12

संगामी रेखाएँ

रेखाओं और कोणों के पाठ में हम संगामी रेखाओं के बारे में पढ़ चुके हैं। हम त्रिभुजों में खींची जाने वाली कुछ विशेष रेखाओं, जैसे माध्यिकाओं, भुजाओं के लंब समद्विभाजकों, कोण समद्विभाजकों तथा शीर्ष लंबों के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। इस पाठ में हम इन रेखाओं के संगामी होने का गुणधर्म अध्ययन करेंगे जो आगे के पाठों में बहुत उपयोगी सिद्ध होगा।

उद्देश्य

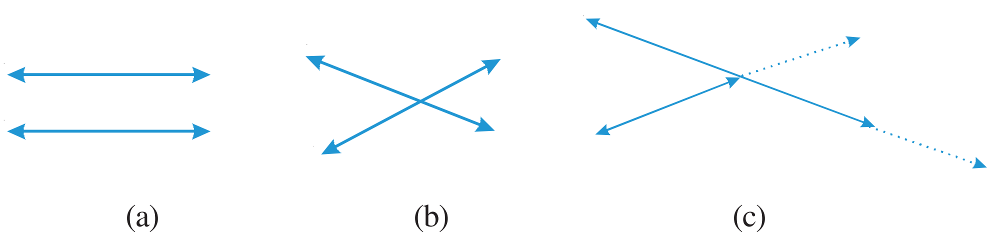
इस पाठ के अध्ययन के बाद आप समर्थ हो जाएंगे कि

- एक त्रिभुज की संगामी रेखाओं, माध्यिका, कोण समद्विभाजक, भुजा का लंब समद्विभाजक तथा शीर्ष लंब आदि पदों को परिभाषित कर सकें;
- त्रिभुज की माध्यिकाओं, कोण समद्विभाजकों, भुजाओं के लंब संमद्विभाजकों तथा शीर्ष लंबों के संगामी गुणों को सत्यापित कर सकें।

अपेक्षित पूर्व ज्ञान

प्रतिच्छेदी रेखाओं के गुणधर्म जैसे

- एक तल में खींची गई दो रेखाएँ समान्तर हो सकती हैं (आकृति 12.1a) अथवा प्रतिच्छेदी (आकृति 12.1 (b) तथा (c)].



आकृति 12.1

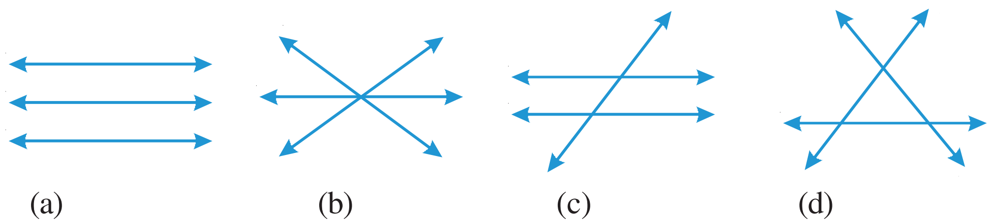
- एक तल में तीन रेखाएँ

  (i) एक दूसरे के समांतर हो सकती हैं, अर्थात किसी भी बिन्दु पर प्रतिच्छेद न करें [देखिए आकृति 12.2 (a)] या

  (ii) एक दूसरे को केवल एक ही बिन्दु पर प्रतिच्छेद करें। [देखिए आकृति 12.2(b)], या

  (iii) एक दूसरे को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करें। [देखिए आकृति 12.2(c)], या

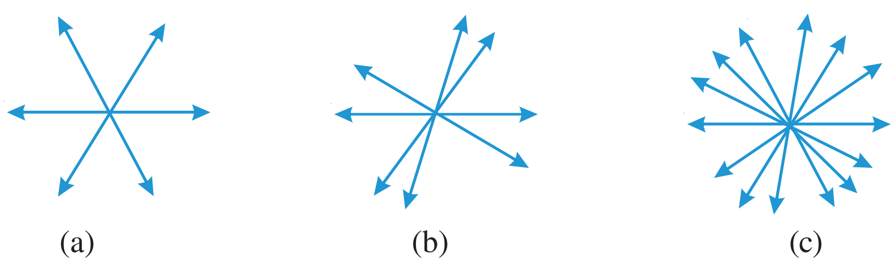
  (iv) एक दूसरे को अधिक से अधिक तीन बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करें। [देखिए आकृति 12.2(d)]



आकृति 12.2

12.1 संगामी रेखाएँ

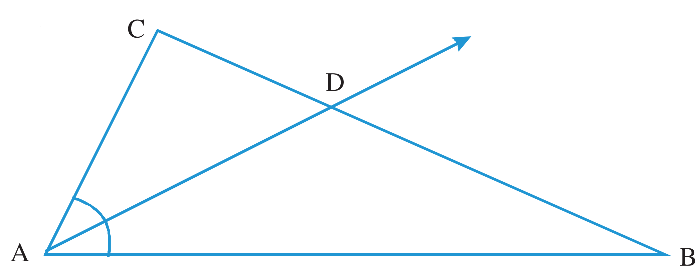
एक ही तल पर खींची गई तीन अथवा अधिक रेखाएँ जो एक दूसरे को केवल एक ही बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं अथवा एक ही बिंदु से गुजरती हैं संगामी रेखाएँ कहलाती हैं और प्रतिच्छेद बिंदु संगमन बिन्दु कहलाता है। (देखिए आकृति 12.3)



आकृति 12.3

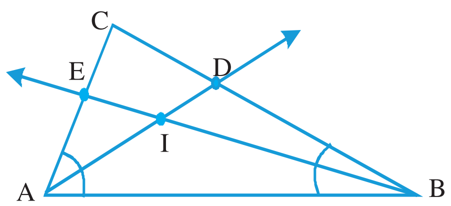
12.1.1 त्रिभुज के कोण समद्विभाजक

आकृति 12.4 में रेखा AD, त्रिभुज ABC के $\angle A$ को समद्विभाजित करती है।

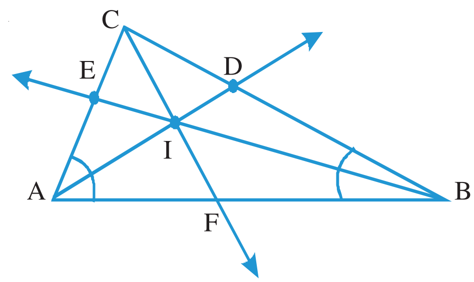


आकृति 12.4

एक रेखा जो त्रिभुज के किसी कोण को समद्विभाजित करती है, त्रिभुज की कोण समद्विभाजक कहलाती है। एक त्रिभुज के कितने कोण समद्विभाजक खींचे जा सकते हैं? क्योंकि एक त्रिभुज में तीन कोण होते हैं, अतः तीन ही कोण समद्विभाजक खींचे जा सकते हैं। AD त्रिभुज ABC के तीन कोण समद्विभाजकों में से एक है। आइए दूसरे कोण B का कोण समद्विभाजक BE भी खींचें। (देखिए आकृति 12.5)



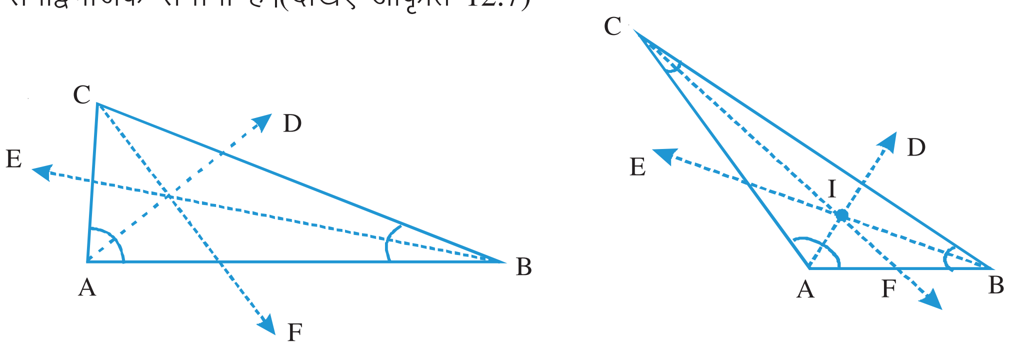
आकृति 12.5



आकृति 12.6

त्रिभुज ABC के ये दो कोण समद्विभाजक एक दूसरे को बिन्दु I पर प्रतिच्छेद करते हैं। अब आइए तीसरे कोण C का भी समद्विभाजक CF खींचते हैं (देखिए आकृति 12.6)। हम देखते हैं कि यह तीसरा कोण समद्विभाजक भी बिन्दु I से ही गुजरता है। दूसरे शब्दों में ये तीनों संगामी हैं और I इनका संगमन बिंदु है।

हम किसी भी प्रकार का त्रिभुज लें, न्यूनकोण, समकोण अथवा अधिक कोण त्रिभुज और किसी भी त्रिभुज के तीनों समद्विभाजक खींचे, तब हम यही पाएंगे कि त्रिभुज के तीनों कोण समद्विभाजक संगामी हैं।(देखिए आकृति 12.7)



आकृति 12.7

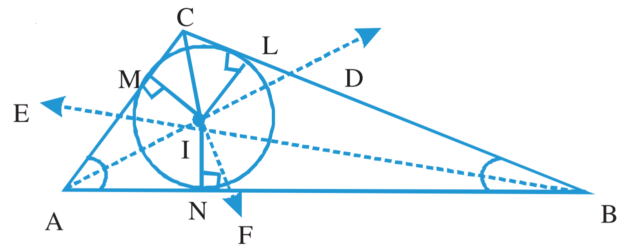
इस प्रकार हम निम्न निष्कर्ष पर पहुंचते हैं:

त्रिभुज के कोण समद्विभाजक एक ही बिन्दु से गजरते हैं अर्थात वह संगामी होते है।

संगमन बिंदु, I से निरूपित किया जाता है तथा यह त्रिभुज का अंतः केन्द्र कहलाता है।

क्या आप कारण सोच सकते हैं कि संगमन बिंदु को त्रिभुज का अंतः केन्द्र क्यों कहते हैं?

स्मरण कीजिए दो प्रतिच्छेदी रेखाओं से समदूरस्थ बिन्दुओं का बिन्दु पथ, उन रेखाओं के बीच बनने वाले कोणों के समद्विभाजक होते हैं। क्योंकि I भुजा AB तथा AC के बीच बने कोण के समद्विभाजक पर स्थित है, अतः यह उन दोनों भुजाओं से समदूरस्थ है। बिन्दु I भुजा BA तथा BC के बीच बने कोण के समद्विभाजक पर भी स्थित है, अतः यह इन दोनों भुजाओं से भी समदूरस्थ है। (देखिए आकृति 12.8) अर्थात यह संगमन बिन्दु I त्रिभुज की तीनों भुजाओं से समान दूरी पर है।



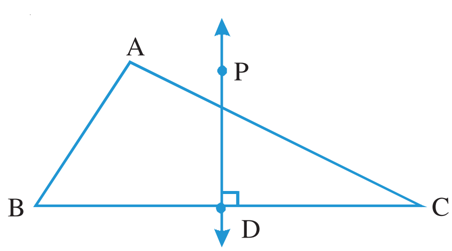
आकृति 12.8

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि IL = IM = IN (देखिए आकृति 12.8) अब यदि हम I को केन्द्र मानकर ओर IL को त्रिज्या लेकर एक वृत खींचे तब वह वृत्त त्रिभुजों की तीनों भुजाओं को स्पर्श करेगा। ऐसे वृत्त को हम त्रिभुज का अन्तः वृत्त कहते हैं, बिन्दु I उसका केन्द्र होने के कारण अंतः केन्द्र और IL त्रिभुज के अंतः वृत्त की त्रिज्या होने के कारण उसकी अंतः त्रिज्या कहलाती है।

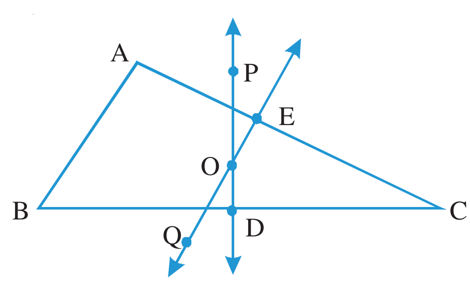
टिप्पणी: अंतकेन्द्र सदैव त्रिभुज के अंतः भाग में स्थित होता है।

12.1.2 त्रिभुज की भुजाओं के लंब समद्विभाजक

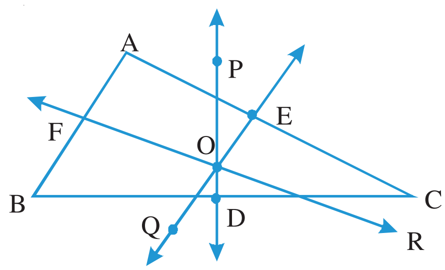
आकृति 12.9 में ΔABC की भुजा BC को रेखा DP समकोण पर समद्विभाजित करती है। एक रेखा जो किसी त्रिभुज की एक भुजा को समकोण पर समद्विभाजित करती है, त्रिभुज की भुजा का लंबसमद्विभाजक कहलाती है। क्योंकि त्रिभुज की तीन भुजाएँ होती हैं अतः एक त्रिभुज में तीन लंब समद्विभाजक खींचे जा सकते हैं जिनमें DP एक है। आइए हम दूसरी भुजा AC का लंब समद्विभाजक EQ खींचते हैं जो DP को बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करता है (देखिए आकृति 12.10)। अब यदि हम तीसरी भुजा AB का लंब समद्विभाजक FR भी खींचते हैं तब हम देखते हैं कि यह भी बिन्दु O से ही गुजरता है, (देखिए आकृति 12.11) अर्थात हम कह सकते हैं कि त्रिभुज के तीनों लंब समद्विभाजक बिन्दु O पर संगामी हैं।



आकृति 12.9

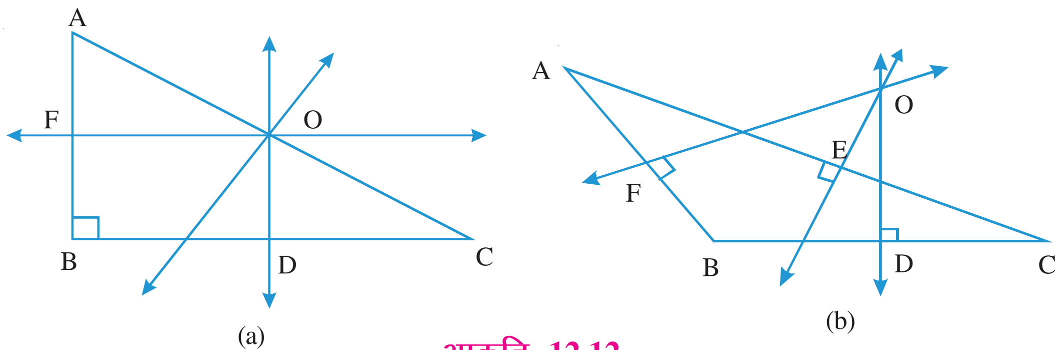


आकृति 12.10



आकृति 12.11

यदि हम इस प्रयोग को किसी भी प्रकार के त्रिभुज पर दोहराएँ, तो यही पाएंगे कि त्रिभुज की भुजाओं के तीनों लंब समद्विभाजक एक ही बिंदु से गुजरते हैं।



आकृति 12.12

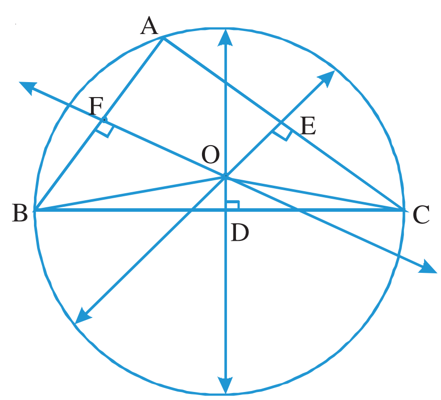
अतः हम निम्न निष्कर्ष पर पहुंचते हैं कि

एक त्रिभुज की भुजाओं के तीनों लंब समद्विभाजक एक ही बिंदु से गुजरते हैं अथवा वह संगामी होते हैं।

संगमन बिंदु O त्रिभुज का परिकेन्द्र कहलाता है।

क्या आप बता सकते हो कि इस बिंदु को त्रिभुज का परिकेन्द्र क्यों कहते हैं?

स्मरण कीजिए कि दो दिए गए बिन्दुओं से समदूरस्थ बिंदु का बिन्दुपथ, उन दोनों बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड का लंब समद्विभाजक होता है। क्योंकि O बिंदु, BC के लंब समद्विभाजक पर स्थित है, अतः यह दोनों बिंदुओं B तथा C से समान दूरी पर है अतः BO = CO (देखिए आकृति 12.13).



आकृति 12.13

O बिंदु, AC के भी लंब समद्विभाजक पर स्थित है। अतः यह बिंदुओं A तथा C से भी समान दूरी पर है। इस प्रकार AO = BO = CO.

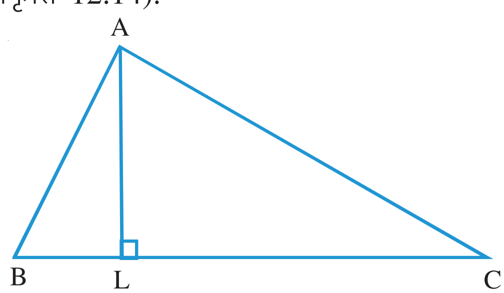
यदि हम O को केन्द्र मानकर तथा AO त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचे, तब वह त्रिभुज के तीनों शीर्ष A, B तथा C में गुजरेगा। यह वृत्त त्रिभुज का **परिवृत** कहलाता है परिवृत्त का केन्द्र O **परिकेन्द्र** तथा परिवृत्त की त्रिज्या AO **परित्रिज्या** कहलाती है।

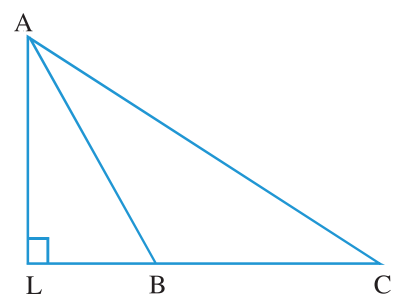
ध्यान में रखिए कि परिकेन्द्र

1. त्रिभुज के अंतः भाग में होगा यदि वह न्यूनकोण त्रिभुज है। (आकृति 12.11)
2. कर्ण पर स्थित होगा यदि वह समकोण त्रिभुज है। [आकृति 12.12(a)]
3. त्रिभुज के बाह्य भाग में होगा यदि वह अधिक कोण त्रिभुज है। [आकृति 12.12(b)].

12.1.3 त्रिभुज के शीर्षलंब

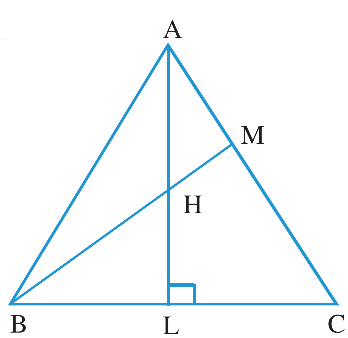
त्रिभुज ABC में, रेखा AL शीर्ष A से सामने की भुजा BC पर डाला गया एक लंब है। (आकृति 12.14).



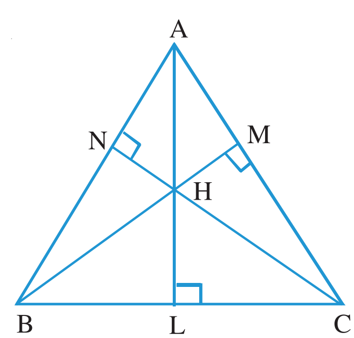


आकृति 12.14

एक त्रिभुज के किसी शीर्ष से सामने की भुजा पर डाला गया लंब, उसका शीर्षलंब कहलाता है। एक त्रिभुज में कितने शीर्षलंब खींचे जा सकते हैं? त्रिभुज में तीन शीर्ष होते हैं अतः उसमें तीन ही शीर्षलंब खींचे जा सकते है। AL इन तीनों में एक शीर्षलंब है। अब हम दूसरा शीर्षलंब BM खींचते हैं जो पहले शीर्षलंब AL को बिंदु H पर प्रतिच्छेद करता है (देखिए आकृति 12.15)। अब हम तीसरा शीर्षलंब CN भी खींचते हैं और देखते हैं कि यह भी बिंदु H से ही गुजरता है (देखिए आकृति 12.16)। इससे पता चलता है कि त्रिभुज के तीनों शीर्षलंब एक ही बिंदु से गुजरते हैं।

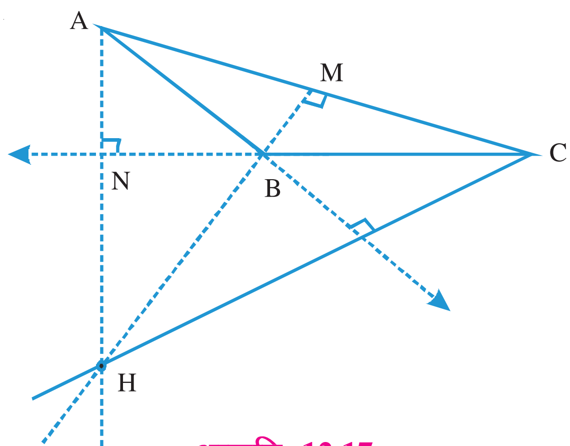


आकृति 12.15

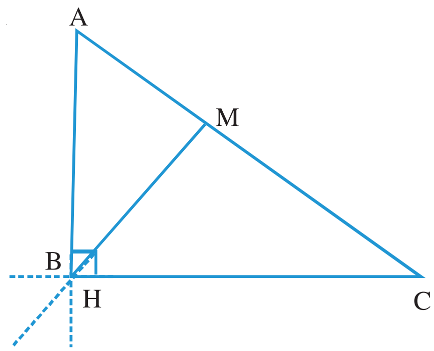


आकृति 12.16

हम चाहे किसी प्रकार का भी त्रिभुज लें और इसके तीनों शीर्ष लंब खींचें, परन्तु यही पाएंगे कि त्रिभुज की तीनों शीर्षलंब संगामी हैं।



आकृति 12.17



आकृति 12.18

अतः हम निम्न निष्कर्ष पर पहुंचते हैं:

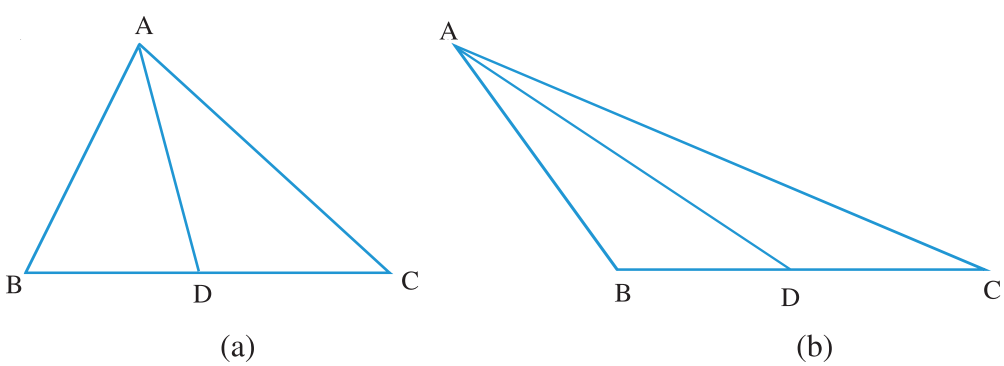
एक त्रिभुज के तीनों शीर्षलंब एक ही बिंदु से गुजरते हैं अर्थात वह संगामी होते हैं।
संगमन बिन्दु H (आकृति 12.17 में बिंदु B) त्रिभुज का लंबकेन्द्र कहलाता है।

पुनः ध्यान दीजिए कि लंबकेन्द्र H

1. त्रिभुज के अंतः भाग में होगा, यदि त्रिभुज न्यूनकोण त्रिभुज है। (आकृति 12.16)
2. त्रिभुज के बाह्य भाग में होगा, यदि त्रिभुज अधिक कोण त्रिभुज है। (आकृति 12.17)
3. समकोण वाला शीर्ष ही होगा यदि त्रिभुज समकोण त्रिभुज है। (आकृति 12.18)

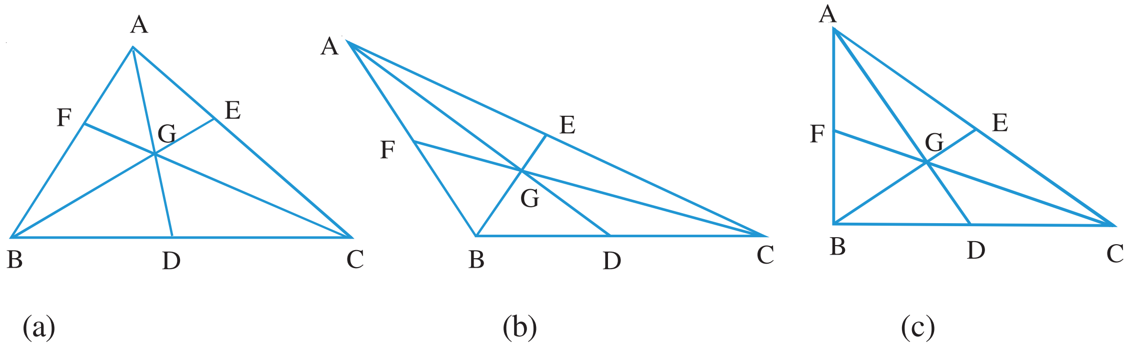
12.1.4 त्रिभुज की माध्यिकाएँ

त्रिभुज ABC में, रेखा AD शीर्ष A को सामने वाली भुजा BC के मध्य बिंदु D से मिलाती है। (आकृति 12.19)



आकृति 12.19

एक त्रिभुज के किसी शीर्ष को सामने वाली भुजा के मध्य बिंदु से मिलाने वाली रेखा, उसकी माध्यिका कहलाती है। स्पष्ट है कि एक त्रिभुज में तीन माध्यिकाएँ खींची जा सकती हैं, AD उनमें से एक है। यदि हम किसी त्रिभुज की तीनों माध्यिकाएं खींचते हैं तब सदैव यही पाते हैं कि तीनों माध्यिकाएँ एक ही बिंदु से गुजरती हैं। [देखिए आकृति 12.20 (a), (b), (c)]



आकृति 12.20

आकृति 12.20 के प्रत्येक त्रिभुज ABC में तीनों माध्यिकाएँ AD, BE तथा CF एक ही बिंदु G पर संगामी हैं। प्रत्येक त्रिभुज में, प्रत्येक माध्यिका के G द्वारा विभाजन से प्राप्त दोनों भागों को मापते हैं। मापने पर हम देखते हैं कि

$$AG = 2GD,\ BG = 2GE$$

तथा $$CG = 2\ GF$$

अर्थात संगमन बिंदु G प्रत्येक माध्यिका को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

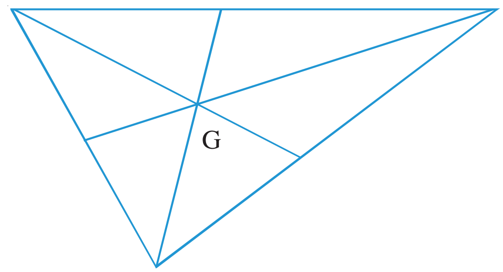
अतः हम निम्न निष्कर्ष पर पहुंचते हैं:

त्रिभुज की माध्यिकाएँ एक ही बिंदु से गुजरती हैं, जो प्रत्येक माध्यिका को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करती हैं।

संगमन बिन्दु G त्रिभुज का केन्द्रक कहलाता है।

आपके लिए क्रियाकलाप

गत्ते के किसी टुकड़े में से एक त्रिभुज काटिए। इसमें त्रिभुज की तीनों माध्यिकाएँ तथा केन्द्रक G अंकित कीजिए। अब किसी पेंसिल या छड़ी या परकार की नोक G पर रखकर त्रिभुज को संतुलित करने का प्रयास कीजिए। यदि G की स्थिति सही सही आंकी गई है तब आप देखेंगे कि त्रिभुज का भार G पर संतुलित हो जाएगा। (देखिए आकृति 12.21).



आकृति 12.21

क्या आप कारण सोच सकते हैं कि त्रिभुज की माध्यिकाओं के संगमन बिन्दु को केन्द्रक क्यों कहते हैं? यह वह बिन्दु है जहाँ त्रिभुज का भार केन्द्रित होता है। अथवा जहाँ त्रिभुज की भार रेखा गुजरती है या कार्य करती है।

अब हम इन गुणधर्मों पर आधारित कुछ समस्याएँ हल करते हैं।

उदाहरण 12.1: एक समद्विबाहु त्रिभुज में दर्शाइए कि समान भुजाओं के बीच बने कोण का समद्विभाजक उस त्रिभुज का एक शीर्षलंब, एक माध्यिका तथा एक भुजा का लंब समद्विभाजक भी होता है।

हल: त्रिभुज ABD तथा त्रिभुज ACD में,

$AB = AC$ (दिया है)

$\angle BAD = \angle CAD$ [$\because$ AD, $\angle A$ का समद्विभाजक है]

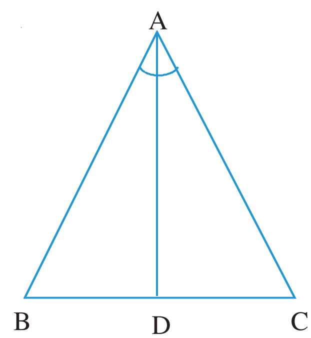
तथा $AD = AD$

$\therefore$ $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

$\therefore$ $BD = CD$

$\Rightarrow$ AD एक माध्यिका भी है।

तथा $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$



आकृति 12.22

$\because$ $BD = DC$,

अतः AD भुजा BC का लंब समद्विभाजक है।

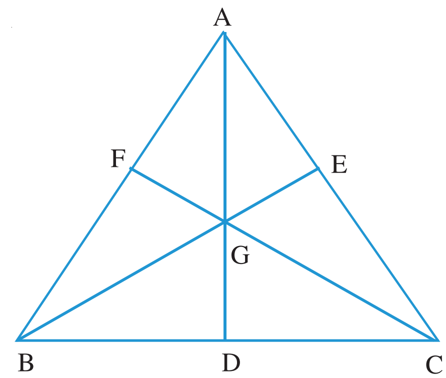
उदाहरण 12.2: एक समबाहु त्रिभुज में दर्शाइए कि तीनों कोणों के समद्विभाजक, तीनों शीर्ष लंब, तीनों माध्यिकाएँ तथा तीनों भुजाओं के लंब समद्विभाजक भी हैं।

हल: $AB = AC$

ΔABC में, $\angle A$ समद्विभाजक AD एक शीर्ष लंब, एक माध्यिका तथा भुजा का लंब समद्विभाजक है (जैसा ऊपर उदाहरण 12.1 में दर्शाया गया है)

इसी प्रकार Θ AB = BC तथा BC = AC है,

$\therefore$ ΔABC में $\angle B$ तथा $\angle C$ में समद्विभाजक क्रमशः BE तथा CF, ΔABC के शीर्षलंब, माध्यिकाएँ तथा भुजाओं के लंब समद्विभाजक भी हैं।

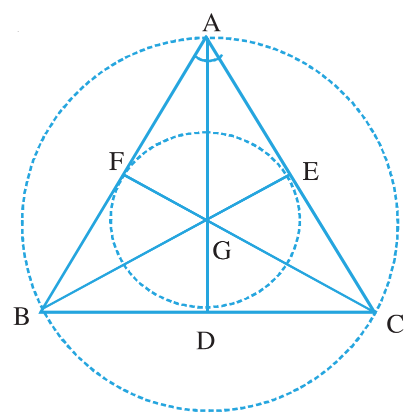


आकृति 12.23

उदाहरण 12.3: एक समबाहु त्रिभुज की भुजा की लंबाई a है। उसके परिवृत की परित्रिज्या तथा अंतः वृत्त की अंतःत्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: एक समबाहु त्रिभुज ABC में शीर्ष A से भुजा BC पर लंब AD की रचना करते हैं।

AD त्रिभुज की माध्यिका है, $\angle A$ का समद्विभाजक तथा भुजा BC का लंब समद्विभाजक भी है।



आकृति 12.24

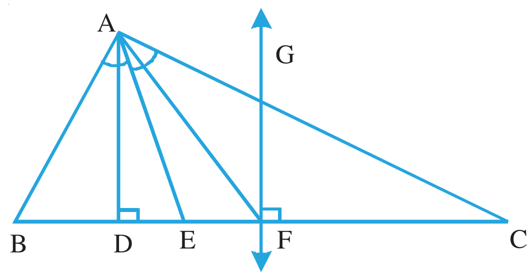
$\therefore \quad AD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a,$ चूंकि $BC = a$

$\Rightarrow \quad AG =$ परिवृत्त की परित्रिज्या $= \dfrac{2}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

तथा $\quad GD =$ अंतःवृत्त की अंतः त्रिज्या $= \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}a = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a.$

देखें आपने कितना सीखा 12.1

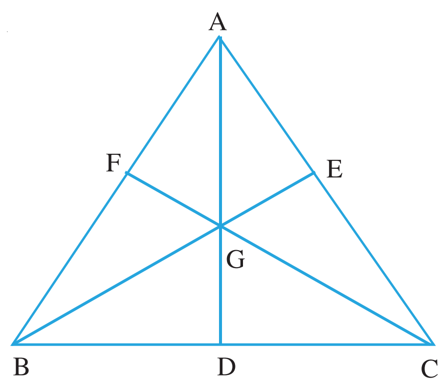
1. आकृति 12.25 में, $BF = FC$, $\angle BAE = \angle CAE$ तथा $\angle ADE = \angle GFC = 90^\circ$, है तो त्रिभुज के एक शीर्ष लंब, एक माध्यिका, एक कोण समद्विभाजक तथा एक भुजा के लंब समद्विभाजक के नाम लिखिए।



आकृति 12.25

2. एक समबाहु त्रिभुज में दर्शाइए कि उसका अंतः केन्द्र, परिकेन्द्र, लंब केन्द्र तथा केन्द्रक एक ही बिंदु होता है।

3. एक समबाहु त्रिभुज ΔABC में, (आकृति 12.26) G उसका केन्द्रक है। यदि AG की माप 4.8 सेमी हो, तो AD तथा BE की माप ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.26

4. यदि किसी त्रिभुज ΔABC का लंबकेन्द्र H है, तो दर्शाइए कि त्रिभुज ΔHBC का लंब केन्द्र A है।

5. निम्न प्रश्नों में दी गई संभावनाओं में से सही उत्तर चुनकर लिखिए:

   (i) त्रिभुज के तीनों शीर्षों से उसी तल में समदूरस्थ बिंदु कहलाता है:

   (a) केन्द्रक (b) अंतः केन्द्र

   (c) परिकेन्द्र (d) लंब केन्द्र

(ii) त्रिभुज के एक ही तल में, उसकी तीनों भुजाओं से समदूरस्थ बिंदु कहलाता है:

(a) केन्द्रक (b) अंतः केन्द्र

(c) परिकेन्द्र (d) लंब केन्द्र

आइए दोहराएँ

- एक ही तल में तीन या अधिक रेखाएँ जो एक दूसरे को केवल एक ही बिंदु पर काटती हैं, संगामी रेखाएँ कहलाती हैं।
- एक रेखा जो किसी त्रिभुज के एक कोण को समद्विभाजित करती हैं, उसका कोण समद्विभाजक कहलाती है।
- एक रेखा जो किसी त्रिभुज की एक भुजा को समकोण बनाती हुई समद्विभाजित करती है उस भुजा का लंब समद्विभाजक कहलाती है।
- किसी त्रिभुज में एक शीर्ष से सम्मुख भुजा पर गिराया गया लंब, उसका शीर्षलंब कहलाता है।
- किसी त्रिभुज में एक शीर्ष को सम्मुख भुजा के मध्य बिंदु से मिलाने वाली रेखा उसकी माध्यिका कहलाती है।
- **किसी त्रिभुज में**

  (i) कोण समद्विभाजक संगामी होते हैं तथा संगमन बिंदु उसके अंत वृत्त का केंद्र होता है, इसलिए अंतःकेन्द्र कहलाता है।

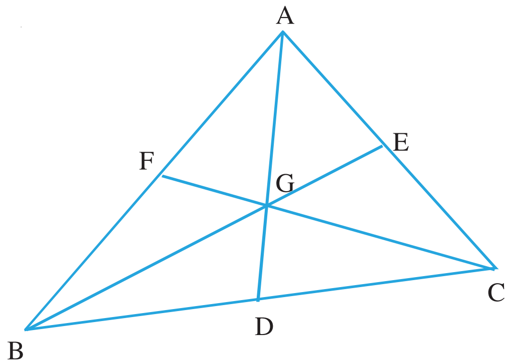
  (ii) भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक संगामी होते है तथा संगमन बिन्दु उसके परिवृत्त का केन्द्र होता है इसलिए परिकेन्द्र कहलाता है।

  (iii) तीनों शीर्षलंब संगामी होते हैं तथा संगमन बिंदु को लंबकेन्द्र कहते हैं।

  (iv) तीनों माध्यिकाएँ संगामी होती हैं तथा संगमन बिंदु को केन्द्रक कहते हैं जो प्रत्येक माध्यिका को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

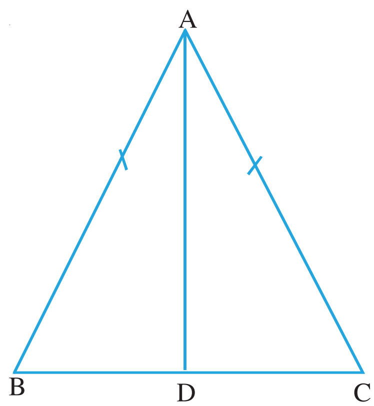
आइए अभ्यास करें

1. दी गई आकृति 12.27 में, D, E तथा F, ΔABC की भुजाओं के मध्य बिंदु हैं। दर्शाइए कि $BE + CF > \frac{3}{2}BC$ है।



आकृति 12.27

2. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC में, AB = AC और D भुजा BC का मध्य बिंदु है। दर्शाइए कि त्रिभुज का केन्द्रक, लंबकेन्द्र, अंतःकेन्द्र तथा परिकेन्द्र, सभी AD पर स्थित होंगे।



आकृति 12.28

3. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC में, AB = AC = 17 सेमी तथा BC = 16 सेमी है। यदि त्रिभुज का केन्द्रक G है, तो AG ज्ञात कीजिए।

4. एक समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा 12 सेमी है। यदि G उसका केन्द्रक है, तो AG ज्ञात कीजिए।

आपके लिए कुछ क्रियाकलाप

1. एक त्रिभुज ABC खींचकर उसका परिकेन्द्र ज्ञात कीजिए तथा त्रिभुज का परिवृत भी खींचिए।

2. एक समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए। इसके अंतःकेन्द्र तथा परिकेन्द्र ज्ञात कर अंतः वृत्त तथा परिवृत्त भी खींचिए।

3. 5 सेमी भुजा का एक समबाहु त्रिभुज बनाकर उसके अंतःवृत्त तथा परिवृत्त की रचना कीजिए।

देखें आपने कितना सीखा के उत्तर

12.1

1. माध्यिका : AF, कोण समद्विभाजक : AE

   शीर्षलंब : AD तथा लंब समद्विभाजक : GF

3. AD = 7.2 सेमी, BE = 7.2 सेमी

5. (i) (c)   (ii) (b)

आइए अभ्यास करें के उत्तर

3. AG = 10 सेमी

4. AG = $4\sqrt{3}$ सेमी