



11

त्रिभुजों की सर्वांगसमता

आपने देखा होगा कि विभिन्न वृक्षों की पत्तियों की आकृतियां भिन्न-भिन्न होती हैं, परन्तु एक ही वृक्ष की पत्तियों की आकृति समान ही होती है, यद्यपि आकार में छोटी बड़ी होती हैं। ज्यामितीय आकृतियां, जो माप तथा आकार, दोनों में समान होती हैं, सर्वांगसम आकृतियां कहलाती हैं। इस गुण को सर्वांगसमता कहते हैं।

इस पाठ में आप दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता तथा उनकी भुजाओं और कोणों के संबंध के बारे में विस्तार से अध्ययन करेंगे।



उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप समर्थ हो जाएंगे कि:

- जांच कर सकें और बता सकें कि दो आकृतियां सर्वांगसम हैं या नहीं;
- दो त्रिभुजों के सर्वांगसम होने की कसौटियाँ बता सकें और उन्हें समस्याओं के हल में प्रयोग कर सकें;
- सिद्ध कर सकें कि किसी त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण भी समान होते हैं;
- सिद्ध कर सकें कि किसी त्रिभुज के समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ भी समान होती हैं;
- सिद्ध कर सकें कि किसी त्रिभुज में यदि दो भुजाएँ असमान हैं, तो बड़ी भुजा का सम्मुख कोण, छोटी भुजा के सम्मुख कोण से बड़ा होगा;
- किसी त्रिभुज में भुजाओं का असमताएँ बता सकें व उनकी जांच कर सकें;
- उपरोक्त परिणामों पर आधारित समस्याएं हल कर सकें।

अपेक्षित पूर्व ज्ञान

- तल में ज्यामितीय आकृतियों की पहचान

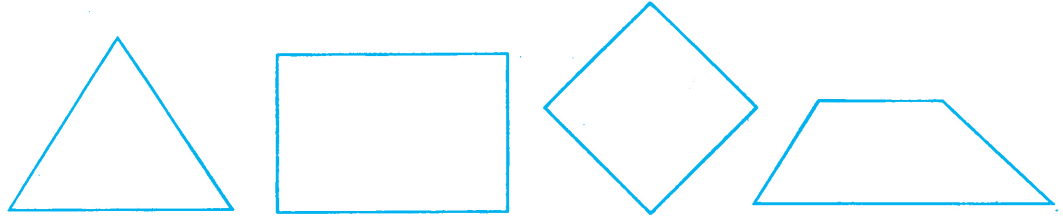


- कोणों और रेखाओं की समानता
- कोणों के प्रकार
- त्रिभुज के कोणों के योग का गुणधर्म
- कागज मोड़ने और काटने की प्रक्रिया

11.1 सर्वांगसमता की अवधारणा

अपने दैनिक जीवन में आप अनेक वस्तुएँ व आकृतियाँ देखते हैं। ये वस्तुएँ व आकृतियाँ उनकी माप व आकार के आधार पर निम्न वर्गों में समूहित की जा सकती हैं।

- (i) वे वस्तुएँ जो माप व आकार दोनों दृष्टियों से भिन्न हैं जैसे आकृति 11.1 में दिखाया गया है।



आकृति 11.1

- (ii) वे वस्तुएँ जो आकार में तो दूसरे के समान हैं परन्तु माप में भिन्न हैं, जैसे आकृति 11.2 में दिखाया गया है।



आकृति 11.2

- (iii) एक रुपये के दो सिक्के

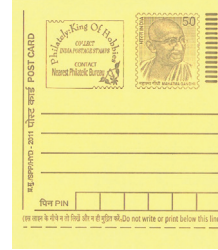
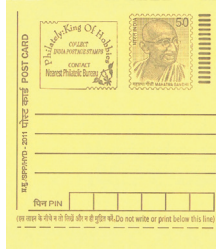


आकृति 11.3



टिप्पणी

(iv) पोस्ट कार्ड पर दो डाक टिकटें



आकृति 11.4

(v) एक ही नैगेटिव से बनाए गए दो एक माप वाले फोटो



आकृति 11.5

अब हम उन आकृतियों पर चर्चा करेंगे जो आकार व आकृतियों में समान हों।

दो आकृतियाँ, जो आकार तथा माप में एक दूसरे से समान होती हैं, सर्वांगसम आकृतियाँ कहलाती हैं और उनका यह गुण सर्वांगसमता कहलाता है।

11.1.1. आपके लिए क्रियाकलाप

कागज की एक शीट लेकर बीच से मोड़िए। इस तरह बनी दोनों तहों के बीच कार्बन पेपर रखिए। ऊपर वाले कागज पर किसी पत्ती या फूल या किसी अन्य वस्तु, जो आपको पसन्द है का चित्र बनाइए। इस चित्र की कार्बन प्रति नीचे के कागज पर भी बन जाएगी।

जो चित्र आपने बनाया तथा उसकी कार्बन प्रति, दोनों ही समान आकार व माप वाली हैं। अर्थात् ये दोनों सर्वांगसम आकृतियाँ हैं। दोनों पंख मिलाकर बैठी तितली का निरीक्षण कीजिए। प्रतीत होगा कि जैसे एक ही पंख है।

11.1.2 दो आकृतियों की सर्वांगसमता के लिए कसौटियाँ

दो सर्वांगसम आकृतियों में जब एक आकृति दूसरे के ऊपर रखी जाती है तब वे एक दूसरे को पूरा पूरा ढक लेती हैं और एक रूप हो जाती हैं। दूसरे शब्दों में एक सर्वांगसम आकृति के सभी भाग दूसरी आकृति के संगत भागों के बराबर होते हैं। उदाहरण के लिए:



टिप्पणी

(1) दो रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं यदि उनकी लंबाइयाँ बराबर हों।



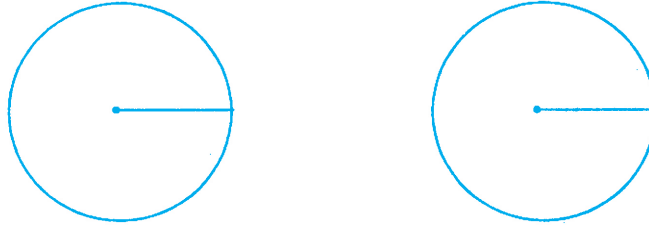
आकृति 11.6

(2) दो वर्ग सर्वांगसम होते हैं यदि उनकी भुजाएँ बराबर हों।



आकृति 11.7

(3) दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं यदि उनकी त्रिज्याएँ समान हों अर्थात् उनकी परिधियाँ समान हों।



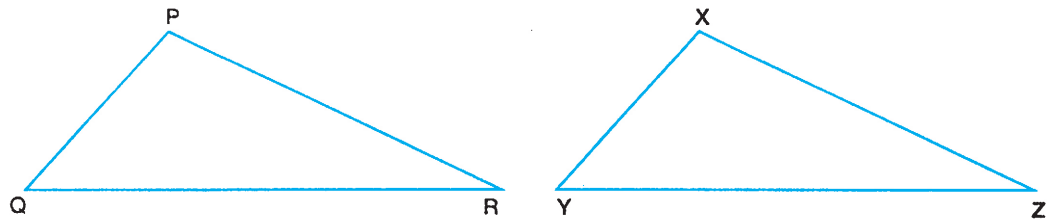
आकृति 11.8

11.2 त्रिभुजों में सर्वांगसमता

ज्यामिति में त्रिभुज, सबसे कम रेखाखंडों से बनी रैखिक आकृति है। अतः ज्यामिति के अनेक महत्वपूर्ण परिणामों को सिद्ध करने में त्रिभुजों की सर्वांगसमता बहुत उपयोगी व आवश्यक हो जाती है। अतः इसका विस्तार से अध्ययन अनिवार्य है।

दो त्रिभुजों में यदि एक त्रिभुज की सभी भुजाएँ तथा सभी कोण, दूसरे त्रिभुज की सभी संगत भुजाओं तथा संगत कोणों के बराबर हों, तो वे सर्वांगसम होते हैं।

उदाहरण के लिए, दो त्रिभुजों PQR तथा XYZ (आकृति 11.9) में



आकृति 11.9



$$PQ = XY, PR = XZ, QR = YZ$$

$$\angle P = \angle X, \angle Q = \angle Y \text{ तथा } \angle R = \angle Z$$

अतः, हम कह सकते हैं कि ΔPQR तथा ΔXYZ सर्वांगसम हैं तथा इनको

$\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ लिखते हैं

दो त्रिभुजों में सर्वांगसमता का संबंध सदैव एक संगतता के साथ अथवा तदनुरूप भागों को ध्यान में रखते हुए लिखा जाता है।

यहाँ $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ हैं,

जिसके अर्थ हैं, P संगत है X के Q संगत है Y के तथा R संगत है Z के।

इस संगतता को हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं:

$$\Delta QRP \cong \Delta YZX$$

इसके भी वैसे ही अर्थ होंगे, Q संगत है Y के, R संगत है Z के तथा P संगत है X के। इसके यह भी अर्थ होते हैं कि संगत भाग बराबर हैं, जैसे

$$QR = YZ, RP = ZX, QP = YX, \angle Q = \angle Y, \angle R = \angle Z$$

तथा $\angle P = \angle X$

यह सर्वांगसमता इस प्रकार भी लिखी जा सकती है:

$$\Delta RPQ \cong \Delta ZXY$$

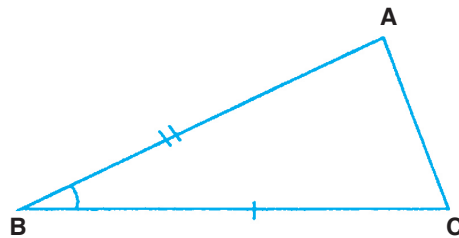
लेकिन $\Delta PQR \cong \Delta YZX$, द्वारा नहीं।

तथा $\Delta PQR \cong \Delta ZXY$, द्वारा भी नहीं।

11.3 दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए कसौटियाँ

हमने देखा कि यह सिद्ध करने के लिए कि दो त्रिभुज सर्वांगसम हैं अथवा नहीं, हमें जानना होता है कि एक त्रिभुज के सभी छः अवयव दूसरे त्रिभुज के सभी संगत छः अवयवों के समान हैं। अब हम सीखेंगे कि तीन संगत अवयवों के समान होने पर भी दो त्रिभुज सर्वांगसम हो सकते हैं

आकृति 11.10 में दिखाये गये ΔABC पर विचार कीजिए।

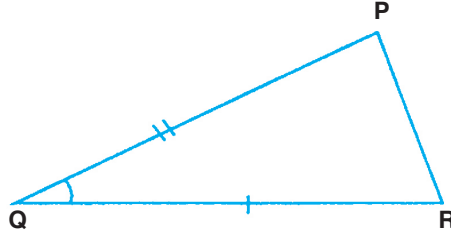


आकृति 11.10



टिप्पणी

एक अन्य त्रिभुज PQR की रचना कीजिए जिसकी भुजा $QR = BC$, $\angle Q = \angle B$ तथा $PQ = AB$ हैं। (देखिए आकृति 11.11)



आकृति 11.11

अब यदि हम त्रिभुज ABC को काटकर अथवा ट्रेसिंग कागज पर इसका प्रतिरूप लेकर त्रिभुज PQR पर रखते हैं, तब देखते हैं कि वह ΔPQR को पूरा पूरा ढक लेता है। अतः हम कह सकते हैं कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

अथवा हम शेष अवयवों को माप कर भी पुष्टि कर सकते हैं कि

$$AC = PR, \angle A = \angle P \text{ तथा } \angle C = \angle R$$

जिससे सिद्ध हो जाता है कि $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ है।

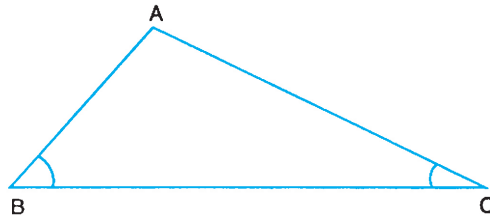
यहाँ ध्यान दीजिए कि ΔABC के सर्वांगसम ΔPQR की रचना करने में हम दो भुजाओं के युग्म $PQ = AB$, $QR = BC$ तथा उनके बीच बने कोण $\angle Q = \angle B$ ही प्रयोग में लाए हैं।

इसका अर्थ हुआ कि इन तीन संगत युग्मों के बराबर होने पर भी दो त्रिभुज सर्वांगसम बन जाते हैं। इस प्रकार हमें प्राप्त होता है:

कसौटी 1 : यदि एक त्रिभुज की कोई दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण दूसरे त्रिभुज की दो संगत भुजाओं व उनके बीच के कोण के बराबर हों, तो वे दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

इस कसौटी को संक्षिप्त में SAS (भु को भु) लिखते हैं

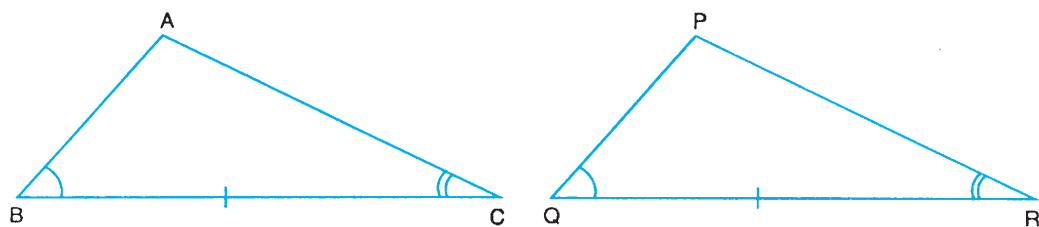
अब आकृति 11.12 में दिखाए गये ΔABC पर ध्यान दीजिए।



आकृति 11.12



हम फिर एक अन्य ΔPQR की रचना करते हैं जिसमें $QR = BC$, $\angle Q = \angle B$ तथा $\angle R = \angle C$ है, जैसा कि आकृति 11.13 में दिखाया गया है।



आकृति 11.13

आच्छादन विधि द्वारा अथवा शेष अवयवों को मापने पर हम देखते हैं कि $\angle P = \angle A$, $PQ = AB$ तथा $PR = AC$, अर्थात् हम कह सकते हैं कि $\Delta PQR \cong \Delta ABC$; जिससे पता चलता है कि तीन संगत अवयवों (दो कोण तथा अन्तर्गत भुजा) के बराबर होने पर दो त्रिभुज सर्वांगसम हो जाते हैं।

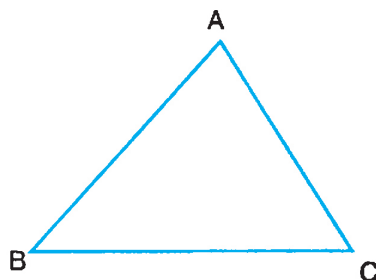
हम यह भी जानते हैं कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है। अतः एक त्रिभुज के दो कोण दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों के बराबर होने पर तीसरे कोण भी बराबर ही होंगे। अतः दो कोणों के साथ अन्तर्गत भुजा न लेकर कोई भी संगत भुजाओं का युग्म भी लिया जा सकता है। इस प्रकार हमें प्राप्त होता है—

कसौटी 2 : यदि किसी त्रिभुज के कोई दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोण और एक संगत भुजा के बराबर हों तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

इस कसौटी को हम संक्षिप्त में को भु को (ASA) अथवा को को भु (AAS) लिखते हैं।

11.3.1 क्रियाकलाप

दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए एक और कसौटी ज्ञात करने के लिए हम फिर एक त्रिभुज ABC लेते हैं (देखिए आकृति 11.14)



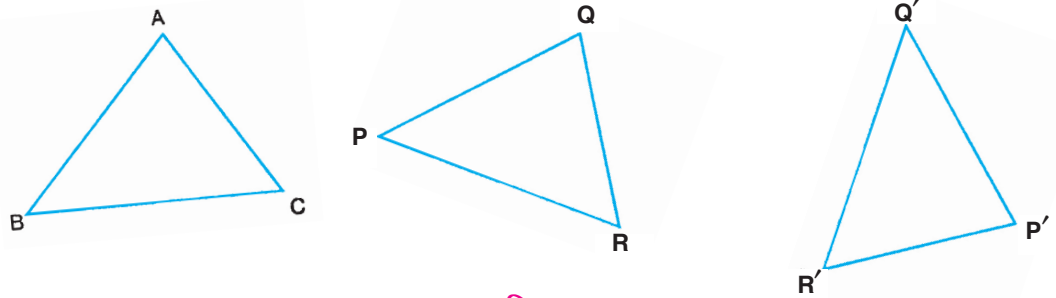
आकृति 11.14

अब आप तीन पतली छड़े लें जिनकी लंबाइयाँ त्रिभुज ABC की भुजाओं AB, BC तथा CA के



टिप्पणी

बराबर हों। उन्हें किसी भी क्रम में ΔABC के पास रखकर मिलाइए और ΔPQR तथा $\Delta P'Q'R'$ की रचना कीजिए (आकृति 11.15)



आकृति 11.15

संगत कोणों को मापने पर हम देखते हैं कि $\angle P = \angle P' = \angle A$, $\angle Q = \angle Q' = \angle B$ तथा $\angle R = \angle R' = \angle C$ है, जिससे स्थापित होता है कि

$$\Delta PQR \cong \Delta P'Q'R' \cong \Delta ABC$$

इसका अर्थ हुआ कि तीनों संगत भुजाओं के बराबर होने पर भी दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इस प्रकार हमें प्राप्त होता है:

कसौटी 3 : यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों संगत भुजाओं के बराबर हों, तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

इस कसौटी को संक्षिप्त में भु भु भु (SSS) लिखते हैं।

इसी प्रकार हम एक और कसौटी प्राप्त कर सकते हैं, जो केवल समकोण त्रिभुजों पर ही लागू होता है।

कसौटी 4 : यदि किसी समकोण त्रिभुज की एक भुजा और कर्ण दूसरे समकोण त्रिभुज की संगत भुजा तथा कर्ण के बराबर हों, तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

यह कसौटी संक्षिप्त में कर्ण भुजा अथवा RHS (Right Angle Hypotenuse Side) लिखी जाती है।

इन कसौटियों के अनुसार, केवल तीन संगत अवयवों की जानकारी से, हम दो त्रिभुजों को सर्वांगसम सिद्ध कर सकते हैं; तथा त्रिभुजों के सर्वांगसम होने की स्थिति में शेष तीन संगत अवयवों के बराबर होने का पता चल जाता है।

उदाहरण 11.1 : नीचे दी हुई कसौटियों में किस कसौटी में, दो त्रिभुज सर्वांगसम नहीं होंगे?

- सभी संगत भुजाएँ बराबर हों।
- सभी संगत कोण बराबर हों।



(c) दो संगत भुजाएं तथा उनके बीच बने कोण बराबर हों।

(d) सभी संगत कोण तथा एक संगत भुजा बराबर हो।

हल. (b)

उदाहरण 11.2 : दो रैखिक आकृतियां सर्वांगसम होती हैं, यदि उनकी/उनके

(a) सभी संगत भुजाएँ बराबर हों।

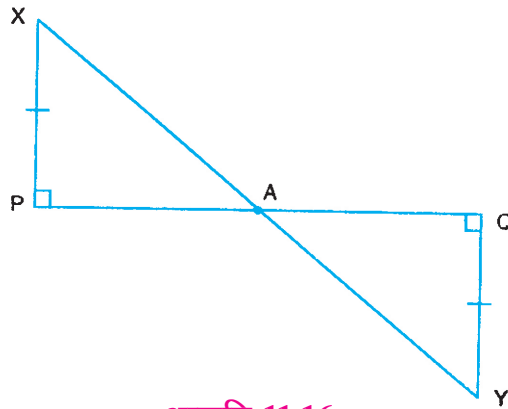
(b) सभी संगत कोण बराबर हों।

(c) क्षेत्रफल बराबर हों।

(d) सभी संगत भुजाएँ तथा एक संगत कोण बराबर हों।

हल. (d)

उदाहरण 11.3 : आकृति 11.16 में, PX तथा QY रेखाखंड PQ पर लंब हैं तथा $PX = QY$ है। दर्शाइए कि $AX = AY$ है।



आकृति 11.16

हल:

ΔPAX तथा ΔQAY में,

$$\angle XPA = \angle YQA \quad (\text{प्रत्येक} = 90^\circ)$$

$$\angle PAX = \angle QAY \quad (\text{शीर्षाभिमुख कोण})$$

तथा $PX = QY$ (दिया है)

$\therefore \Delta PAX \cong \Delta QAY$ (को को भु)

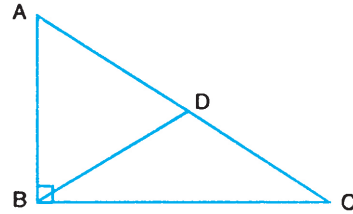
$\therefore AX = AY$



टिप्पणी

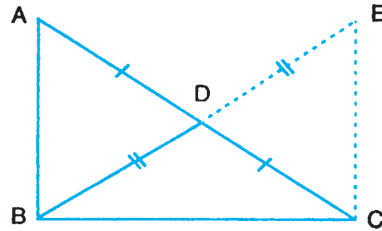
उदाहरण 11.4 : आकृति 11.17 में, ΔABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle B = 90^\circ$ तथा D भुजा AC का मध्य बिन्दु है।

सिद्ध कीजिए कि $BD = \frac{1}{2} AC$.



आकृति 11.17

हल : BD को E तक बढ़ाए जिससे कि $BD = DE$ (आकृति 11.18) है। CE को मिलाए।



आकृति 11.18

त्रिभुज ΔADB तथा त्रिभुज ΔCDE ,

$$AD = CD \quad (\text{D मध्य बिंदु AC का})$$

$$DB = DE \quad (\text{रचना से})$$

$$\text{तथा } \angle ADB = \angle CDE \quad (\text{शीर्षाभिमुख कोण})$$

$$\therefore \Delta ADB \cong \Delta CDE \quad (\text{भु को भु}) \quad (i)$$

$$\therefore AB = EC \quad (\text{सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत अवयव})$$

$$\text{Also } \angle DAB = \angle DCE \quad (\text{सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत अवयव})$$

परन्तु यह एक एकांतर कोणों का युग्म है

$$\therefore AB \parallel EC$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ECB = 180^\circ \quad (\text{अंतः कोण})$$

$$\therefore \angle 90^\circ + \angle ECB = 180^\circ$$

$$\therefore \angle ECB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$



टिप्पणी

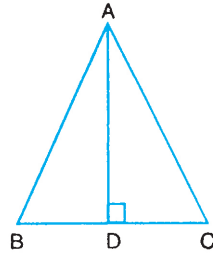
अब ΔABC तथा ΔECB में,

	$AB = EC$	(ऊपर (i) से)
	$BC = BC$	(उभयनिष्ठ भुजा)
तथा	$\angle ABC = \angle ECB$	(प्रत्येक $= 90^\circ$)
\therefore	$\Delta ABC \cong \Delta ECB$	(भु को भु)
\therefore	$AC = EB$	
परन्तु	$BD = \frac{1}{2} EB$	
\therefore	$BD = \frac{1}{2} AC$	



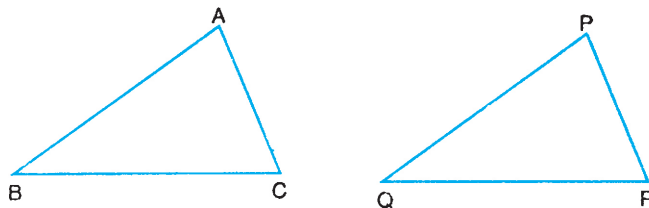
देखें आपने कितना सीखा 11.1

1. ΔABC में, (आकृति 11.19), यदि $\angle B = \angle C$ तथा $AD \perp BC$ है, तब निम्नलिखित कसौटियों में, कोन सी कसौटी से $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ है?



आकृति 11.19

- (A) कर्ण भुजा (RHS) (B) को भु को (ASA)
- (C) भु को भु (SAS) (D) भु भु भु (SSS)
2. आकृति 11.20 में, $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ है। इस सर्वांगसमता को निम्न में से किस और प्रकार से भी लिखा जा सकता है?



आकृति 11.20



टिप्पणी

(A) $\Delta BAC \cong \Delta RPQ$

(B) $\Delta BAC \cong \Delta QPR$

(C) $\Delta BAC \cong \Delta RQP$

(D) $\Delta BAC \cong \Delta PRQ$

3. दो त्रिभुजों के सर्वांगसम होने के लिए, दो संगत कोणों के समान होने के अतिरिक्त कम से कम किन और संगत अवयवों का समान होना आवश्यक है?

(A) कोई संगत भुजा नहीं

(B) कम से कम एक संगत भुजा

(C) कम से कम दो संगत भुजाएँ

(D) तीनों संगत भुजाएँ

4. दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि

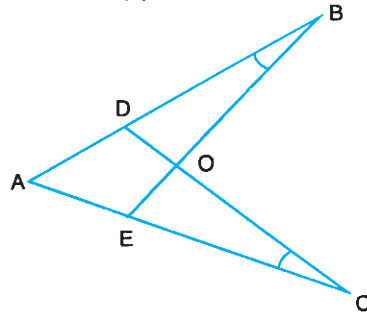
(A) तीनों संगत कोण समान हों।

(B) एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा के समान हों।

(C) एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोण और एक संगत भुजा के समान हों।

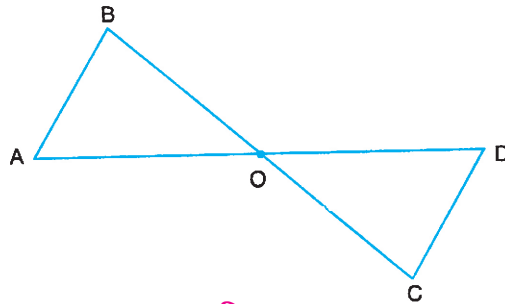
(D) एक त्रिभुज के एक कोण और दो भुजाएँ दूसरे त्रिभुज के एक कोण और दो भुजाओं के बराबर हों।

5. आकृति 11.21 में, $\angle B = \angle C$ तथा $AB = AC$ है। सिद्ध कीजिए कि $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ है। अतः दर्शाइए कि $CD = BE$ है।



आकृति 11.21

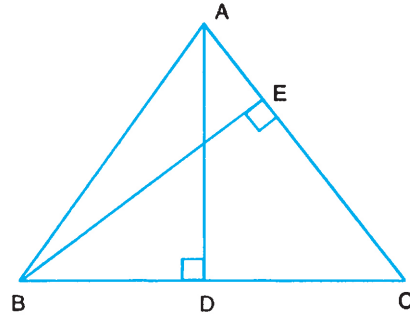
6. आकृति 11.22 में, $AB \parallel CD$, यदि O रेखाखण्ड BC का मध्य बिंदु है तो दर्शाइए कि यह AD का भी मध्य बिंदु है।



आकृति 11.22

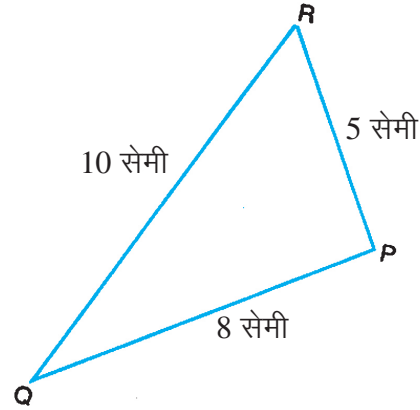
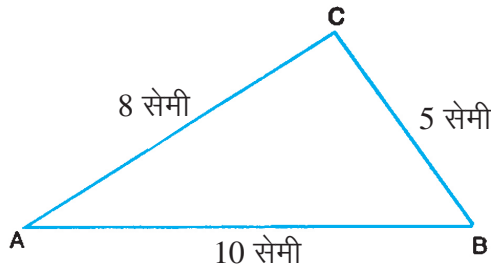


7. ΔABC में, (आकृति 11.23), $AD \perp BC$, $BE \perp AC$ तथा $AD = BE$ है। सिद्ध कीजिए कि $AE = BD$ है।



आकृति 11.23

8. आकृति 11.24 को देखकर दर्शाइए कि दिए गए त्रिभुज सर्वांगसम हैं तथा उनमें संगत कोण के युग्म निर्धारित कीजिए।



आकृति 11.24

11.4 एक त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण तथा इसका विलोम

दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता की कसौटियों का अनुप्रयोग कर, अब हम कुछ महत्वपूर्ण प्रमेय सिद्ध करेंगे।

प्रमेय: एक त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण भी समान होते हैं।

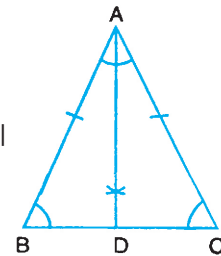
दिया है: एक त्रिभुज ABC जिसमें $AB = AC$.

सिद्ध करना है: $\angle B = \angle C$.

रचना: $\angle BAC$ का समद्विभाजक खींचिए जो BC को D पर मिलता है।

उपपत्ति: ΔABD तथा ΔACD में,

$$AB = AC \quad (\text{दिया है})$$



आकृति 11.25



टिप्पणी

$$\angle BAD = \angle CAD \quad (\text{रचना से})$$

तथा $AD = AD \quad (\text{उभयनिष्ठ})$

$$\Delta ABD \cong \Delta ACD \quad (\text{भु को भु})$$

अतः $\angle B = \angle C \quad (\text{सर्वांगसम भुजाओं के संगत अवयव})$

इस प्रमेय का विलोम भी सत्य है। इसे भी हम प्रमेय के रूप में सिद्ध करते हैं।

11.4.1 प्रमेय:

एक त्रिभुज में समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ भी समान होती हैं।

दिया है: एक त्रिभुज ABC जिसमें $\angle B = \angle C$ है।

सिद्ध करना है: $AB = AC$

रचना: $\angle BAC$ का समद्विभाजक खींचिए जो BC को D पर मिलता है।

उपपत्ति: ΔABD तथा ΔACD में,

$$\angle B = \angle C \quad (\text{दिया है})$$

$$\angle BAD = \angle CAD \quad (\text{रचना से})$$

तथा $AD = AD \quad (\text{उभयनिष्ठ})$

$$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD \quad (\text{को को भु})$$

अतः $AB = AC \quad (\text{सर्वांगसम भुजाओं के संगत अवयव})$

अतः प्रमेय सिद्ध हुई।

उदाहरण 11.5 : सिद्ध कीजिए कि किसी समबाहु त्रिभुज के तीनों कोण समान होते हैं।

हल:

दिया है: एक समबाहु ΔABC

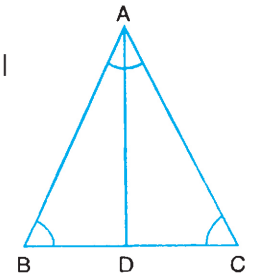
सिद्ध करना है: $\angle A = \angle B = \angle C$

उपपत्ति: $AB = AC \quad (\text{दिया है})$

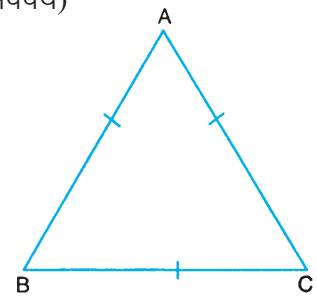
$$\therefore \angle C = \angle B \quad (\text{समान भुजाओं के सम्मुख कोण}) \quad \dots(i)$$

तथा $AC = BC \quad (\text{दिया है})$

$$\therefore \angle B = \angle A \quad (\text{समान भुजाओं के सम्मुख कोण}) \quad \dots(ii)$$



आकृति 11.26



आकृति 11.27



(i) और (ii) से,

$$\angle A = \angle B = \angle C$$

यही सिद्ध करना था।

उदाहरण 11.6: ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AB = AC$ है (आकृति 11.28)। यदि $BD \perp AC$ तथा $CE \perp AB$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $BD = CE$ है।

हल: $\triangle BDC$ तथा $\triangle CEB$ में

$$\angle BDC = \angle CEB \quad (\text{प्रत्येक} = 90^\circ)$$

$$\angle DCB = \angle ECB \quad (\text{समान भुजाओं के सम्मुख कोण})$$

$$\text{तथा } BC = CB \quad (\text{दिया है})$$

$$\therefore \triangle BDC \cong \triangle CEB \quad (\text{को भु को})$$

$$\text{अतः } BD = CE$$

इस परिणाम को निम्न रूप से भी लिख सकते हैं।

किसी समद्विबाहु त्रिभुज के समान भुजाओं पर सम्मुख शीर्षों से खींचे गए लंब समान होते हैं।

इस परिणाम का विस्तार समबाहु त्रिभुज के लिए भी निम्न प्रकार से किया जा सकता है।

किसी समबाहु त्रिभुज में तीनों शीर्षलम्ब समान होते हैं।

उदाहरण 11.7: $\triangle ABC$ में (आकृति 11.29), D तथा E भुजाओं AC तथा AB के मध्य बिन्दु हैं। यदि $AB = AC$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $BD = CE$ है।

$$\text{हल: } BE = \frac{1}{2} AB$$

$$\text{तथा } CD = \frac{1}{2} AC$$

$$\therefore BE = CD \quad \dots(i)$$

$\triangle BEC$ तथा $\triangle CDB$ में,

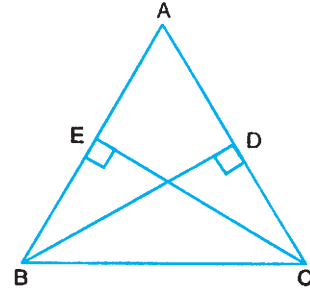
$$BE = CD \quad [(i) \text{ से}]$$

$$BC = CB \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

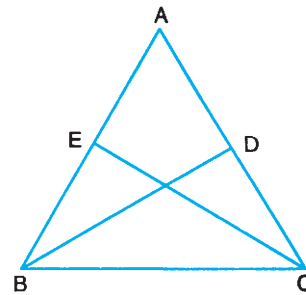
$$\text{तथा } \angle EBC = \angle DCB \quad (\because AB = AC)$$

$$\therefore \triangle BEC \cong \triangle CDB$$

$$\text{अतः, } CE = BD \quad (\text{सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत अवयव})$$



आकृति 11.28



आकृति 11.29

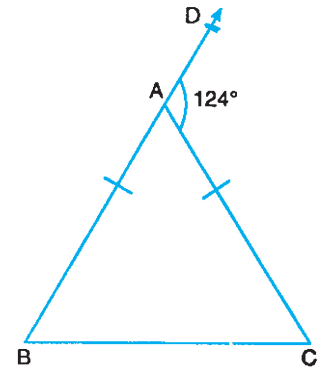


टिप्पणी

उदाहरण 11.8 : ΔABC में, (आकृति 11.30) $AB = AC$ तथा $\angle DAC = 124^\circ$ है। त्रिभुज के कोण ज्ञात कीजिए।

हल: $\angle BAC = 180^\circ - 124^\circ = 56^\circ$
 $\angle B = \angle C$ (समान भुजाओं के सम्मुख कोण)
 तथा $\angle B + \angle C = 124^\circ$
 $\angle B = \angle C = \frac{124^\circ}{2} = 62^\circ$

अतः, त्रिभुज के कोण हैं: 56° , 62° तथा 62° ।

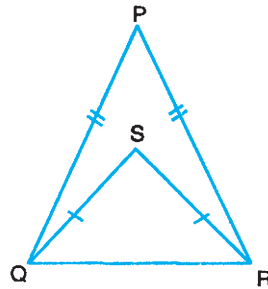


आकृति 11.30



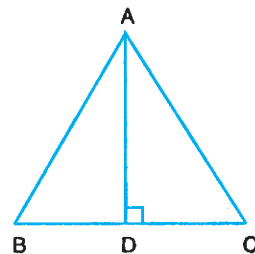
देखें आपने कितना सीखा 11.2

1. आकृति 11.31 में, यदि $PQ = PR$ तथा $SQ = SR$ हो, तब सिद्ध कीजिए कि $\angle PQS = \angle PRS$ है।



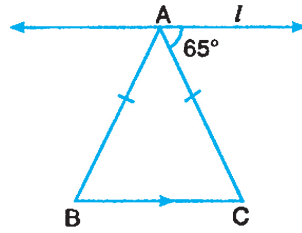
आकृति 11.31

2. ΔABC में, यदि शीर्षलंब AD आधार BC को समद्विभाजित करता है, तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है (आकृति 11.32)।



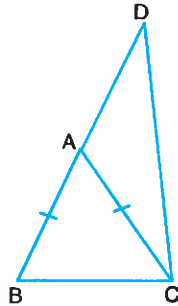
आकृति 11.32

3. आकृति 11.33 में, यदि रेखा l समद्विबाहु त्रिभुज ABC के आधार BC के समांतर हो, तो त्रिभुज के कोण ज्ञात कीजिए।



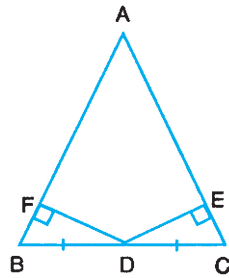
आकृति 11.33

4. $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AB = AC$ है (आकृति 11.34)। भुजा BA को बिंदु D तक बढ़ाया गया है जिससे $AB = AD$ है। सिद्ध कीजिए कि $\angle BCD$ एक समकोण है।



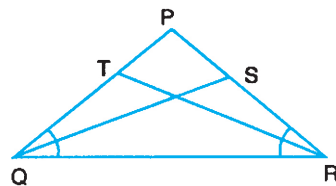
आकृति 11.34

5. आकृति 11.35 में, बिंदु D, $\triangle ABC$ के आधार BC का मध्य बिंदु है तथा शीर्ष लंब DF तथा DE समान हैं। सिद्ध कीजिए कि $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



आकृति 11.35

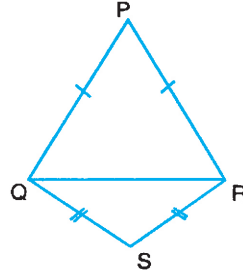
6. आकृति 11.36 में, $PQ = PR$ तथा QS व RT क्रमशः $\angle Q$ तथा $\angle R$ के कोण समद्विभाजक हैं। सिद्ध कीजिए कि $QS = RT$ है।



आकृति 11.36

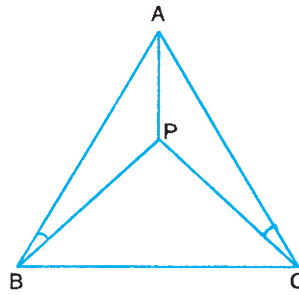


7. एक ही आधार QR पर बनाए गए ΔPQR तथा ΔSQR दो समद्विबाहु त्रिभुज हैं (आकृति 11.37)। सिद्ध कीजिए कि $\angle PQS = \angle PRS$ है।



आकृति 11.37

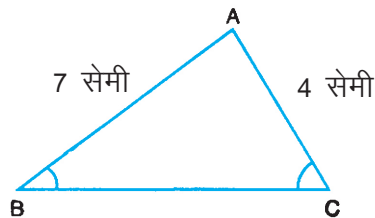
8. त्रिभुज ΔABC में, $AB = AC$ (आकृति 11.38)। त्रिभुज के अंतः भाग में P एक ऐसा बिंदु है कि $\angle ABP = \angle ACP$ है। सिद्ध कीजिए कि AP, $\angle BAC$ का समद्विभाजक है।



आकृति 11.38

11.5 त्रिभुज में असमताएँ

हम किसी त्रिभुज की भुजाओं और कोणों में संबंध सीख चुके हैं जब वे समान हों। अब हम सीखेंगे कि त्रिभुज की भुजाओं और कोणों में क्या संबंध होता है जब वे असमान हों।



आकृति 11.39

आकृति 11.39 में, त्रिभुज ABC की भुजा AB की लंबाई, भुजा AC की लंबाई से अधिक है। $\angle B$ तथा $\angle C$, को मापकर देखिए। आप पाएंगे ये दोनों कोण बराबर नहीं हैं तथा कोण C, कोण B से बड़ा है। आप किसी भी त्रिभुज के साथ यह प्रक्रिया दोहराएँ। सदैव यही देखेंगे कि बड़ी



भुजा के सामने का कोण छोटी भुजा के सामने के कोण से बड़ा है। इस गुण को हम प्रमेय के रूप में भी सिद्ध कर सकते हैं।

11.5.1 प्रमेय

यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ असमान हों, तो बड़ी भुजा के सामने का कोण, छोटी भुजा के सामने के कोण से बड़ा होता है।

दिया है: एक त्रिभुज ABC जिसमें $AB > AC$ है।

सिद्ध करना है: $\angle ACB > \angle ABC$

रचना: भुजा AB पर बिंदु D इस प्रकार अंकित कीजिए कि $AD = AC$ हो तथा DC को मिलाइए।

उपपत्ति: $\triangle ACD$ में,

$$AD = AC$$

$\therefore \angle ACD = \angle ADC$ (समान भुजाओं के सम्मुख कोण) (i)

परन्तु $\angle ADC > \angle ABC$ (त्रिभुज का बाह्यकोण सम्मुख अंतः कोण से बड़ा होता है) (ii)

पुनः $\angle ACB > \angle ACD$ (D बिन्दु $\angle ACB$ के अंतर्भाग है) (iii)

$\therefore \angle ACB > \angle ABC$ [(i), (ii) तथा (iii) से]

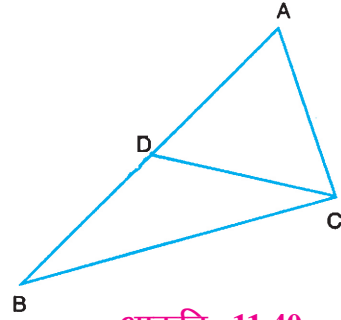
इस प्रमेय के विलोम के बारे में हम क्या कह सकते हैं? आइए देखें।

$\triangle ABC$ में, (आकृति 11.41), यदि हम $\angle C$ तथा $\angle B$ की तुलना करें तो देखते हैं कि $\angle C$ बड़ा है $\angle B$ से। अब इन कोणों की सम्मुख भुजाएँ AB तथा AC की माप की तुलना करते हैं। हम देखते हैं कि भुजा AB बड़ी है भुजा AC से। अब $\angle C$ तथा $\angle A$ की तुलना करते हैं, और देखते हैं $\angle C > \angle A$ । भुजा AB तथा भुजा BC माप कर देखने पर पाते हैं कि $AB > BC$ है। जिससे पता चलता है कि बड़े कोण के सामने की भुजा छोटे कोण के सामने की भुजा से बड़ी है।

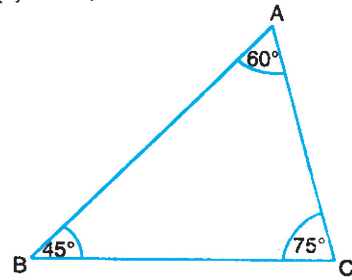
$\angle A$ तथा $\angle B$ एवं भुजा BC तथा भुजा AC की तुलना करने पर भी हम देखते हैं कि $\angle A > \angle B$ तथा $BC > AC$, अर्थात् बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी है।

किसी भी प्रकार का त्रिभुज, अर्थात् समकोण त्रिभुज अथवा अधिक कोण त्रिभुज लेकर भी इस गुण की जाँच की जा सकती है।

त्रिभुज की भुजाओं और कोणों को मापने पर सदैव देखेंगे कि उपयुक्त परिणाम सदैव सत्य हैं जिसे हम त्रिभुज के गुणधर्म के रूप में लिख सकते हैं।



आकृति 11.40



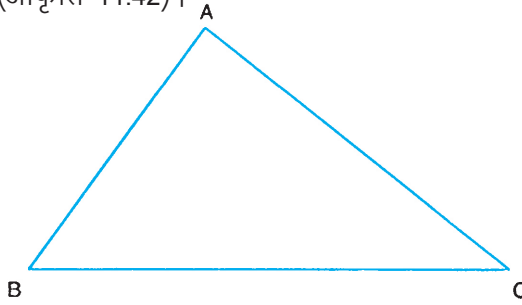
आकृति 11.41



किसी त्रिभुज में बड़े कोण की सम्मुख भुजा, छोटे कोण की सम्मुख भुजा से बड़ी होती है।

ध्यान दीजिए कि यदि किसी त्रिभुज में एक समकोण अथवा अधिकोण है तो उस कोण के सामने की भुजा ही सबसे बड़ी होगी।

आप त्रिभुज के तीनों कोणों के बीच एक संबंध के बारे में सीख चुके हैं कि उनका योग सदैव 180° होता है। अब हम किसी त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बीच संबंध का अध्ययन करेंगे। कोई त्रिभुज ABC बनाइए (आकृति 11.42)।



आकृति 11.42

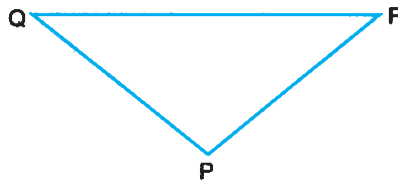
इसकी तीन भुजाएँ AB, BC तथा CA मापकर विभिन्न युग्मों में दो भुजाओं के योग की तीसरी भुजा से तुलना कीजिए। आप देखेंगे कि:

- (i) $AB + BC > CA$
- (ii) $BC + CA > AB$ तथा
- (iii) $CA + AB > BC$

अतः, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि

एक त्रिभुज में किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक होता है।

क्रियाकलाप: लकड़ी के किसी बोर्ड अथवा किसी अन्य पृष्ठ पर तीन कीलें P, Q तथा R ठोकिए।



आकृति 11.43

धागे का एक टुकड़ा QR दूरी के बराबर तथा दूसरा टुकड़ा $QP + PR$ के बराबर लीजिए। धागे के दोनों टुकड़ों की तुलना कीजिए। आप देखेंगे कि $QP + PR > QR$ है, जिससे उपरोक्त गुण धर्म की पुष्टि होती है।



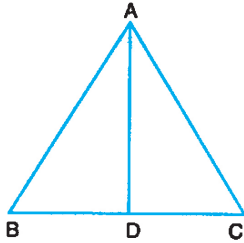
उदाहरण 11.9 : निम्नलिखित चार अवस्थाओं में से किस अवस्था में दी गई मापों से एक त्रिभुज की रचना सम्भव है?

- (a) 5 सेमी, 8 सेमी तथा 3 सेमी
 (b) 14 सेमी, 6 सेमी तथा 7 सेमी
 (c) 3.5 सेमी, 2.5 सेमी तथा 5.2 सेमी
 (d) 20 सेमी, 25 सेमी तथा 48 सेमी

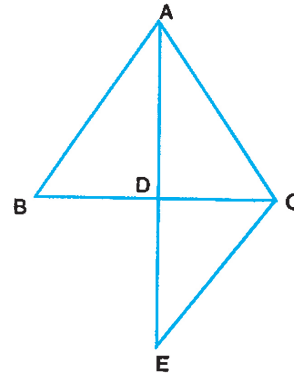
हल: (a) में, $5 + 3 \ngtr 8$, (b) में, $6 + 7 \ngtr 14$
 (c) में, $3.5 + 2.5 > 5.2$, $3.5 + 5.2 > 2.5$ तथा $2.5 + 5.2 > 3.5$ तथा
 (d) में, $20 + 25 \ngtr 48$.

उत्तर: (c)

उदाहरण 11.10 : आकृति 11.44 में, $\triangle ABC$ की AD एक माध्यिका है। सिद्ध कीजिए कि $AB + AC > 2AD$ है।



आकृति 11.44



आकृति 11.45

हल: AD को E तब इस प्रकार बढ़ाइए कि $AD = DE$ तथा C को E से मिलाइए।

$\triangle ABD$ तथा $\triangle ECD$ में

$$BD = CD$$

$$\angle ADB = \angle EDC$$

तथा $AD = ED$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ECD$$

$$\therefore AB = EC$$

अब $\triangle ACE$ में,

$$EC + AC > AE$$

$$\text{or } AB + AC > 2AD \quad (\because AD = ED \text{ से } AE = 2AD \text{ है})$$

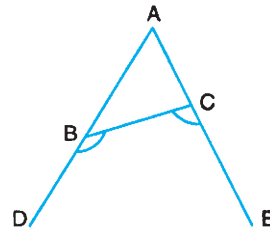


टिप्पणी



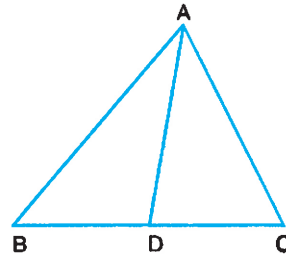
देखें आपने कितना सीखा 11.3

1. PQRS एक चतुर्भुज है जिसके विकर्ण PR तथा QS एक दूसरे को O पर प्रतिच्छेद करते हैं। सिद्ध कीजिए कि $PQ + QR + RS + SP > PR + QS$ है।
2. एक त्रिभुज ABC में, $AB = 5.7$ सेमी, $BC = 6.2$ सेमी तथा $CA = 4.8$ सेमी है। त्रिभुज के सबसे बड़े तथा सबसे छोटे कोण का नाम लिखिए।
3. आकृति 11.46 में, यदि $\angle CBD > \angle BCE$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $AB > AC$ है।



आकृति 11.46

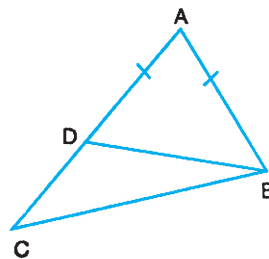
4. आकृति 11.47 में, $\triangle ABC$ के आधार BC पर कोई बिंदु D है। यदि $AB > AC$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $AB > AD$ है।



आकृति 11.47

5. सिद्ध कीजिए कि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाओं का योग उसकी तीना माध्यिकाओं के योग से अधिक होता है। (उदाहरण 11.10 का प्रयोग करें)
6. आकृति 11.48 में, यदि $AB = AD$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $BC > CD$ है।

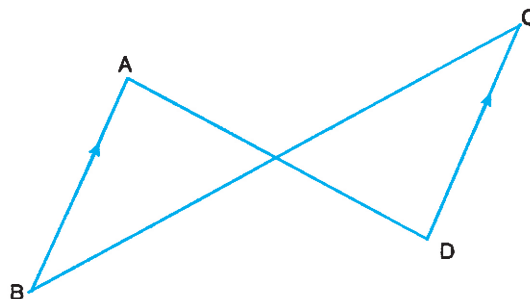
[संकेत: $\angle ADB = \angle ABD$]



आकृति 11.48



7. आकृति 11.49 में, AB समांतर है CD के। यदि $\angle A > \angle B$ हो, तो सिद्ध कीजिए $BC > AD$ है।



आकृति 11.49



आइए दोहराएँ

- आकृतियाँ जो आकार तथा माप में समान होती हैं, सर्वांगसम आकृतियाँ कहलाती हैं।
- सर्वांगसम आकृतियों को जब एक दूसरे के ऊपर रखते हैं तब वे एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेती हैं। एक आकृति के सभी अवयव दूसरी आकृति के सभी संगत अवयवों के बराबर होते हैं।
- दो त्रिभुजों को सर्वांगसम सिद्ध करने के लिए हमें केवल तीन संगत अवयवों की आवश्यकता होती है। ये अवयव कसौटियों के अनुसार होने चाहिए।
 - (i) भु को भु (SAS) (ii) को भु को या को को भु (ASA or AAS)
 - (iii) भु भु भु (SSS) (iv) कर्ण भुजा (RHS)
- त्रिभुज की समान भुजाओं के सम्मुख कोण भी समान होते हैं।
- त्रिभुज के समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ भी समान होती हैं।
- यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ असमान हैं तो बड़ी भुजा के सामने वाला कोण छोटी भुजा के सामने वाले कोण से बड़ा होता है।
- किसी त्रिभुज में बड़े कोण के सामने की भुजा छोटे कोण के सामने की भुजा से बड़ी होती है।
- किसी त्रिभुज में किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

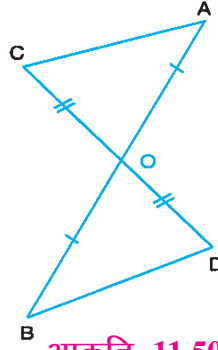


आइए अभ्यास करें

1. दो रेखाखंड AB तथा CD एक दूसरे को बिंदु O पर समद्विभाजित करते हैं। सिद्ध कीजिए कि $CA = BD$ (आकृति 11.50) है।

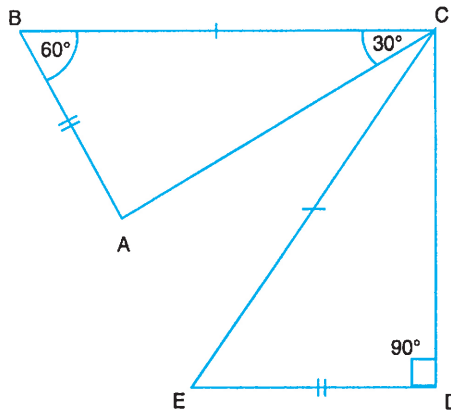


टिप्पणी



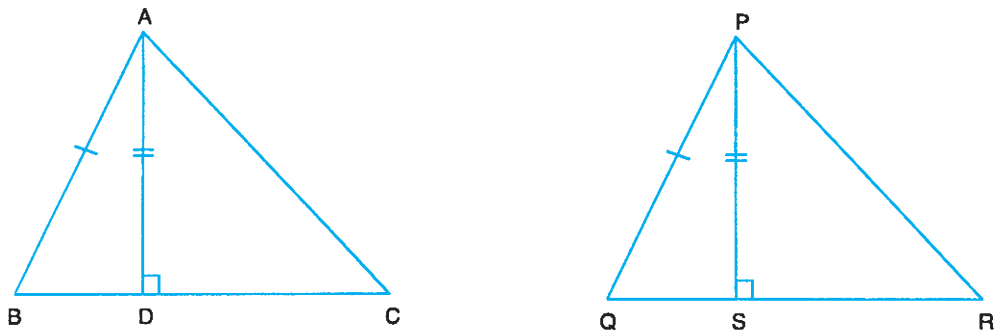
आकृति 11.50

- यदि $\triangle ABC$ में माधिका AD , आधार BC पर लंब हो, तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।
- आकृति 11.51 में, $\triangle ABC$ तथा $\triangle CDE$ में, $BC = CE$ तथा $AB = DE$ हैं। यदि $\angle B = 60^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$ तथा $\angle D = 90^\circ$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।



आकृति 11.51

- आकृति 11.52 में, $\triangle ABC$ की दो भुजाएं AB तथा BC तथा शीर्षलंब AD , $\triangle PQR$ की दो भुजाओं PQ तथा QR तथा शीर्षलंब PS के क्रमशः बराबर हैं। सिद्ध कीजिए कि $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ है।

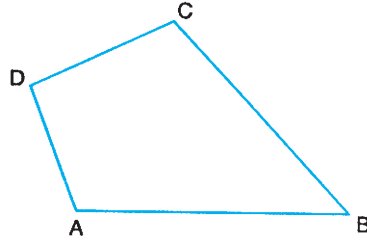


आकृति 11.52

- एक समकोण त्रिभुज में एक न्यूनकोण 30° का है। सिद्ध कीजिए कि उसका कर्ण, 30° कोण के सामने की भुजा का दुगुना है।

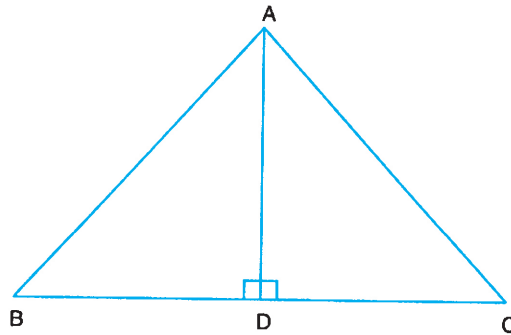


6. दो रेखाखंड AB तथा CD एक दूसरे को AB के मध्यबिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि AC समांतर DB हो, तो सिद्ध कीजिए कि O भुजा CD का भी मध्य बिंदु है।
7. आकृति 11.53 में, चतुर्भुज ABCD की सबसे बड़ी भुजा AB तथा सबसे छोटी भुजा DC है। सिद्ध कीजिए कि $\angle C > \angle A$ तथा $\angle D > \angle B$ है। [संकेत: AC तथा BD को मिलाइए]



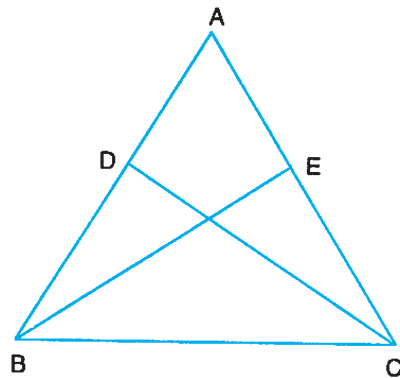
आकृति 11.53

8. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC में, $AB = AC$ तथा AD उसका शीर्ष लंब है। सिद्ध कीजिए कि $BD = DC$ है (आकृति 11.54)।



आकृति 11.54

9. सिद्ध कीजिए कि किसी समद्विबाहु त्रिभुज की समान भुजाओं को समद्विभाजित करने वाली माध्यिकाएं भी समान होती हैं। (आकृति 11.55) [संकेत: सिद्ध कीजिए $\triangle DBC \cong \triangle ECB$]



आकृति 11.55



टिप्पणी



देखें आपने कितना सीखा के उत्तर

11.1

1. (A)
2. (B)
3. (B)
4. (C)
8. $\angle P = \angle C$ $\angle Q = \angle A$ तथा $\angle R = \angle B$.

11.2

3. $\angle B = \angle C = 65^\circ$, $\angle A = 50^\circ$

11.3

2. सबसे बड़ा कोण A तथा सबसे छोटा कोण B है।