिए रेखा l आकृति 10.21 मे तिर्यक रेखा है।



आकृति 10.21

जब एक तिर्यक रेखा दो अन्य रेखाओं को प्रतिच्छेद करती है तब आठ कोण बनते हैं। (आकृति 10.22)



आकृति 10.22

ये सभी कोण युग्म समान्तर रेखाओं के गुणों के अध्ययन में बड़े उपयोगी हैं। कुछ उपयोगी युग्म निम्न प्रकार से हैं:

(a) $\angle 1$ और $\angle 5$ संगत कोणों का एक युग्म है। $\angle 2$ तथा $\angle 6$, $\angle 3$ तथा $\angle 7$ एवं $\angle 4$ तथा $\angle 8$ संगत कोणों के अन्य युग्म हैं

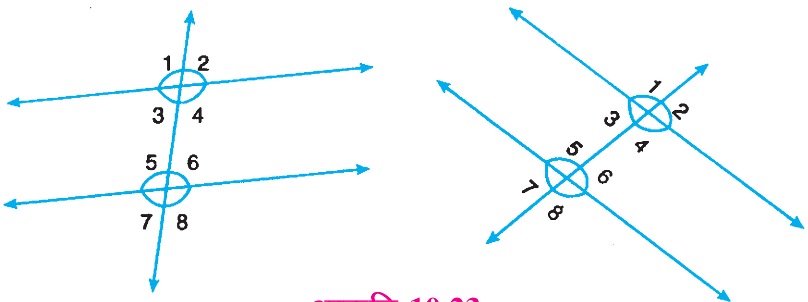
(b) $\angle 3$ तथा $\angle 6$ एकान्तर कोणों का एक युग्म है। $\angle 4$ तथा $\angle 5$ एकान्तर कोणों का अन्य युग्म है।

(c) $\angle 3$ तथा $\angle 5$ अन्तः कोणों का एक युग्म है, जो कि रेखा के एक ही ओर बनते हैं।

$\angle 4$ तथा $\angle 6$ ऐसे अन्तः कोणों का अन्य युग्म है।

उपर्युक्त आकृति 10.22 में रेखाएं m तथा n समान्तर नहीं हैं। अतः ऊपर चर्चित कोणों के इन युग्म में कोई संबंध प्रतीत नहीं होता। तथापि दो रेखाएं यदि समांतर हो जाएं तब इन युग्मों में अनेक उपयोगी संबंध प्राप्त होते हैं जिसका अध्ययन हम नीचे करेंगे।

जब एक तिर्यक रेखा दो समान्तर रेखाओं, चाहे वे किसी भी स्थिति में हों, प्रतिच्छेद करती हैं तब भी ऊपर की ही भांति आठ कोण बनते हैं।



आकृति 10.23

यदि हम कोणों को मापते हैं, तो हम सदैव देखते हैं कि

$$\angle 1 = \angle 5, \quad \angle 2 = \angle 6, \quad \angle 3 = \angle 7 \text{ तथा } \angle 4 = \angle 8$$

अर्थात् संगत कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर है।

तथा $\angle 3 = \angle 6$ तथा $\angle 4 = \angle 5$

अर्थात् एकांतर कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर है।

तथा, $\angle 3 + \angle 5 = 180^\circ$ तथा $\angle 4 + \angle 6 = 180^\circ$.

अर्थात तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्तः कोणों के युग्म में कोणों का योग 180^0 होता है।

अतः हम निष्कर्ष निकालते हैं कि

जब एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करती है तो

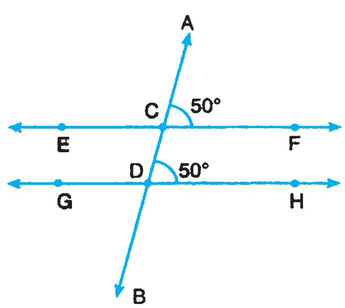
(i) संगत कोणों के प्रत्येक युग्म में कोण समान होते हैं।

(ii) एकान्तर कोणों के प्रत्येक युग्म में कोण समान होते हैं।

(iii) तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अन्तः कोण एक दूसरे के संपूरक होते हैं।

एक फुटे (रूलर या पटरी) के दोनों समान्तर किनारों की सहायता से दो समांतर रेखाएं तथा उनकी एक तिर्यक रेखा खींचकर इस प्रकार बने प्रत्येक कोणों के युग्म को मापकर उक्त तथ्यों की जांच भी कर सकते हैं।

इन परिणामों के विलोम भी सदैव सत्य हैं। पहले परिणाम के विलोम की सत्यता जांचने के लिए हम एक रेखा AB खींचकर, उस पर दो बिंदु C तथा D लेते हैं।



आकृति 10.24

इन बिन्दुओं C तथा D पर समान कोणों, मान लीजिए 50^0, ∠ACF तथा ∠CDH की रचना करते हैं, जैसा चित्र 10.24 में दिखाया गया है। रेखाएं EF तथा GH को दोनों ओर बढ़ाने पर हम देखते हैं कि ये रेखाएं एक दूसरे को प्रतिच्छेद नहीं करती, अर्थात् ये समांतर हैं।

इसी प्रकार आकृतियां खींचकर हम अन्य दो तथ्यों के विलोमों की सत्यता की भी जांचकर सकते हैं।

अतः हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि –

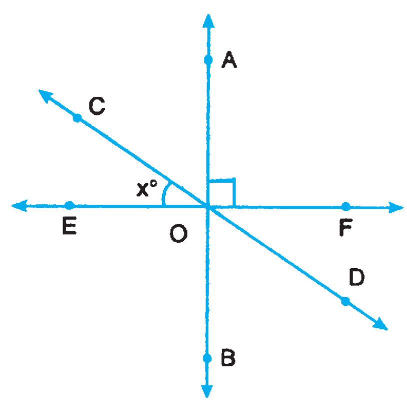
जब एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस तरह से प्रतिच्छेद करती है कि

(i) संगत कोणों का कोई एक युग्म समान है।

अथवा (ii) एकान्तर कोणों का कोई एक युग्म समान है

अथवा (iii) तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अन्तः कोण संपूरक हों, तो ये दो रेखाएं समान्तर होती हैं।

उदाहरण 10.1 : निम्नलिखित बहुविकल्पी प्रश्नों में दिए गए विकल्पों में से सही उत्तर चुन कर लिखिए।



आकृति 10.25

(i) आकृति 10.25 में, ∠FOD तथा ∠BOD

(A) संपूरक कोण है। (B) पूरक कोण हैं।

(C) शीर्षाभिमुख कोण हैं। (D) रैखिक युग्म हैं। उत्तर (B)

(ii) आकृति 10.25 में, ∠COE तथा ∠BOE

(A) पूरक कोण हैं। (B) संपूरक कोण हैं।

(C) रैखिक के कोण हैं। (D) आसन्न कोण हैं। उत्तर (D)

(iii) आकृति 10.25 में, ∠BOD की माप है

(A) x^{o} (B) $(90 + x)^{o}$

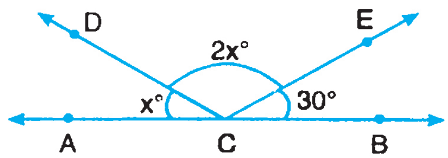
(C) $(90 - x)^{o}$ (D) $(180 - x)^{o}$ उत्तर (C)

(iv) एक कोण अपने संपूरक कोण का 4 गुना है। वह कोण है

(A) 39^{o} (B) 72^{o}

(C) 108^{o} (D) 144^{o} उत्तर (D)

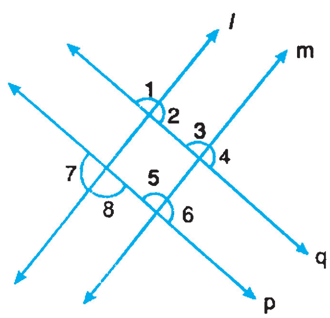
(v) आकृति 10.26 में, x का मान क्या है जबकि ACB एक सरल रेखा है



आकृति 10.26

(A) 30^{o} (B) 40^{o}

(C) 50^{o} (D) 60^{o} उत्तर (C)



आकृति 10.27

(vi) ऊपर आकृति 10.27 में, l समांतर हैं m के तथा p समांतर q के। तब $\angle 3$ तथा $\angle 5$ हैं

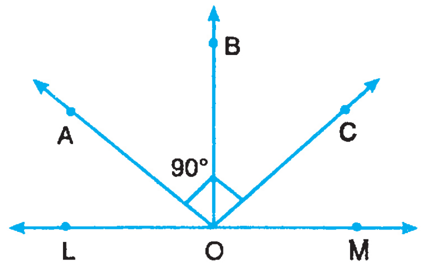
(A) एकांतर कोणों के युग्म (B) अन्तः कोणों का युग्म

(C) शीर्षाभिमुख कोणों का युग्म (D) संगत कोणों का युग्म उत्तर (D)

(vii) आकृति 10.27 में, यदि $\angle 1 = 80^{o}$ है, तो $\angle 6$ का मान है

(A) 80^{o} (B) 90^{o}

(C) 100^{o} (D) 110^{o} उत्तर (C)



आकृति 10.28

(viii) आकृति 10.28 में, OA कोण $\angle LOB$ का समद्विभाजक है तथा OC, $\angle MOB$ का समद्विभाजक है तथा $\angle AOC = 90^\circ$ है। दर्शाइए कि बिंदु L, O तथा M संरेखीय हैं।

हल: $\angle BOL = 2\ \angle BOA$ ...(i)

तथा $\angle BOM = 2\ \angle BOC$ ...(ii)

(i) तथा (ii) का योग करने पर $\angle BOL + \angle BOM = 2\ \angle BOA + 2\angle BOC$

$\therefore\ \angle LOM = 2[\angle BOA + \angle BOC]$

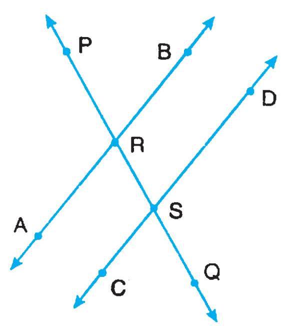
$= 2 \times 90^\circ$

$= 180^\circ$ = सरल कोण

$\therefore$ L, O तथा M संरेखीय बिंदु हैं।

देखें आपने कितना सीखा 10.1

1. निम्न बहु विकल्पीय प्रश्नों में दिए गए विकल्पों में से सही उत्तर चुनकर लिखिए:–



आकृति 10.29

आकृति 10.29 में, AB ∥ CD तथा PQ उन्हें क्रमशः R तथा S बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है–

(i) $\angle ARS$ तथा $\angle BRS$ हैं

(A) एकान्तर कोणों का एक युग्म

(B) एक रैखिक युग्म

(C) संगत कोणों का एक युग्म

(D) शीर्षाभिमुख कोणों का एक युग्म

(ii) $\angle$ARS तथा $\angle$RSD है

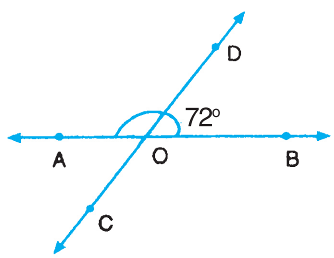
(A) एकान्तर कोण (B) शीर्षाभिमुख कोण

(C) संगत कोण (D) अंतः कोण

(iii) यदि $\angle PRB = 60^\circ$ हो, तब $\angle$QSC है

(A) 120° (B) 60°

(C) 30° (D) 90°

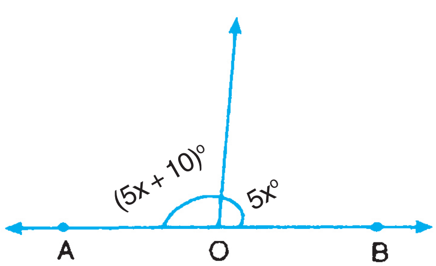


आकृति 10.30

(iv) ऊपर आकृति 10.30 में, AB तथा CD एक दूसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती है। $\angle$COB बराबर है

(A) 36° (B) 72°

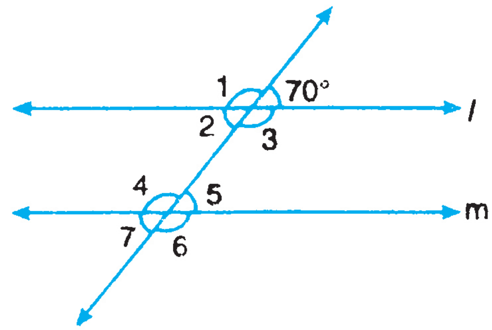
(C) 108° (D) 144°



आकृति 10.31

2. आकृति 10.31 में, AB एक सरल रेखा है। x का मान ज्ञात कीजिए।

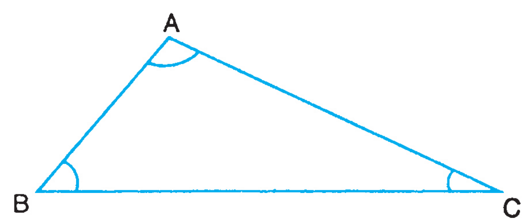
3. निम्न आकृति 10.32 में, l तथा m समांतर रेखाएं हैं। कोण 1 से 7 तक सभी के मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.32

10.3 त्रिभुज, इसके प्रकार तथा गुण

किसी तल में तीन रेखाखण्डों द्वारा बनाई गई बंद आकृतियों में सबसे सरल आकृति त्रिभुज है।



आकृति 10.33

यह तीन रेखाखंण्डों से बनी एक आकृति है, जिसके छः अवयव हैं, तीन भुजाएं तथा तीन कोण।

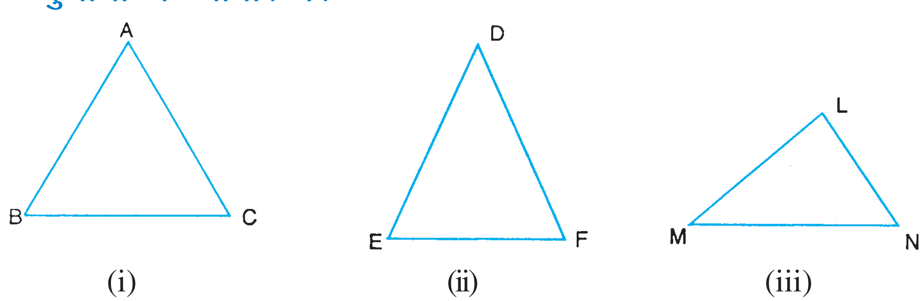
तीन कोण हैं: (i) $\angle ABC$ या $\angle B$ (ii) $\angle ACB$ या $\angle C$ (iii) $\angle CAB$ या $\angle A$ और तीन भुजाएं हैं: (iv) AB (v) BC (vi) CA

इस त्रिभुज का नाम लिखेंगे Δ ABC या Δ BAC या Δ CBA तथा पढ़ेंगे त्रिभुज ABC या त्रिभुज BAC या त्रिभुज CBA.

10.3.1 त्रिभुज के प्रकार

त्रिभुजों का वर्गीकरण हम दो आधारों पर कर सकते हैं।

(a) भुजाओं के आधार पर



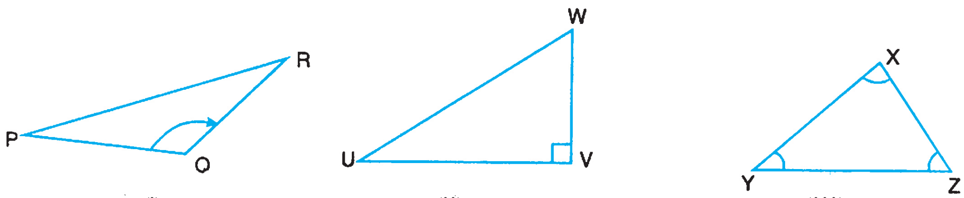
आकृति 10.34

(i) **समबाहु त्रिभुज :** एक त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएं बराबर हों, समबाहु त्रिभुज कहलाता है। [Δ ABC आकृति 10.34(i)]

(ii) **समद्विबाहु त्रिभुज :** एक त्रिभुज जिसकी दो भुजाएं बराबर हों, समद्विबाहु त्रिभुज कहलाता है। [ΔDEF आकृति 10.34(ii)]

(iii) **विषमबाहु त्रिभुज :** एक त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएं भिन्न माप की हों, विषमबाहु त्रिभुज कहलाता है। [Δ LMN आकृति 10.34(iii)]

(b) **कोणों के आधार पर :**



(i) (ii) (iii)

आकृति 10.35

(i) **अधिक कोण त्रिभुज:** एक त्रिभुज, जिसमें एक कोण अधिक कोण हो, अधिक कोण त्रिभुज कहलाता है। [आकृति 10.35(i) में Δ PQR]

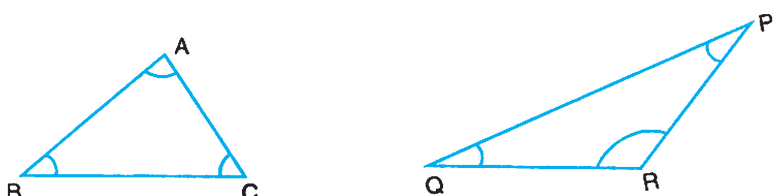
(ii) **समकोण त्रिभुज:** एक त्रिभुज, जिसमें एक कोण समकोण हो, समकोण त्रिभुज कहलाता है। [आकृति 10.35(ii) में Δ UVW]

(iii) **न्यून कोण त्रिभुज:** एक त्रिभुज, जिसमें तीनों कोण न्यूनकोण हों, न्यून कोण त्रिभुज कहलाता है। [आकृति 10.35(iii) में Δ XYZ]

अब हम त्रिभुज के कोणो से संबंधित गुणधर्मो का अध्ययन करेंगे।

10.3.2 त्रिभुज के कोणों का योग

हम दो त्रिभुज खींचते हैं और उनके कोणों को मापते हैं।



(a) (b)

आकृति 10.36

आकृति 10.36 (a) में, $\angle A = 80^o$, $\angle B = 40^o$ तथा $\angle C = 60^o$

$\therefore \quad \angle A + \angle B + \angle C = 80^o + 40^o + 60^o = 180^o$

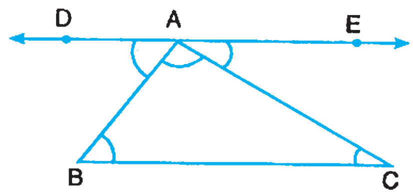
आकृति 10.36(b), $\angle P = 30^o$, $\angle Q = 40^o$ तथा $\angle R = 110^o$

$\therefore \quad \angle P + \angle Q + \angle R = 30^\circ + 40^\circ + 110^\circ = 180^\circ$

आप क्या देखते हैं? दोनों ही स्थितियों में त्रिभुज के कोणों का योग 180^0 है।

हम इस निष्कर्ष को तर्क द्वारा भी एक प्रमेय के रूप में सिद्ध करेंगे।

प्रमेय: त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।



आकृति 10.37

दिया है : त्रिभुज ABC

सिद्ध करना है: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

रचना: शीर्ष A से होकर एक रेखा DE, भुजा BC के समांतर खींचिए।

उपपत्ति: DE समांतर है BC के तथा AB उनकी एक तिर्यक रेखा है।

$\therefore \quad \angle B = \angle DAB$ (एकांतर कोणों का युग्म)

इसी प्रकार $\angle C = \angle EAC$ (एकांतर कोणों का युग्म)

$\therefore \angle B + \angle C = \angle DAB + \angle EAC$ ...(1)

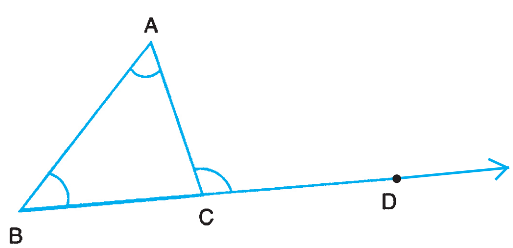
अब (1) के दोनों पक्षो में $\angle A$ जोड़ने पर,

$\angle A + \angle B + \angle C = \angle A + \angle DAB + \angle EAC$

$= 180^\circ$ (सरल रेखा के कोण)

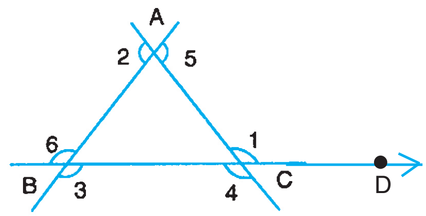
10.3.3 त्रिभुज के बहिष्कोण

ΔABC की भुजा BC को हम किसी बिन्दु D तक बढ़ाते हैं।



आकृति 10.38

आकृति 10.38 में इस प्रकार बना कोण ACD, त्रिभुज का एक **बाह्य कोण** कहलाता है।



आकृति 10.39

आकृति 10.39 में देखिए। ΔABC के छः बहिष्कोण हैं, जिनके नाम हैं $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5$ तथा $\angle 6$

किसी त्रिभुज की एक भुजा और दूसरी बढ़ाई गई भुजा के बीच बना कोण त्रिभुज का बहिष्कोण कहलाता है।

किसी त्रिभुज के एक बहिष्कोण के लिए दो अंतः सम्मुख कोण होते हैं।

अंतः सम्मुख कोण त्रिभुज के वे अंतः कोण होते हैं जो त्रिभुज के बहिष्कोण के साथ रैखिक युग्म नहीं बनाते।

उदाहरण के लिए आकृति 10.38 में, ΔABC के बहिष्कोण ACD के लिए त्रिभुज के अंतः कोण $\angle A$ तथा $\angle B$ अंतः सम्मुख कोण हैं। अब हम इन कोणों को मापते हैं

$$\angle A = 60^{o}$$

$$\angle B = 50^{o}$$

तथा $\angle ACD = 110^{o}$

हम पाते हैं कि $\angle ACD = \angle A + \angle B$

व्यापक रूप में यह परिणाम सदैव सत्य है।

इस प्रकार हम निष्कर्ष निकालते हैं:

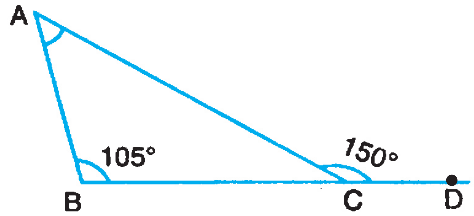
किसी त्रिभुज का बहिष्कोण अपने अंतः सम्मुख कोणों के योग के बराबर होता है।

उदाहरण 10.3 : निम्नलिखित बहु विकल्पी प्रश्नों के दिये गये विकल्पों में से सही उत्तर चुनकर लिखिए।

(i) निम्नलिखित में से कौन से कोण त्रिभुज के अंतः कोण हो सकते हैं?

(A) $65^{o}, 45^{o}$ तथा 80^{o} (B) $90^{o}, 30^{o}$ तथा 61^{o}

(C) $60^{o}, 60^{o}$ तथा 59^{o} (D) $60^{o}, 60^{o}$ तथा 60^{o}. उत्तर (D)



आकृति 10.40

(ii) आकृति 10.40 में, $\angle A$ का मान है

(A) 30^o (B) 35^o

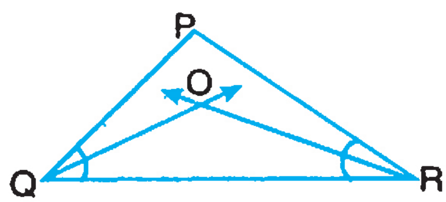
(C) 45^o (D) 75^o उत्तर (C)

(iii) किसी त्रिभुज का एक कोण दूसरे कोण का दुगुना है। तथा तीसरा कोण 60^0 है। तब सबसे बड़ा कोण है:

(A) 60^o (B) 80^o

(C) 100^o (D) 120^o उत्तर (B)

उदाहरण 10.4:



आकृति 10.41

दी हुई आकृति 10.41 में, $\angle PQR$ तथा $\angle PRQ$ के समद्विभाजक बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle QOR = 90^o + \frac{1}{2}\angle P.$

हल : $\angle QOR = 180^o - \frac{1}{2}[\angle PQR + \angle PRQ)]$

$$= 180^o - \frac{1}{2}(180^o + \angle P)$$

$$= 180^o - 90^o + \frac{1}{2}\angle P = 90^o + \frac{1}{2}\angle P$$

देखे आपने कितना सीखा 10.2

1. निम्नलिखित बहु विकल्पीय प्रश्नो के लिये दिये गए विकल्पों में से सही उत्तर चुनकर लिखिए:

   (i) एक त्रिभुज में हो सकते हैं:

   (A) दो समकोण (B) दो अधिक कोण

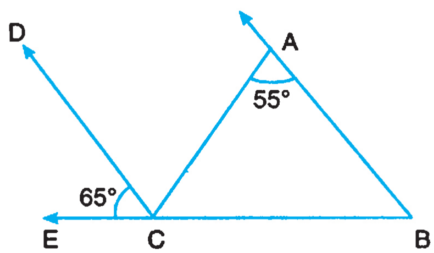
   (C) अधिक से अधिक दो न्यून कोण (D) तीन न्यून कोण

   (ii) किसी समकोण त्रिभुज में एक बाह्य कोण 120° है। उसके छोटे कोण की माप होगी

   (A) 20° (B) 30°

   (C) 40° (D) 60°

   (iii)



आकृति 10.42

   आकृति 10.42 में, यदि CD तथा BA समांतर हों, तो $\angle ACB$ का मान होगा

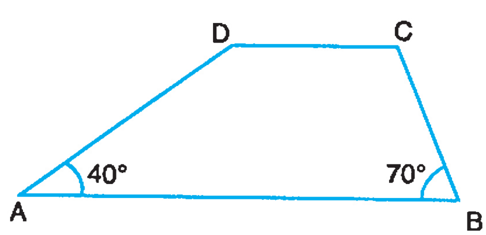
   (A) 55° (B) 60°

   (C) 65° (D) 70°

2. एक त्रिभुज के कोणों का अनुपात 2 : 3 : 5 है। त्रिभुज के तीनों कोण ज्ञात कीजिए।

3. सिद्ध कीजिए कि चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360° होता है।

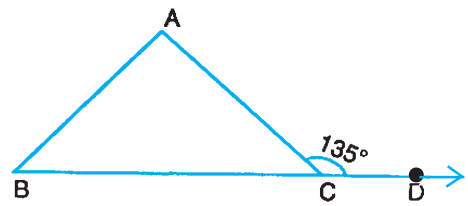
4. आकृति 10.43 में, ABCD एक समलंब है जिसमें AB||DC है। $\angle D$ तथा $\angle C$ ज्ञात कीजिए, और पुष्टि कीजिये कि इसके चारों कोणों का योग 360° है।



आकृति 10.43

5. यदि किसी त्रिभुज का एक कोण शेष दोनों कोणों के योग के बराबर हो, तो सिद्ध कीजिए कि वह एक समकोण त्रिभुज है।

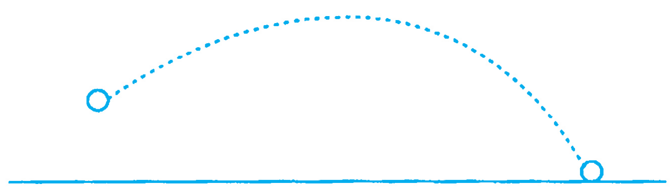
6. आकृति 10.44 में, ABC एक त्रिभुज है तथा $\angle ABC = \angle ACB$ है। त्रिभुज के कोण ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.44

10.4 बिंदुपथ

क्रिकेट के खेल में गेंद जब बल्ले से उछल कर जाती है तब वह लपके जाने या भूमि को छूने से पहले एक पथ बनाती हुई जाती है।

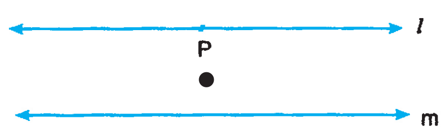


आकृति 10.44

इस प्रकार बनाये गये पथ को बिंदु पथ कहते हैं।

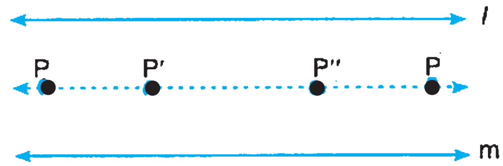
ज्यामिति में कोई भी आकृति एक बिन्दु (या किसी कण) द्वारा किसी नियमानुसार बनाये गए पथ का परिणाम होती है। उदाहरण के लिये

(1) दो समांतर रेखायें l तथा m तथा एक बिन्दु P जो दोनों रेखाओं से समान दूरी पर स्थित रहता है।



आकृति 10.45

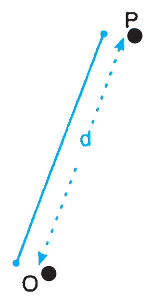
यदि बिन्दु P दोनों रेखाओं से समान दूरी पर रहते हुये चलता है तो इसके द्वारा बनाया गया पथ क्या होगा?



आकृति 10.46

बिंदु P द्वारा तय किया पथ, दोनों रेखाओं के मध्य तथा उनके समान्तर एक सरल रेखा होगी, जैसा आकृति 10.46 में दिखाया गया है।

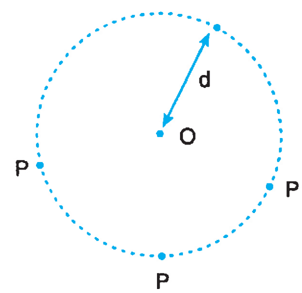
(2) O एक स्थिर बिंदु है और P एक अन्य बिंदु है जो बिंदु O से निश्चित दूरी d पर है आकृति 10.47।



आकृति 10.47

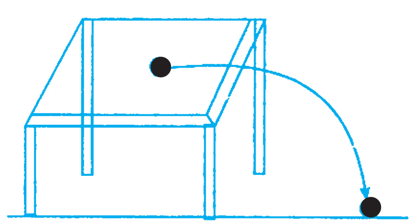
यदि बिंदु P तल में इस प्रकार चलता है कि उसकी O से दूरी निश्चित दूरी d के सदैव बराबर ही रहती है तब उसका पथ क्या होगा?

बिंदु P द्वारा तय किया गया पथ एक वृत होगा जैसा आकृति 10.48 में दिखाया गया है।



आकृति 10.48

(3) चाक का एक छोटा सा टुकड़ा या एक कंचा मेज के ऊपर रखिए। अब इसे किसी छड़ी या पेंसिल से टक्कर दीजिए जिससे यह एक निश्चित गति से मेज से नीचे गिरे। मेज छोड़ने के बाद इसके पथ को ध्यान से देखिए।



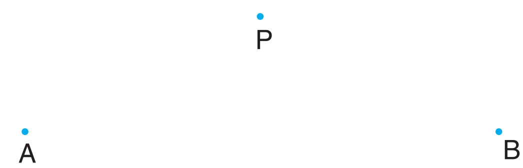
आकृति 10.49

कंचे या चाक द्वारा तय किया पथ, एक वक्र है (जो परवलय का एक भाग है) जैसा आकृति 10.49 में दिखाया गया है।

दी हुई शर्तों या नियमों का अनुसरण कर चलते हुए बिंदु का पथ इस प्रकार बनी ज्यामितीय आकृति ही बिंदु पथ है जिस पर स्थित प्रत्येक बिंदु दी हुई शर्तों को संतुष्ट करता है।

10.4.1 दो दिए गए बिंदुओं से समदूरस्थ बिंदु का बिंदुपथ

मानते हैं कि दो दिए हुए बिंदु A तथा B हैं।



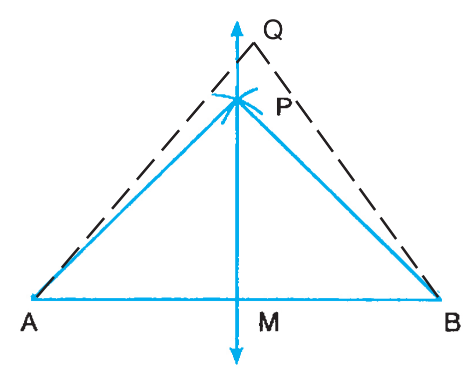
आकृति 10.50

हमें एक बिंदु P का बिंदुपथ ज्ञात करना है ताकि $PA = PB$ हो।

A तथा B को मिलाते हैं। रेखाखंड AB का मध्यबिंदु M अंकित करते हैं। निश्चय ही M, A तथा B से समदूरस्थ है। अब परकार द्वारा एक अन्य बिंदु P अंकित करते हैं ताकि $PA = PB$ हो। PM को मिलाकर दोनों ओर बढ़ाते हैं। अब विभाजक या रूलर की सहायता से पुष्टि कर सकते हैं कि PM का प्रत्येक बिंदु A तथ B से समान दूरी पर स्थित है और यदि कोई बिंदु Q लेते हैं जो रेखा PM पर स्थित नहीं है तो $QA \neq QB$ है।

साथ ही $\angle AMP = \angle BMP = 90^\circ$ है।

अर्थात् PM रेखाखंड AB का लम्ब समद्विभाजक है।



आकृति 10.51

इस प्रकार हम निष्कर्ष निकालते हैं कि

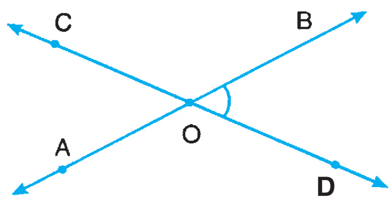
दो दिए गए बिंदुओं से समदूरस्थ बिंदु का बिंदुपथ उन बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड का लंब समद्विभाजक होता है।

आपके लिए क्रियाकलाप

एक कागज पर दो बिंदु A तथा B अंकित कर मिलाइए। कागज को AB के मध्य से इस प्रकार मोड़ कर तह करो कि बिंदु A बिंदु B पर आच्छादित हो। मोड़ की तह पर एक रेखा प्राप्त कीजिए। यही A तथा B से समान दूरी पर है।

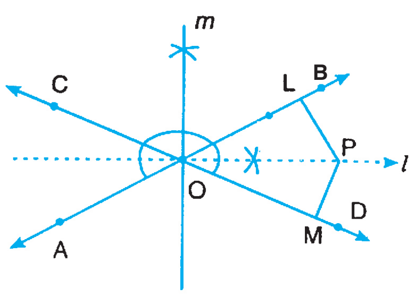
10.4.2 दो रेखाएं जो बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती है से स्थित समदूरस्थ बिंदु का बिंदुपथ

मान लीजिए कि दो प्रतिच्छेदी रेखाएं AB तथा CD बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं।



आकृति 10.52

हमें एक बिंदु P का बिंदुपथ ज्ञात करना है जो AB तथा CD से समदूरस्थ रहता हो।
$\angle BOD$ तथा $\angle BOC$ के समद्विभाजक खींचते हैं।



आकृति 10.53

यदि इन समद्विभाजकों l अथवा m पर कोई बिंदु P लेते हें तो इसकी दोनों रेखाओं AB तथा CD से लंबवत दूरी PL तथा PM समान हैं।

अर्थात् $PL = PM$

यदि हम कोई बिंदु Q लें जो किसी भी समद्विभाजक l अथवा m पर नहीं है तो QL, QM के बराबर नहीं होगा।

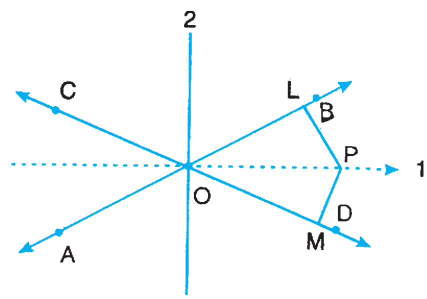
अतः हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि

दो प्रतिच्छेदी रेखाओं से समदूसरस्थ बिंदु का बिंदुपथ रेखाओं का एक युग्म है, जो दी हुई रेखाओं के बीच बने कोणों को समद्विभाजित करती हैं।

आपके लिए क्रियाकलाप:

एक कागज पर दो रेखाएं AB तथा CD एक दूसरे को O पर प्रतिच्छेद करती हुई खींचिए।

कागज को O पर इस प्रकार मोड़िए कि AO , CO पर तथा OD, OB पर आच्छादित हो जाए। मोड़ की तह एक सरल रेखा है जो $\angle BOD$ को समद्विभाजित करती है। इस तह पर कोई भी बिंद P लेकर पुष्टि कर सकते हैं कि $PL = PM$ है।



आकृति 10.54

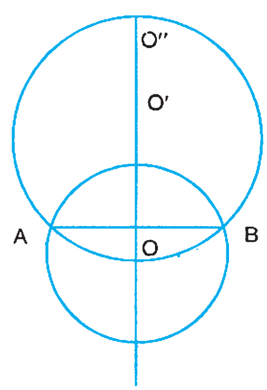
इसी प्रकार दुबारा मोड़कर मोड़ की तह 2 तथा दूसरे कोण का समद्विभाजक प्राप्त करते हैं। मोड़ की तह 2 पर कोई भी बिंदु दोनों प्रतिच्छेदी रेखाओं से समदूरस्थ होगा।

उदाहरण 10.5 : दो बिंदुओं से गुजरने वाले वृत्तों के केन्द्र का बिंदुपथ ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिए दो बिंदु A तथा B हैं। हमें इन बिंदुओं से गुजरने वाले वृत्त के केंद्र की संभव स्थितियां ज्ञात करती हैं।

आकृति 10.55

बिंदु O दोनों दिए हुए बिंदुओं A तथा B से समान दूरी पर स्थित होना चाहिए। जैसा कि हम सीख चुके हैं बिंदु O का बिंदुपथ AB का लंब समद्विभाजक होगा।



आकृति 10.56

देखें आपने कितना सीखा 10.3

1. तीन असंरेखीय बिंदु A, B तथा C से होकर जाने वाले वृत के केंद्र का बिंदुपथ निर्धारित कीजिए।

2. दो गांव एक दूसरे से कुछ दूरी पर स्थित हैं। दोनों गांव के लिए एक कुआं खुदवाना है जिसकी दूरी दोनों गांवों से समान हो लेकिन यह दूरी उनके बीच की दूरी से अधिक न हो। गांव की स्थितियां दो बिंदु A तथा B से तथा कुएं की स्थिति P से दर्शाते हुए, बिंदु P का पथ निर्धारित कीजिए।

3. दो सीधी सड़कें AB तथा CD एक दूसरे को O पर प्रतिच्छेद करती हैं। एक निरीक्षण केंद्र की स्थापना इस प्रकार करनी है कि उसकी दूरी O से एक किमी तथा दोनों सड़कों से समान दूरी पर हो। एक आकृति द्वारा निरीक्षण केन्द्र की संभावित स्थितियां दिखाइए।

4. एक बिंदु का बिंदु पथ ज्ञात कीजिए, जिसकी दूरी एक रेखा AB से सदैव 5 सेमी हो।

आइए दोहराएँ

- रेखा दोनो ओर अनिश्चित रूप से विस्तृत होती है तथा रेखाखंड दो बिंदुओं के बीच उस रेखा का केवल एक भाग होता है।
- दो तल में दो रेखाएं प्रतिच्छेदी हो सकती हैं अथवा समांतर।
- यदि तीन या अधिक रेखाएं एक दूसरे को केवल एक ही बिंदु पर प्रतिच्छेद करें तो वे संगामी कहलाती हैं।
- एक ही बिंदु से आरंभ होने वाली दो किरणें एक कोण बनाती हैं।
- कोणों का ऐसा युग्म, जिसका योग 90° हो पूरक कोण का युग्म कहलाते हैं।
- कोणों का ऐसा युग्म, जिनका योग 180° हो संपूरक कोण कहलाते हैं।
- यदि एक किरण किसी रेखा पर खड़ी हो तो इस प्रकार बने दो आसन्न कोणों का योग 180° होता है।
- यदि दो रेखाएं एक दूसरे को प्रतिच्छेद करें तो इस प्रकार बने शीर्षाभिमुख कोण समान होते हैं।
- जब एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओ को काटती है तो

  (i) संगत कोण युग्मों में समान होते हैं।

  (ii) एकान्तर कोण समान होते हैं।

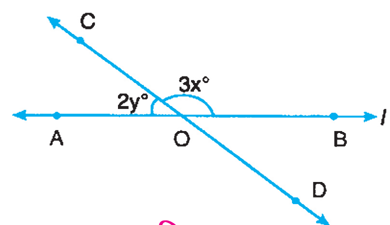
(iii) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्तः कोणों के युग्म संपूरक होते हैं।

- त्रिभुज के कोणों का योग 180^0 होता है।
- त्रिभुज का बहिष्कोण अपने सम्मुख अंतः कोणो के योग के बराबर होता है।
- दो बिंदुओं से समदूरस्थ का बिंदु पथ उन बिंदुओं को जोड़ने वाले रेखाखंड का लम्ब समद्विभाजक होता है।
- दो प्रतिच्छेदी रेखाओं से समदूरस्थ बिंदु का बिंदुपथ उन रेखाओं द्वारा बनाए गए कोणों को समद्विभाजित करने वाली रेखाओं का युग्म होता है।

आइए अभ्यास करें

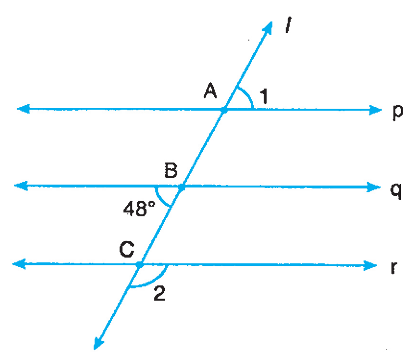
1. आकृति 10.57 में यदि $x = 42$ हो तो निम्न के मान ज्ञात कीजिए

   (a) y (b) $\angle AOD$



आकृति 10.57

2.

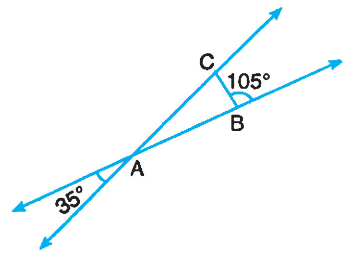


आकृति 10.58

उपरोक्त आकृति में p, q तथा r समांतर रेखाएं हैं जिन्हें एक तिर्यक रेखा l क्रमशः A, B तथा C पर प्रतिच्छेद करती है। $\angle 1$ तथा $\angle 2$ के मान ज्ञात कीजिए।

3. यदि एक त्रिभुज के दो कोणों का योग, तीसरे कोण के योग के बराबर है तो त्रिभुज का तीसरा कोण ज्ञात कीजिए तथा बताइए कि यह किस प्रकार का त्रिभुज है।

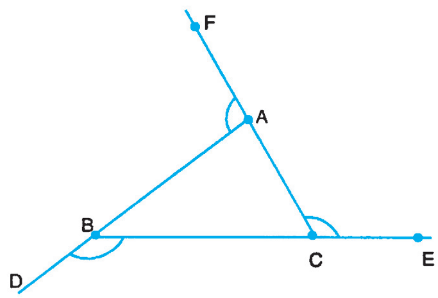
4.



आकृति 10.59

आकृति 10.59 में, Δ ABC की भुजाएं बढ़ी हुई दिखाई गई हैं। इस त्रिभुज के कोण ज्ञात कीजिए।

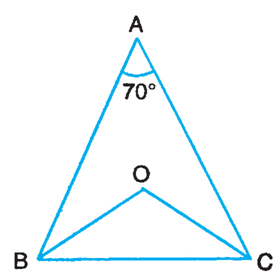
5.



आकृति 10.60

आकृति 10.60 में, त्रिभुज ABC की भुजाएँ AB, BC तथा CA बढ़ाई गई हैं जैसा आकृति में दिखाया गया है। सिद्ध कीजिए कि इस प्रकार बने तीनों बहिष्कोणों का योग 360° है।

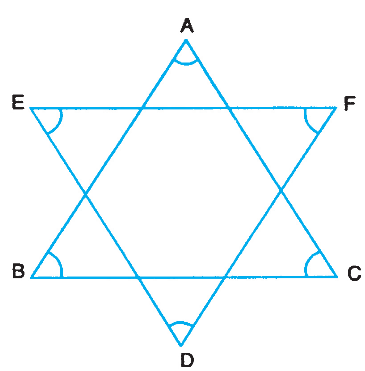
6.



आकृति 10.61

आकृति 10.61 में, किसी त्रिभुज ABC के $\angle B$ तथा $\angle C$ के समद्विभाजक बिंदु O पर मिलते हैं। दिखाइए कि $\angle BOC = 125^\circ$ हैं।

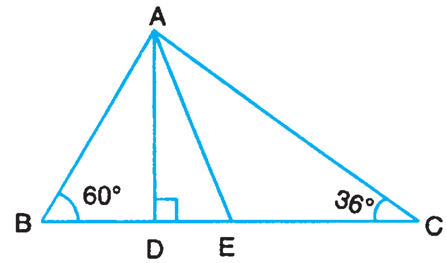
7.



आकृति 10.62

आकृति 10.62 में दिखाए गए $\angle A$, $\angle F$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle B$ तथा $\angle E$ का योगफल कितना होगा?

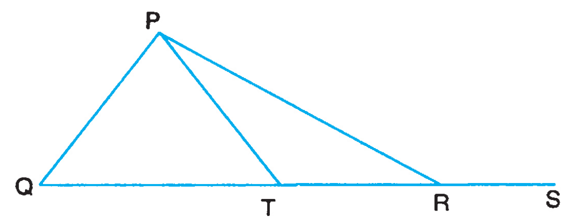
8.



आकृति 10.63

आकृति 10.63 के ΔABC में, AD, BC पर लम्ब है तथा AE, $\angle BAC$ का समद्विभाजक है। $\angle DAE$ का मान ज्ञात कीजिए।

9.



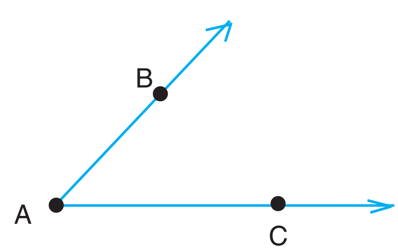
आकृति 10.64

आकृति 10.64 की किसी त्रिभुज PQR में $\angle P$ का समद्विभाजक PT है तथा भुजा QR को बिन्दु S तक बढ़ाया गया है। दर्शाइए कि $\angle PQR + \angle PRS = 2\,\angle PTR$ है।

10. सिद्ध कीजिए कि एक पंचभुज के अंतः कोणों का योग 540° होता है।

11. उस बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो दो समांतर रेखाओं l तथा m से 5 सेमी की दूरी पर स्थित हैं

12. उस बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो आकृति 10.65 की बिन्दुओं A तथा B और किरणों AB तथा AC से समदूरस्थ हैं।



आकृति 10.65

देखें आपने कितना सीखा के उत्तर

10.1

1. (i) (B) (ii) (A) (iii) (B) (iv) (C)
2. $x = 17^0$.
3. $\angle 1 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 6 = 110^o$

   और $\angle 2 = \angle 5 = \angle 7 = 70^o$

10.2

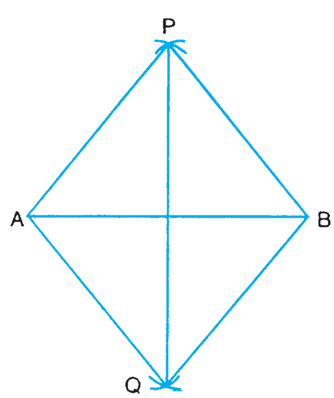
1. (i) (D) (ii) (B) (iii) (B)
2. 36^o, 54^o and 90^o 4. $\angle D = 140^o$ और $\angle C = 110^o$

6. $\angle ABC = 45^o$, $\angle ACB = 45^o$ और $\angle A = 90^o$

10.3

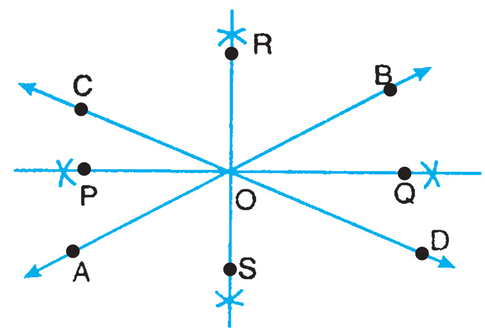
1. केवल एक बिंदु, जो भुजाओं AB तथा BC के लंब समद्विभाजकों का प्रतिच्छेद बिन्दु है।
2. मान लीजिए गाँवों की स्थितियां A तथा B हैं, तब संभावित स्थितियां होंगी, PQ पर जो AB का लंब समद्विभाजक है तथा

   $AP = BP = QA = QB = AB$



आकृति 10.65

3. P,Q, R और S चार बिन्दुओं की संभावित स्थितियां हैं जबकि दो बिन्दु P तथा Q, $\angle AOC$ के समद्विभाजक पर एवं दो बिंदु R तथा S, $\angle BOC$ के समद्विभाजक पर स्थित है।



आकृति 10.66

4. AB के दोनों ओर 5 सेमी की दूरी पर AB के समांतर दो रेखाएं।

आइए अभ्यास करें के उत्तर

1. (a) y = 27 (b) = 126°

2. $\angle 1 = 48°$ and $\angle 2 = 132°$

3. तीसरा कोण = 90°, समकोण

4. $\angle A = 35°$, $\angle B = 75°$, $\angle C = 70°$

7. 360°

8. 12°

11. l व m दोनों से 2.5 सेमी दूर समान्तर रेखाओं के बिन्दुपथ।

12. AB के लंब समद्विभाजक एवं $\angle BAC$ के समद्विभाजक का प्रतिच्छेद बिन्दु।