13

चतुर्भुज

यदि आप अपने आसपास देखें तो बहुत सी वस्तुएँ चार रेखाखंडों से घिरी हुई पायेंगे। एक पुस्तक, खिड़की, दरवाजा, खिड़की की चौखठ के कुछ हिस्से, डबलरोटी का एक टुकड़ा, आपके कमरे का फर्श, इत्यादि ये सारे एक बन्द आकृति के उदाहरण हैं जो कि चार रेखा खण्डों से घिरे हुए हैं। ऐसी आकृति एक चतुर्भुज कहलाती है।

Quadrilateral (चतुर्भुज) शब्द दो शब्दों क्वाडरी (quadri) जिसका अर्थ चार है तथा लेटरल (lateral) जिसका अर्थ है भुजाएँ, से बना है। इसलिए चतुर्भुज एक रेखागणितीय आकृति है जिसकी चार भुजाएँ होती हैं जो कि तल के एक भाग से घिरी है।

इस पाठ में, हम चतुर्भुज से सम्बन्धित पदों तथा संकल्पनाओं का, तथा उनके गुण धर्मों का अध्ययन करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप समर्थ हो जाएंगे कि:

- विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों , जैसे कि समलम्ब चतुर्भुज, समांतर चतुर्भुज, आयत, समचतुर्भुज तथा वर्ग, का वर्णन कर सकें;
- चतुर्भुज के विभिन्न प्रकारों के गुणधर्मों को सत्यापित कर सकें;
- सत्यापित कर सकें कि त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड तीसरी भुजा के समांतर और लम्बाई में उसका आधा होता है;
- सत्यापित कर सकें कि त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु से एक अन्य भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को उसके मध्य बिन्दु पर प्रतिच्छेदित करती है;
- सत्यापित कर सकें कि यदि तीन या तीन से अधिक समांतर रेखाएँ एक तिर्यक रेखा पर समान अन्तःखंड बनाती हों, तो वे किसी अन्य तिर्यक रेखा पर भी समान अंतःखंड ही बनाती है;

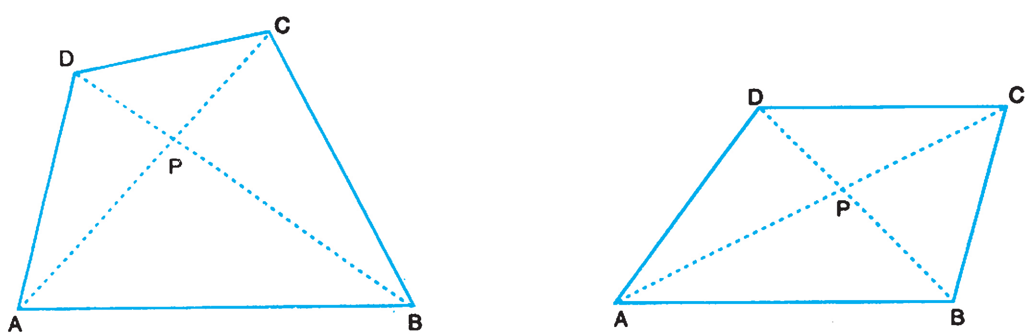
- सत्यापित कर सकें कि एक समांतर चतुर्भुज का विकर्ण इसे बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में बाँटता है;
- तारांकित परिणामों पर आधारित समस्याओं को हल कर सकें तथा अतारांकित परिणामों पर आधारित संख्यात्मक प्रश्नों को हल कर सकें;
- सिद्ध कर सकें कि एक ही (अथवा समान) आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच के समांतर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल समान होते हैं;
- सिद्ध कर सकें कि एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच के त्रिभुजों के क्षेत्रफल समान होते हैं;

अपेक्षित पूर्व ज्ञान

- दी हुई माप के रेखाखंडों तथा कोणों का खींचना।
- दी हुई त्रिज्या के वृत/चापों का खींचना।
- समांतर एवं लम्ब रेखाओं का खींचना।
- संख्याओं पर आधारभूत संक्रियाएँ।

13.1 चतुर्भुज

हम जानते हैं कि यदि A, B, C तथा D एक समतल में ऐसे चार बिन्दु हैं जिनमें से कोई भी तीन संरेख नहीं हैं और रेखा खण्ड AB, BC, CD तथा DA अपने शीर्ष बिन्दुओं के अलावा कहीं प्रतिच्छेदित नहीं करते तो इन चार रेखाखंडों द्वारा बनी बन्द आकृति को चतुर्भुज कहा जाता है जिसमें A, B, C तथा D इसके शीर्ष बिन्दु कहलाते हैं। शीर्ष बिन्दुओं A, B, C तथा D वाले चतुर्भुज को चतुर्भुज ABCD द्वारा दर्शाया जाता है। आकृति 13.1 (i) तथा (ii) में चतुर्भुजों को चतुर्भुज ABCD या केवल ABCD लिखा जाता है।



(i) (ii)

आकृति 13.1

आप जानते हैं कि चतुर्भुज ABCD में,

(i) AB तथा DC ; BC तथा AD सम्मुख भुजाओं के दो युग्म हैं।

(ii) $\angle A$ तथा $\angle C$; $\angle B$ तथा $\angle D$ सम्मुख कोणों के दो युग्म हैं।

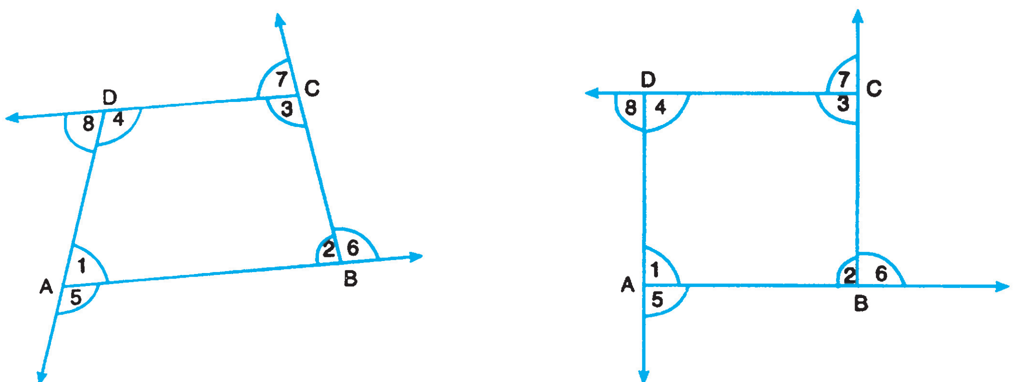
(iii) AB तथा BC ; BC तथा CD आसन्न (या संलग्न) भुजाओं के दो युग्म हैं। क्या आप दूसरे संलग्न भुजाओं के युग्म लिख सकते हैं?

(iv) $\angle A$ तथा $\angle B$; $\angle B$ तथा $\angle C$ संलग्न कोणों के दो युग्म हैं। क्या आप दूसरे संलग्न कोणों के युग्म लिख सकते हैं?

(v) AC तथा BD दो विकर्ण हैं।

आकृति 13.2 (i) (ii) में, 1, 2, 3 तथा 4 द्वारा दर्शाये गये कोण चतुर्भुज ABCD के अंतः कोण हैं। 5, 6, 7 तथा 8 द्वारा दर्शाये गये कोण चतुर्भुज ABCD के बाह्य कोण हैं।

$\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ और $\angle 4$ को मापिये।



(i) (ii)

आकृति 13.2

इन कोणों का योगफल क्या है? आप देखेंगे कि $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360°$.

अर्थात् एक चतुर्भुज के अन्तः कोणों का योग 360° होता है।

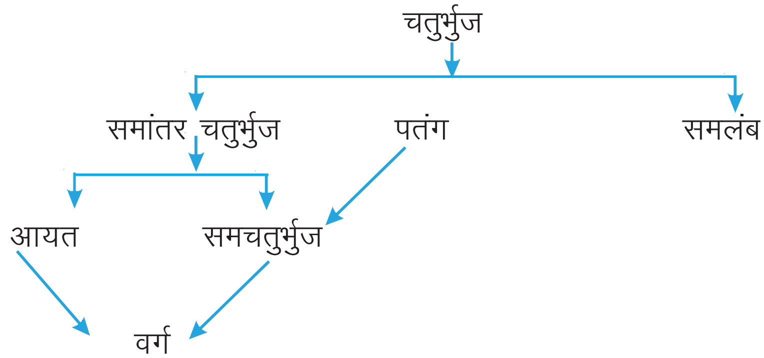
चतुर्भुज ABCD के बाह्य कोणों का योगफल क्या है?

आप फिर देखेंगे कि $\angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 = 360°$

अर्थात् एक चतुर्भुज के बाह्य कोणों का योग 360° होता है।

13.2 चतुर्भुजों के प्रकार

आप चतुर्भुजों और उनकी विभिन्न आकृतियों से भली–भाँति परिचित हैं। आप यह भी जानते हैं कि उनके क्या नाम हैं। फिर भी, अब हम चतुर्भुजों के विभिन्न प्रकारों का सुचारु रूप से अध्ययन करेंगे। आकृति 13.3 में चतुर्भुजों को पारिवारिक वृक्ष द्वारा दर्शाया गया है।

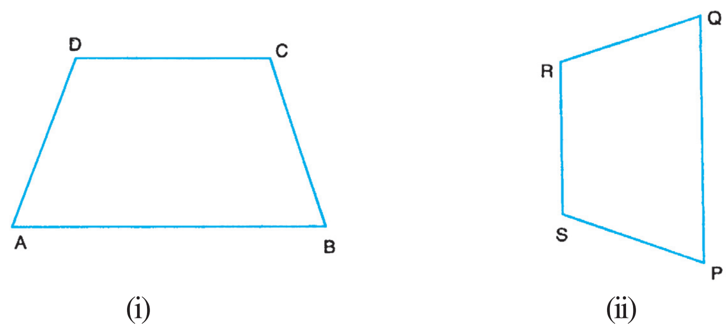


आकृति 13.3

अब हम इनका एक–एक करके वर्णन करेंगे।

1. समलम्ब

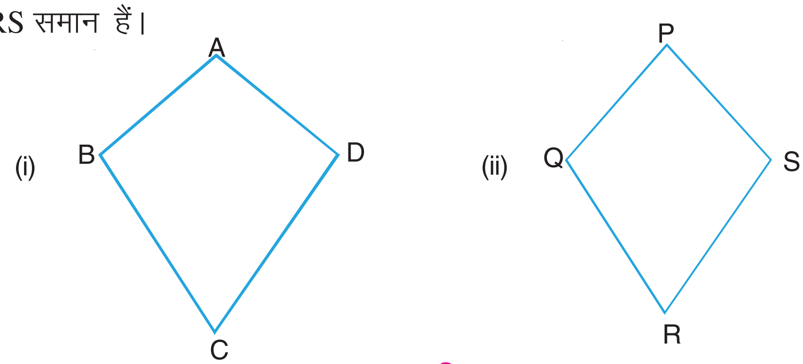
एक चतुर्भुज, जिसमें सम्मुख भुजाओं का एक युग्म समांतर है, एक समलम्ब कहलाता है। आकृति 13.4 [(i) तथा (ii)] ABCD और PQRS समलंब हैं जिनमें AB || DC और PQ || SR हैं।



आकृति 13.4

2. पतंग

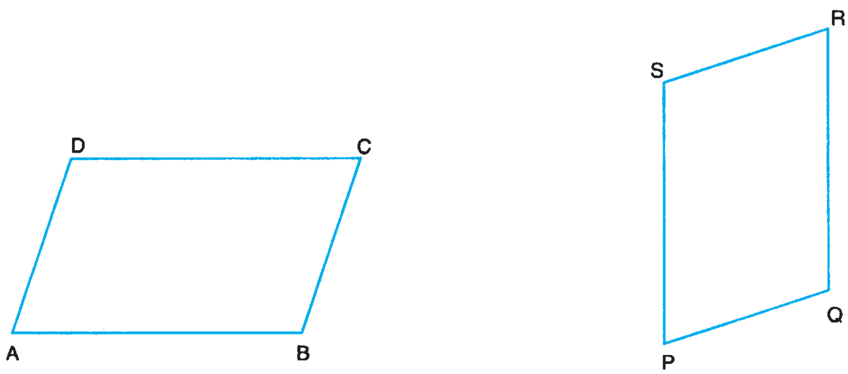
एक चतुर्भुज, जिसके समाज भुजाओं के दो युग्म इस प्रकार हों, कि प्रत्येक युग्म में समान भुजाएँ एक दूसरे के साथ हों, पतंग कहलाता है। आकृति 13.5 [(i) तथा (ii)] में ABCD तथा PQRS पतंग हैं। जिनमें, (i) में आसन्न भुजाएँ AB तथा AD, BC और CD तथा (ii) में PQ और PS, QR और RS समान हैं।



आकृति 13.5

3. समांतर चतुर्भज

एक चतुर्भुज जिसमें भुजाओं के दोनों युग्म परस्पर समांतर हों, समांतर चतुर्भुज कहलाता है। आकृति 13.6 [(i) और (ii)] में ABCD और PQRS समांतर चतुर्भुज हैं जिनमें AB||DC, AD||BC तथा PQ||SR, SP||RQ इन्हें ||gm ABCD और ||gm PQRS द्वारा दर्शाया जाता है।



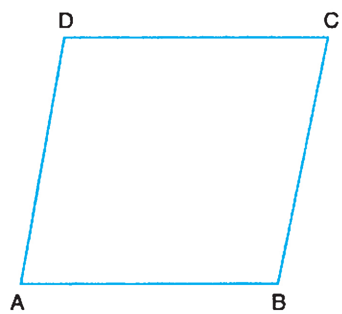
(i) (ii)

आकृति 13.6

4. समचतुर्भुज

समचतुर्भुज एक ऐसा समांतर चतुर्भुज है, जिसमें संलग्न भुजाओं का कोई भी युग्म बराबर है। आकृति 13.7 में, ABCD एक समचतुर्भुज है।

आप देख रहें हैं कि ABCD एक समांतर चतुर्भज है जिसमें AB = BC = CD = DA अर्थात संलग्न भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर है।

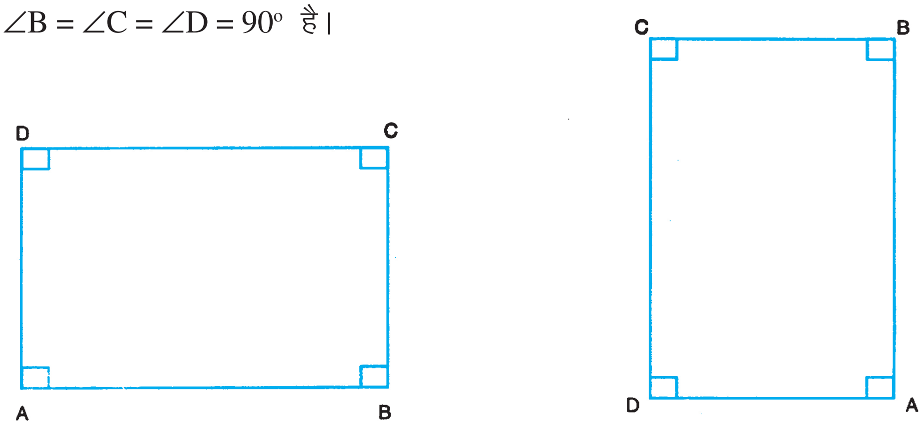


आकृति 13.7

5. आयत

एक समांतर चतुर्भज जिसमें यदि एक कोण समकोण है, एक आयत कहलाता है।

आकृति 13.8 में, ABCD एक आयत है जिसमें AB||DC, AD||BC और $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^o$ है।

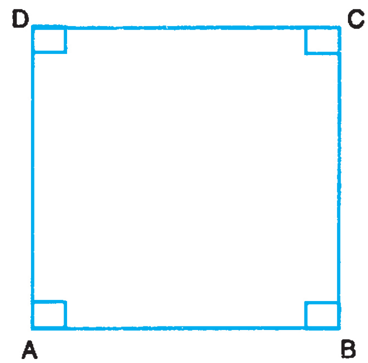


आकृति 13.8

6. वर्ग

एक आयत जिसमें यदि आसन्न भुजाओं का एक युग्म बराबर हो, वर्ग कहलाता है।

दूसरे शब्दों में समांतर चतुर्भुज जिसमें सारी भुजाएँ बराबर हैं और प्रत्येक कोण समकोण है, वर्ग कहलाता है।

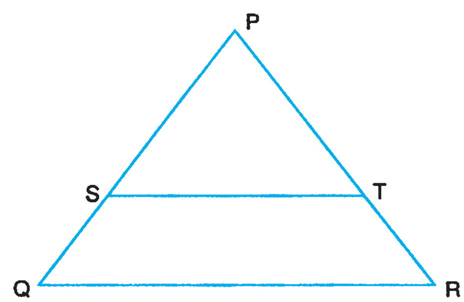


आकृति 13.9

आकृति 13.9 में, ABCD एक वर्ग है। जिसमें AB||DC, AD||BC, तथा AB = BC = CD = DA और $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^o$ है।

विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों को दर्शाने के लिए हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 13.1: आकृति 13.10 में, PQR एक त्रिभुज है। भुजाओं PQ और PR पर S तथा T दो ऐसे बिन्दु हैं कि ST||QR. चतुर्भुज STRQ किस प्रकार का चतुर्भुज है?



आकृति 13.10

हल: चतुर्भुज STRQ एक समलम्ब है क्योंकि ST||QR.

उदाहरण 13.2: एक चतुर्भुज के तीन कोणों का माप क्रमशः 100^o, 50^o और 70^o है। चौथे कोण का माप ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि एक चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360^o होता है।

तब $\quad 100^o + 50^o + 70^o + x^o = 360^o$

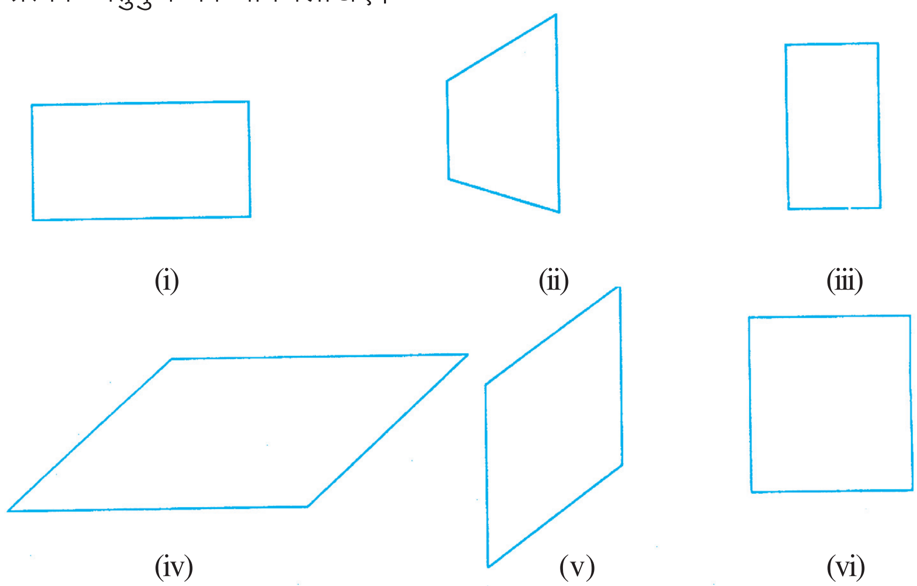
या $\quad 220^o + x^o = 360^o$

$\therefore \quad x = 140$

इसलिए चौथे कोण की माप 140^o है।

देखें आपने कितना सीखा 13.1

1. प्रत्येक चतुर्भुज का नाम लिखिए।



आकृति 13.11

2. बताइये निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य हैं?

    (i) एक चतुर्भुज के अंतः कोणों का योग 360° है।

    (ii) सारे आयत, वर्ग होते हैं।

    (iii) एक आयत, समांतर चतुर्भज है।

    (iv) एक वर्ग, समचतुर्भुज होता है।

    (v) एक समचतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है।

    (vi) एक वर्ग, एक समांतर चतुर्भुज है।

    (vii) एक समांतर चतुर्भुज एक समचतुर्भुज है।

    (viii) एक समलंब एक समांतर चतुर्भुज है।

    (ix) एक समलम्ब एक आयत होता है।

    (x) एक समांतर चतुर्भुज एक समलम्ब है।

3. एक चतुर्भुज में यदि सारे कोण बराबर हों, तो प्रत्येक कोण का माप ज्ञात कीजिए।

4. एक चतुर्भुज के कोण 5:7:7: 11 के अनुपात में हैं। प्रत्येक कोण का माप ज्ञात कीजिए।

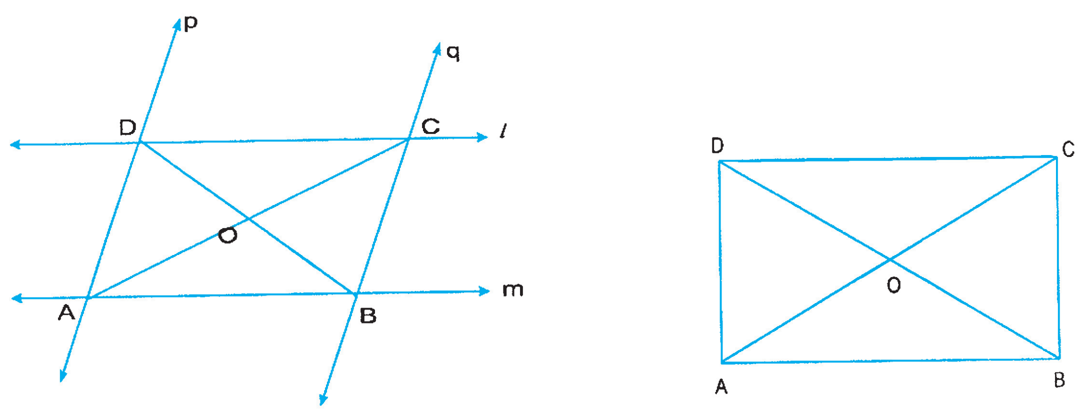
5. यदि एक चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का एक युग्म सम्पूरक हो, तो सम्मुख कोणों के दूसरे युग्म के बारे में आप क्या कहेंगे?

13.3 विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों के गुणधर्म

1. समांतर चतुर्भुज के गुणधर्म

हमने यह सीख लिया है कि सम्मुख भुजाओं के युग्मों के समांतर होने वाले चतुर्भुज को समान्तर चतुर्भुज कहते हैं। अब हम समान्तर चतुर्भुज की भुजाओं, कोणों और विकर्णों के बीच कुछ संबंध स्थापित करते हैं।

जैसा कि आकृति 13.12 में दर्शाया गया है, समांतर रेखाओं l तथा m का एक युग्म खींचिए और समांतर रेखाओं p तथा q का दूसरा युग्म खींचिए कि यह l और m को प्रतिच्छेद करते हैं।



आकृति 13.12

आप देख सकते हैं कि एक समांतर चतुर्भुज ABCD बन गया है। AC और BD को मिलाइये। वे एक दूसरे को बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

अब भुजाओं AB, BC, CD और DA को मापिये। आप क्या पाते हैं?

आप देखेंगे कि AB = DC और BC = AD है।

$\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ और $\angle DAB$ को भी मापिये।

आप क्या पाते हैं? आप पायेंगे कि

$\angle DAB = \angle BCD$ और $\angle ABC = \angle CDA$

फिर से OA, OC, OB और OD को मापिए।

आप क्या पाते हैं?

आप पायेंगे कि $OA = OC$ और $OB = OD$

दूसरा समांतर चतुर्भुज खींचिए और सारी विधि फिर दोहराइए। आप पायेंगे कि

समांतर चतुर्भुज की आमने सामने की भुजाएँ समान हैं।

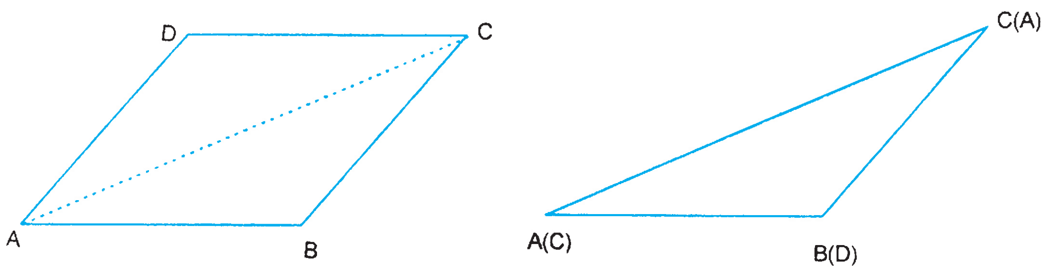
समांतर चतुर्भुज के आमने सामने के कोण समान हैं।

समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

ऊपर दिये गये समांतर चतुर्भुज के गुणधर्म, नीचे दिये गये गत्ते के बोर्ड के मॉडल द्वारा भी सत्यापित किये जा सकते हैं।

आइए एक गत्ते का बोर्ड लें। इस पर एक समांतर चतुर्भुज ABCD बनाइये। इसका विकर्ण AC खींचिए जैसा कि आकृति 13.13 में दिखाया गया है। गत्ते के बोर्ड से समांतर चतुर्भुज ABCD काट लीजिए।

अब समांतर चतुर्भुज ABCD को विकर्ण AC के साथ काटिए। इस प्रकार समांतर चतुर्भुज ABCD दो भागों में बाँट दिया गया है और प्रत्येक भाग एक त्रिभुज है। दूसरे शब्दों में आपको दो त्रिभुज ΔABC तथा ΔADC प्राप्त होते हैं। अब ΔADC को ΔABC पर इस प्रकार से रखिए कि शीर्ष बिन्दु B शीर्ष बिन्दु D पर गिरे और भुजा CD भुजा AB को पूरी तरह ढक ले।



आकृति 13.13

बिन्दु C की स्थिति क्या होगी?

बिन्दु D की स्थिति क्या होगी?

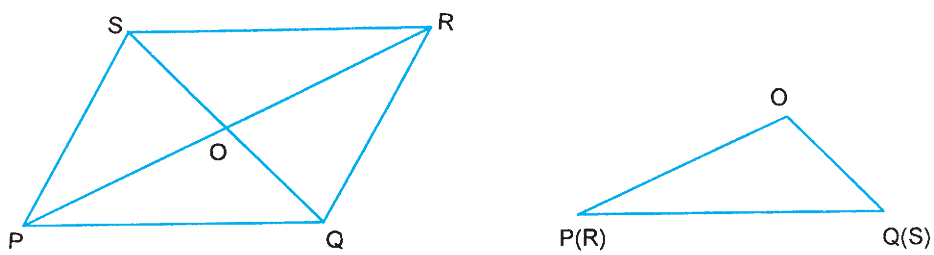
आप देखेंगे कि ΔADC, ΔABC को पूरी तरह ढक लेगा। दूसरे शब्दों में $\Delta ABC \cong \Delta ADC$ और $AB = CD$ और $BC = AD$ और $\angle B = \angle D$ है।

आप कुछ दूसरे समांतर चतुर्भुज लेकर इस कार्य को दोहरा सकते हैं और आपको हमेशा वही परिणाम प्राप्त होंगे जो कि पहले सत्यापित किये जा चुके हैं। इस प्रकार ऊपर दिये गये समांतर चतुर्भुज के दो गुणधर्म सिद्ध होते हैं।

अब आप समांतर चतुर्भुज के तीसरे गुणधर्म को सिद्ध कर सकते हैं अर्थात् एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

फिर से आप, एक पतला गत्ते का बोर्ड लीजिए। इस पर एक समांतर चतुर्भुज PQRS खींचिए। इसके विकर्ण PR और QS खींचिए जो कि एक दूसरे को बिन्दु O समद्विभाजित करते हैं। यह आकृति 13.14 में देखा जा सकता है।

अब समांतर चतुर्भुज PQRS को काटिये।



आकृति 13.14

और ΔPOQ और ΔROS भी काटिए।

अब आप ΔROS को ΔPOQ पर इस प्रकार रखिए कि शीर्ष बिन्दु R, शीर्ष बिन्दु P पर गिरे। भुजा RO भुजा PO पर गिरे।

बिन्दु S की स्थिति क्या होगी?

भुजा OS की स्थिति क्या होगी?

क्या $\Delta ROS \cong \Delta POQ$? हाँ, ये सर्वांगसम हैं।

आप क्या अवलोकन करते हैं?

हमें प्राप्त हुआ $RO = PO$ और $OS = OQ$

आप इस गुणधर्म को त्रिभुजों का दूसरा युग्म अर्थात ΔPOS और ΔROQ लेकर भी सत्यापित कर सकते हैं।

आप इसी प्रकार निम्न गुणधर्मों को सिद्ध कर सकते हैं जो कि समांतर चतुर्भुज के पहले सिद्ध किये गये गुणधर्मों के विलोम हैं।

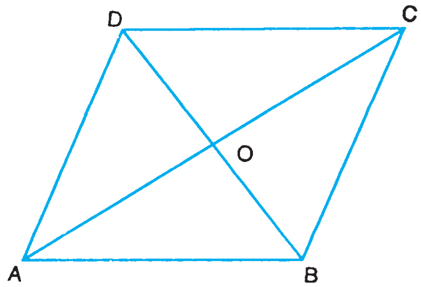
एक चतुर्भुज, एक समांतर चतुर्भुज होता है यदि इसकी सम्मुख भुजाएँ समान हों।

एक चतुर्भुज, एक समांतर चतुर्भुज होता है यदि इसके सम्मुख कोण समान हों।

एक चतुर्भुज, एक समांतर चतुर्भुज होता है यदि इसके विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

2. समचतुर्भुज के गुणधर्म

पहले भाग में हमने समचतुर्भुज की परिभाषा दी है। हम जानते हैं कि समचतुर्भुज एक ऐसा समांतर चतुर्भुज है जिसमें संलग्न भुजाओं का एक युग्म समान है। आकृति 13.15 में, ABCD एक समचतुर्भुज है।



आकृति 13.15

इसलिए ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसमें AB = BC है। क्योंकि प्रत्येक समचतुर्भुज समांतर चतुर्भुज भी है इसलिए समांतर चतुर्भुज के सारे गुणधर्म समचतुर्भुज के लिए भी सत्य हैं अर्थात्

(i) सम्मुख भुजाएँ समान हैं अर्थात

$AB = DC$ और $AD = BC$

(ii) सम्मुख कोण समान हैं, अर्थात

$\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$

(iii) विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं, अर्थात्

$AO = OC$ और $DO = OB$

क्योंकि एक समचतुर्भुज की संलग्न भुजाएँ बराबर हैं,

$AB = BC = CD = DA$

अर्थात् एक समचतुर्भुज की सभी भुजाएँ समान हैं।

कोणों $\angle AOD$ और $\angle BOC$ को मापिए।

इन कोणों के क्या माप हैं?

आप पायेंगे कि उनमें से प्रत्येक $90°$ के बराबर है।

और $\angle AOB = \angle COD$ (शीर्षाभिमुख कोण)

और $\angle BOC = \angle DOA$

$\therefore$ $\angle AOB = \angle COD = \angle BOC = \angle DOA = 90°$

इसलिए एक समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

आप विभिन्न समचतुर्भुजों को लेकर इस प्रयोग को दोहरा सकते हैं, आप हर बार पायेंगे कि एक समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

इस प्रकार एक समचतुर्भुज के गुणधर्म निम्नलिखित हैं:

एक समचतुर्भुज की सब भुजाएँ समान होती हैं।

एक समचतुर्भुज के सम्मुख कोण समान होते हैं।

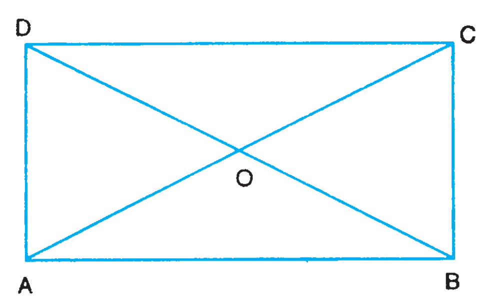
एक समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

3. एक आयत के गुणधर्म

हम जानते हैं कि आयत एक ऐसा समांतर चतुर्भुज है जिसमें कोई एक कोण समकोण होता है। क्या आप कह सकते हैं कि एक आयत में समांतर चतुर्भुज के सारे गुणधर्म विद्यमान हैं? हाँ यह ठीक है। हम आयत के कुछ और गुणधर्मों का अध्ययन करते हैं।

एक समांतर चतुर्भुज ABCD खींचिए जिसमें $\angle B = 90°$.

AC और BD को मिलाइये जैसा आकृति 13.16 में दर्शाया गया है।



आकृति 13.16

$\angle BAD$, $\angle BCD$ और $\angle ADC$ को मापिये। आप क्या पाते हैं?

इनमें से प्रत्येक कोण का माप 90^0 है। इसलिए हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^o$ अर्थात आयत का प्रत्येक कोण 90^0 के बराबर है। अब आप विकर्ण AC और

BD को मापिए। क्या आप पाते हैं कि AC = BD? हाँ, यह भी सत्य है।

भुजाओं AO, OC, BO तथा OD को भी मापिए।

आप पाते हैं कि AO = OC और BO = OD.

विभिन्न मापों वाले कुछ और आयत खींचिए। उन पर ABCD अंकित कीजिए। प्रत्येक बार AC और BD को मिलाइए। ये एक दूसरे को बिन्दु O पर प्रतिच्छेदित करते हैं। प्रत्येक आयत में AO, OC तथा BO, OD को मापिए। प्रत्येक बार आप देखेंगे कि

एक आयत के विकर्ण आपस में समान हैं और वे एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। इस प्रकार एक आयत के हमें निम्नलिखित गुण धर्म प्राप्त हुए:

एक आयत की आमने सामने की भुजाएँ समान होती हैं।

एक आयत का प्रत्येक कोण समकोण होता है।

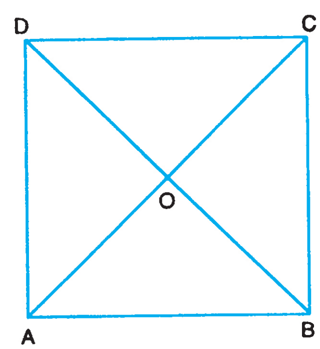
एक आयत के विकर्ण आपस में समान होते हैं।

एक आयत के विकर्ण आपस में एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

4. एक वर्ग के गुणधर्म

आप जानते हैं कि वर्ग एक ऐसा आयत है जिसमें आसन्न भुजाओं का एक युग्म बराबर है। अब, क्या आप वर्ग की परिभाषा से यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि वर्ग एक आयत है और इसमें आयत के सारे गुणधर्म विद्यमान हैं। यह सत्य है। अब हम वर्ग के कुछ और गुणधर्मों का अध्ययन करते हैं।

एक वर्ग ABCD खींचिए जैसा कि चित्र 13.17 में दर्शाया गया है।



आकृति 13.17

क्योंकि ABCD एक आयत है, इसलिए

(i) $AB = DC, AD = BC$

(ii) $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^o$

(iii) $AC = BD$ और $AO = OC, BO = OD$

परन्तु वर्ग ABCD में $AB = AD$ है।

$\therefore$ पहले गुणधर्म द्वारा हमें प्राप्त होता है।

$AB = AD = CD = BC.$

क्योंकि एक वर्ग समचतुर्भुज होता है। अतः हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि वर्ग के विकर्ण AC और BD एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं

इस प्रकार हमें एक वर्ग के निम्न गुणधर्म प्राप्त हुए:

एक वर्ग की चारों भुजाएँ समान होती हैं।

प्रत्येक कोण का माप 90^0 है।

एक वर्ग के विकर्ण आपस में समान होते हैं।

एक वर्ग के विकर्ण आपस में समकोण पर एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

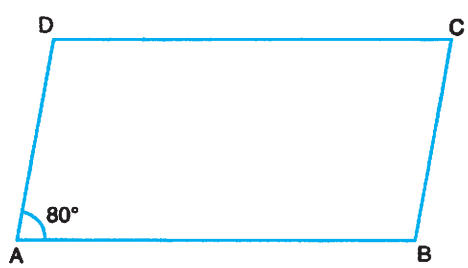
इनको दर्शाने के लिए हम कुछ उदाहरणों का अध्ययन करेंगे।

उदाहरण 13.3: आकृति 13.18 में, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। यदि $\angle A = 80^o$ हो, तो शेष कोणों का मान ज्ञात कीजिए।

हल: ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

$$\angle A = \angle C \text{ और } \angle B = \angle D$$

दिया हुआ है कि



आकृति 13.18

$$\angle A = 80^o$$

$\therefore \quad \angle C = 80^o$

Θ $\quad AB \parallel DC$

$\therefore \quad \angle A + \angle D = 180^o$

$\therefore \quad \angle D = (180 - 80)^o = 100^o$

$\therefore \quad \angle B = \angle D = 100^o$

अतः $\angle C = 80^o, \angle B = 100^o$ तथा $\angle D = 100^o$

उदाहरण 13.4: एक समचतुर्भुज के दो संलग्न कोण 4 : 5 के अनुपात में हैं। इसके सारे कोणों का माप ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि एक समचतुर्भुज के दो संलग्न कोणों का योग 180^0 होता है।

माना दो कोण क्रमश $4x^o$ और $5x^o$ हैं।

$\Theta \quad 4x + 5x = 180$

$\Rightarrow \quad 9x = 180$

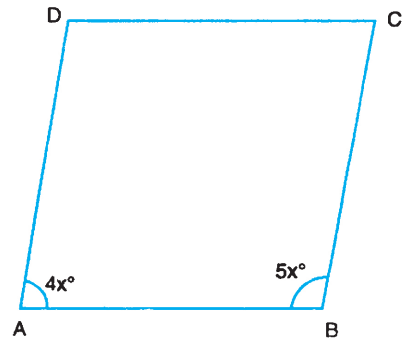
या $\quad x = 20$

$\therefore$ इसलिए यह कोण क्रमश 80^o और 100^o के हैं।

अर्थात $\angle A = 80^o$ तथा $\angle B = 100^o$

$\Theta \quad \angle A = \angle C \Rightarrow \angle C = 100^o$

और, $\angle B = \angle D \Rightarrow \angle D = 100^o$



आकृति 13.19

इसलिए समचतुर्भुज के कोणों का माप 80^o, 100^o, 80^o और 100^o होगा।

उदाहरण 13.5: किसी समचतुर्भुज का एक विकर्ण भुजाओं में से किसी एक के समान है। समचतुर्भुज के कोणों का माप ज्ञात कीजिए।

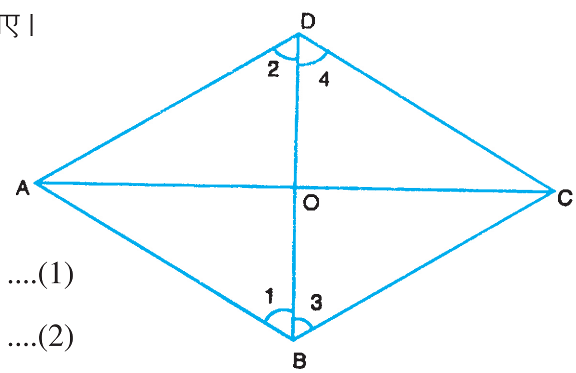
हल: समचतुर्भुज ABCD में,

$AB = AD = BD$

$\therefore \Delta ABD$ एक समबाहु त्रिभुज है।

$\therefore \quad \angle DAB = \angle 1 = \angle 2 = 60^o \quad ....(1)$

इसी प्रकार $\angle BCD = \angle 3 = \angle 4 = 60^o \quad ....(2)$



आकृति 13.20

(1) और (2) से,

$\angle ABC = \angle B = \angle 1 + \angle 3 = 60^o + 60^o = 120^o$

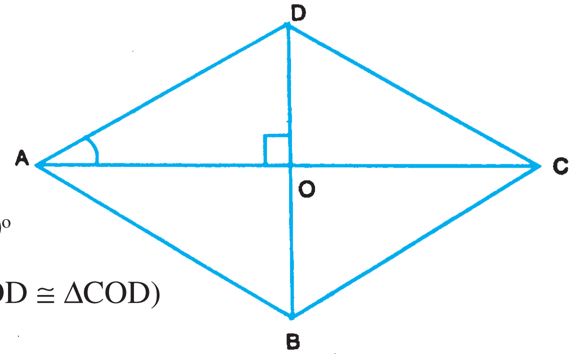
$\angle ADC = \angle D = \angle 2 + \angle 4 = 60^o + 60^o = 120^o$

इसलिए, $\angle A = 60^o$, $\angle B = 120^o$, $\angle C = 60^o$ और $\angle D = 120^o$

उदाहरण 13.6: किसी समचतुर्भुज ABCD के विकर्ण बिन्दु O पर प्रतिच्छेदित होते हैं। यदि $\angle ADC = 120^o$ और $OD = 6$ सेमी हो, तो ज्ञात कीजिए

(a) $\angle OAD$

(b) भुजा AB



आकृति 13.21

(c) समचतुर्भुज ABCD का परिमाप।

हल: (a) हम जानते हैं कि

$$\angle ADC = 120^\circ$$

अर्थात $\angle ADO + \angle ODC = 120^\circ$

परन्तु $\angle ADO = \angle ODC$ $(\Delta AOD \cong \Delta COD)$

$\therefore$ $2\angle ADO = 120^\circ$

अर्थात $\angle ADO = 60^\circ$ ...(i)

हम यह भी जानते हैं कि एक समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं

$\therefore$ $\angle DOA = 90^\circ$ ...(ii)

अब ΔDOA में,

$$\angle ADO + \angle DOA + \angle OAD = 180^\circ$$

(i) और (ii) से,

$$60^\circ + 90^\circ + \angle OAD = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ $\angle OAD = 30^\circ$

(b) $\angle DAB = 60^\circ$[$\because \angle OAD = 30^\circ$, इसी प्रकार $\angle OAB = 30^\circ$]

$\therefore$ ΔDAB एक समबाहु त्रिभुज है।

अब OD = 6 सेमी [दिया है]

$\Rightarrow$ OD + OB = BD

6 सेमी + 6 सेमी = BD

$\Rightarrow$ BD = 12 सेमी

अतः, AB = BD = AD = 12 सेमी

AB = 12 सेमी

(c) अब परिमाप $= 4 \times$ भुजा

$= (4 \times 12)$ सेमी

= 48 सेमी

समचतुर्भुज ABCD का परिमाप = 48 सेमी

देखें आपने कितना सीखा 13.2

1. एक समांतर चतुर्भुज ABCD में, $\angle A = 62^o$. दूसरे कोणों के माप ज्ञात कीजिए।

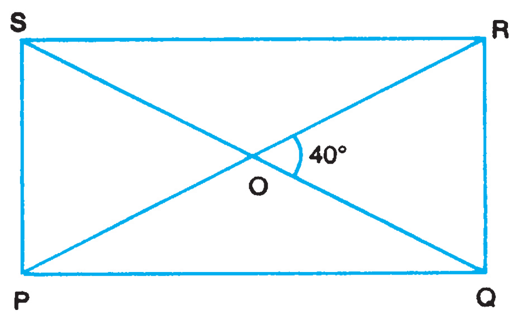
2. किसी समांतर चतुर्भुज के दो सम्मुख कोणों का योग 150^0 है। समांतर चतुर्भुज के सभी कोणों के माप ज्ञात कीजिए।

3. एक समांतर चतुर्भुज ABCD में, $\angle A = (2x + 10)^o$ और $\angle C = (3x - 20)^o$ है। x का मान ज्ञात कीजिए।

4. ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसमें $\angle DAB = 70^o$ और $\angle CBD = 55^o$ है। $\angle CDB$ और $\angle ADB$ के मान ज्ञात कीजिए।

5. ABCD एक समचतुर्भुज है जिसमें $\angle ABC = 58^o$ है। $\angle ACD$ का माप ज्ञात कीजिए।

6. आकृति 13.22 में, आयत PQRS के विकर्ण एक दूसरे को बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $\angle ROQ = 40^o$ हो, तो $\angle OPS$ का माप ज्ञात कीजिए।

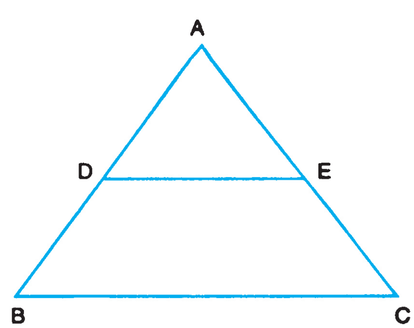


आकृति 13.22

7. AC, वर्ग ABCD का एक विकर्ण है। $\angle CAB$ का माप ज्ञात कीजिए।

13.4 मध्य बिन्दु प्रमेय

एक त्रिभुज ABC खींचिए भुजाओं AB और AC के मध्य बिन्दु प्राप्त कीजिए और उन्हें क्रमशः बिन्दुओं D और E द्वारा अंकित कीजिए। D को E से मिलाइये जैसा कि आकृति 13.23 में दर्शाया गया है। आपको भुजा BC और DE में किस प्रकार का संबंध प्राप्त हुआ?



आकृति 13.23

हमने देखा BC की लम्बाई DE की लम्बाई से दुगुनी है।

अर्थात $DE = \frac{1}{2} BC$ है।

फिर $\angle ADE$ और $\angle ABC$ को मापिये।

क्या ये कोण समान हैं?

हाँ, ये दोनों कोण समान हैं। आप जानते हैं कि ये कोण संगत कोणों का एक युग्म है।

आप यह भी जानते हैं कि यदि संगत कोणों का एक युग्म बराबर हो तो रेखाएँ समांतर होती हैं।

$$\therefore \quad DE \parallel BC$$

आप इस प्रयोग को दूसरे दो या तीन त्रिभुजों के साथ, जिनमें प्रत्येक त्रिभुज को ABC और भुजाओं AB और AC के मध्य बिन्दुओं को D और E द्वारा अंकित करके फिर से कर सकते हैं।

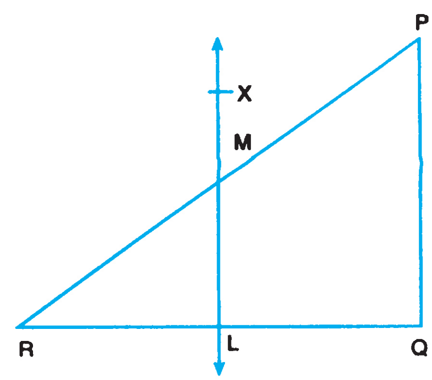
आप हमेशा देखेंगे कि $DE = \frac{1}{2} BC$ और $DE \parallel BC$ है।

इस प्रकार हम निष्कर्ष पर पहुंचते हैं कि

किसी त्रिभुज में किन्हीं दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बना रेखा - खण्ड त्रिभुज की तीसरी भुजा के समांतर और उसके आधे के समान होता है।

हम इस परिणाम के विलोम को भी सत्यापित कर सकते हैं।

एक त्रिभुज ΔPQR खींचिए। आकृति 13.24 में, भुजा RQ का मध्य बिन्दु ज्ञात कीजिए और इसे L द्वारा अंकित कीजिए। रेखा $LX \parallel PQ$ खींचिए, जो कि PR को M बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है। PM और MR को मापिए। क्या ये समान हैं? हाँ, ये एक दूसरे के समान हैं।



आकृति 13.24

आप इस प्रयोग को विभिन्न त्रिभुजों के साथ, जिनमें प्रत्येक का नाम PQR हो और हर बार L को भुजा RQ का मध्य बिन्दु लेते हुए और एक रेखा $LM \parallel PQ$ खींचते हुए, बार–बार कर सकते हैं। आप हर स्थिति में देखेंगे कि $RM = MP$ है। इसलिए हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि

किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु से गुजरने वाली एक रेखा जो कि त्रिभुज की दूसरी भुजा के समांतर है, तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।

अब आइए कुछ उदाहरण लेते हैं:

उदाहरण 13.7: आकृति 13.25 में, ΔABC की भुजा AB का मध्य बिन्दु D है और DE || BC यदि AC = 8 सेमी हो, तो AE का मान ज्ञात कीजिए।

हल: ΔABC में,

DE || BC और D, भुजा AB का मध्य बिन्दु है।

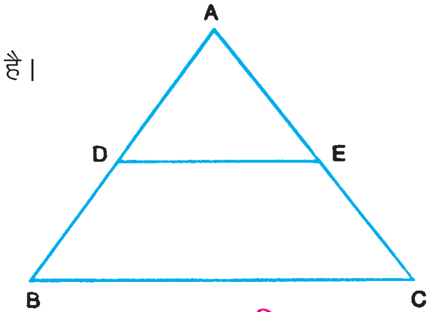
$\therefore$ E भुजा AC का मध्य बिन्दु है।

अर्थात AE $= \frac{1}{2}$ AC

$= \left(\frac{1}{2} \times 8\right)$ सेमी [Θ AC = 8 सेमी]

= 4 सेमी

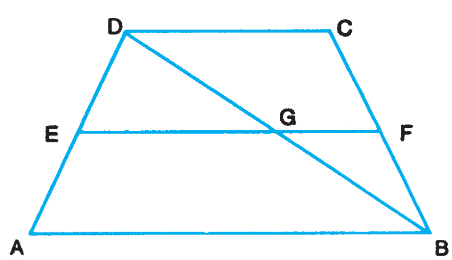
अतः, AE = 4 सेमी



आकृति 13.25

उदाहरण 13.8: आकृति 13.26 में, ABCD एक समलम्ब है जिसमें AD और BC इसकी असमांतर भुजाएँ हैं। E, भुजा AD का मध्य बिन्दु है तथा EF || AB। सिद्ध कीजिए कि F, भुजा BC का मध्य बिन्दु है।

हल: Θ EG || AB और E, भुजा AD का मध्य बिन्दु है।



आकृति 13.26

ΔABD में,

G, भुजा DB का मध्य बिन्दु होगा।

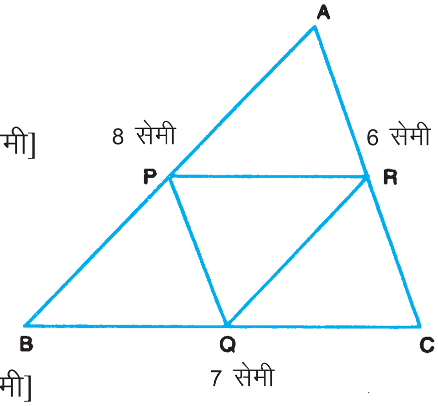
ΔDBC में,

GF || DC और G भुजा DB का मध्य बिन्दु है।

$\therefore$ F भुजा BC का मध्य बिंदु होगा।

उदाहरण 13.9: ABC एक त्रिभुज है जिसमें P, Q और R भुजाओं AB, BC और CA के क्रमशः मध्य बिंदु हैं। यदि AB = 8 सेमी, BC = 7 सेमी और CA = 6 सेमी हो, तो ΔPQR की भुजाओं का मान ज्ञात कीजिए।

हल: P, भुजा AB और R भुजा AC का मध्य–बिन्दु है।



आकृति 13.27

$\therefore$ PR || BC और PR $= \frac{1}{2}$ BC

$= \frac{1}{2} \times 7$ सेमी [Θ BC = सेमी]

$= 3.5$ सेमी

इसी प्रकार, PQ $= \frac{1}{2}$ AC

$= \frac{1}{2} \times 6$ सेमी [Θ AC = 6 सेमी]

$= 3$ सेमी

और QR $= \frac{1}{2}$ AB

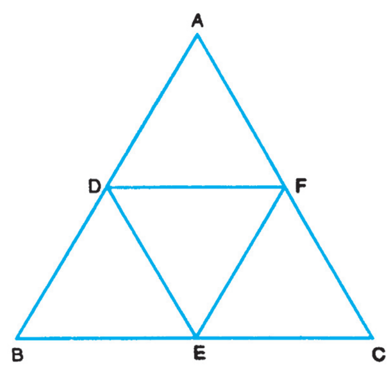
$= \frac{1}{2} \times 8$ सेमी [Θ AB = 8 सेमी]

$= 4$ सेमी

इस प्रकार ΔPQR की भुजाएँ हैं: PQ = 3 सेमी, QR = 4 सेमी और PR = 3.5 सेमी।

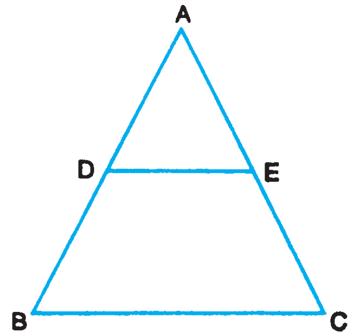
देखें आपने कितना सीखा 13.3

1. आकृति 13.28 में, ABC एक समबाहु त्रिभुज है। D, E और F क्रमशः भुजाओं AB, BC और CA के मध्य बिन्दु हैं। सिद्ध कीजिए कि DEF भी एक समबाहु त्रिभुज होगा।



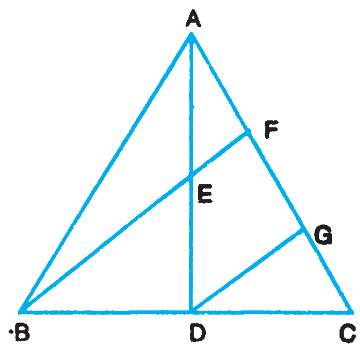
आकृति 13.28

2. आकृति 13.29 में, D और E क्रमशः त्रिभुज ABC की भुजाओं AB और AC के मध्य बिन्दु हैं। यदि BC = 10 सेमी हो, तो DE ज्ञात कीजिए।



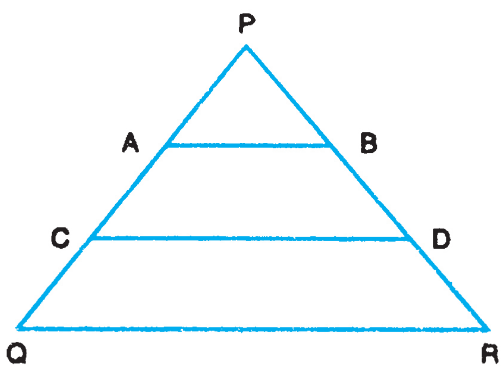
आकृति 13.29

3. आकृति 13.30 में, AD त्रिभुज ABC की माध्यिका है। AD का मध्य बिन्दु E है। BE आगे बढ़ाने पर AC को बिन्दु F पर मिलती है। DG || EF, भुजा AC को बिन्दु G पर मिलती है। यदि AC = 9 सेमी हो, तो AF ज्ञात कीजिए।



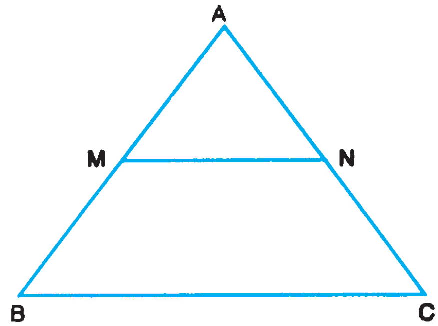
आकृति 13.30

4. आकृति 13.31 में, A और C, ΔPQR की भुजा PQ को तीन बराबर भागों में बाँटते हैं। यदि AB||CD||QR हो, तो सिद्ध कीजिए कि B और D भी भुजा PR को तीन बराबर भागों में बाँटते हैं।



आकृति 13.31

5. आकृति 13.32 में, ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है। भुजा AB का M मध्य बिन्दु है और MN||BC है। सिद्ध कीजिए कि ΔAMN भी एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

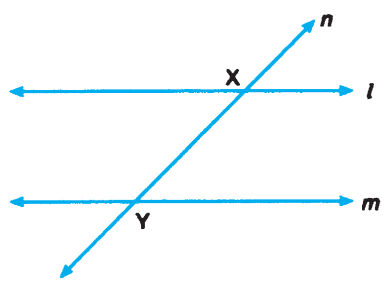


आकृति 13.32

13.5 अन्तःखंड प्रमेय

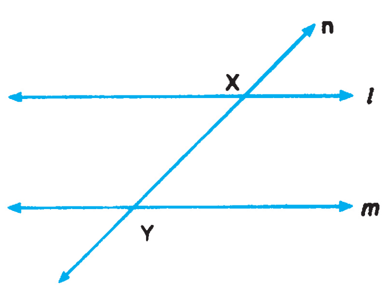
याद कीजिए कि एक रेखा जो दो या दो से अधिक रेखाओं को प्रतिच्छेद करती है, तिर्यक रेखा कहलाती है। रेखाओं के युग्म द्वारा तिर्यक रेखा से कटा हुआ भाग अन्तःखण्ड कहलाता है। इस प्रकार आकृति 13.33 में, XY रेखाओं l तथा m द्वारा तिर्यक रेखा n पर अंतःखंड है।

समांतर रेखाओं द्वारा तिर्यक रेखा पर बने हुए अन्तःखण्डों के कुछ विशेष गुणधर्म हैं जिन्हें हम यहाँ अध्ययन करेंगे।

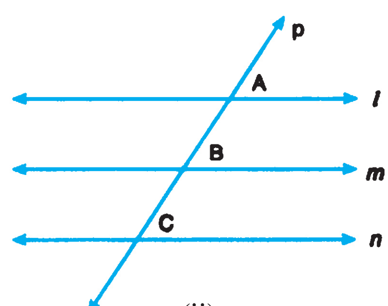


आकृति 13.33

माना l और m दो समांतर रेखाएँ हैं तो XY तिर्यक रेखा n पर अन्तःखण्ड हैं आकृति 13.34 देखिए। यदि l, m, n तीन समांतर रखाएँ हैं तथा यदि ये एक तिर्यक रेखा से प्रतिच्छेदित होती हैं तो इस स्थिति में दो अन्तःखण्ड होंगे। आकृति 13.34 (ii) में, AB और BC दो अंतःखंड हैं।



(i)

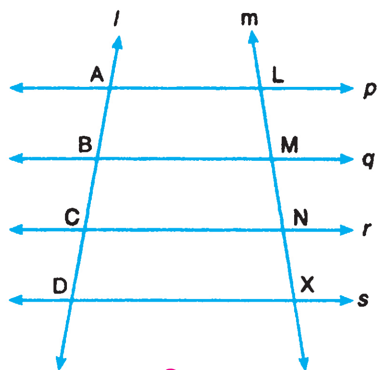


(ii)

आकृति 13.34

अब हम समांतर रेखाओं द्वारा अन्तःखण्डों का एक महत्वपूर्ण गुणधर्म सीखेंगे।

अपनी उत्तर पुस्तिका के पन्ने पर चार समांतर रेखाएँ p, q, r और s एक दूसरे की बराबर दूरी पर खींचिए। अब इन समांतर रेखाओं को बिन्दुओं A, B, C, और D तथा L, M, N और X पर काटती हुई दो तिर्यक रेखाएँ l और m खींचिए। यह सब आकृति 13.35 में दिखाया गया है। ये तिर्यक रेखाएँ अलग अलग अन्तःखण्ड बनाती हैं। आप अन्तःखण्डों AB, BC और CD को मापिए। क्या ये बराबर हैं? हाँ ये सब बराबर हैं।



आकृति 13.35

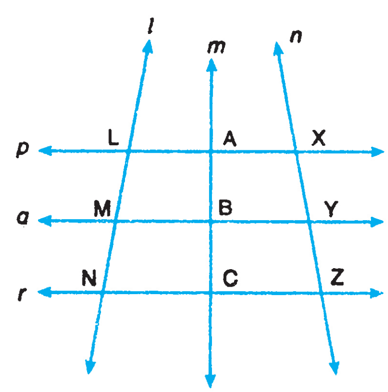
अब LM, MN और NX को भी मापिए। क्या आप पाते हैं कि ये सब भी समान हैं? हाँ ये समान हैं। इस प्रयोग को फिर से दो या दो से अधिक बराबर दूरी की समांतर रेखाओं के दूसरे सैट को लेकर कीजिए और इनके अन्तःखण्डों को फिर से मापिए जैसा कि पहले किया गया था। आप पायेंगे कि प्रत्येक स्थिति में अंतःखण्डों की लम्बाई समान है।

इसलिए हम निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि

तीन या अधिक समांतर रेखाओं द्वारा एक तिर्यक रेखा पर बनाये गये अन्तःखंड यदि समान हों तो किसी दूसरी तिर्यक रेखा पर बने संगत अन्तःखण्ड भी समान होते हैं।

इसे हम कुछ उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 13.10: आकृति 13.36 में, p ll q llr है। तिर्यक रेखाएँ *l*, m और n इनको क्रमशः बिन्दुओं L, M, N; A, B, C और X, Y, Z पर इस प्रकार काटती हैं कि XY = YZ है। दूसरे समान अन्तःखण्ड युग्मों को लिखिए।



आकृति 13.36

हल: हम जानते हैं कि XY = YZ

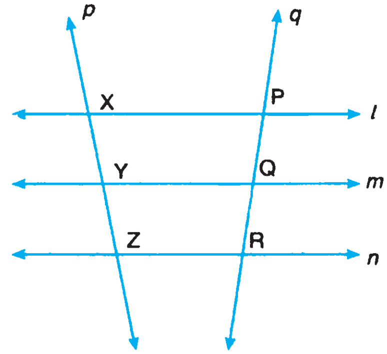
∴ AB = BC (अंतःखण्ड प्रमेय)

और LM = MN

इसलिए समान अन्तःखण्ड वाले दूसरे युग्म हैं:

AB = BC और LM = MN

उदाहरण 13.11: आकृति 13.37 में, $l \parallel m \parallel n$ और $PQ = QR$ है। यदि $XZ = 20$ सेमी हो, तो YZ ज्ञात कीजिए।



आकृति 13.37

हल: $PQ = QR$ (दिया हुआ है)

$\therefore$ अन्तः खण्ड प्रमेय द्वारा,

$$XY = YZ$$

फिर $XZ = XY + YZ$

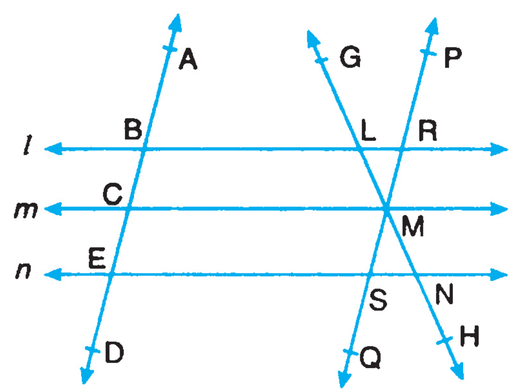
$$= YZ + YZ$$

$\therefore$ $20 = 2YZ \quad \Rightarrow \quad YZ = 10$ सेमी

अतः $YZ = 10$ सेमी

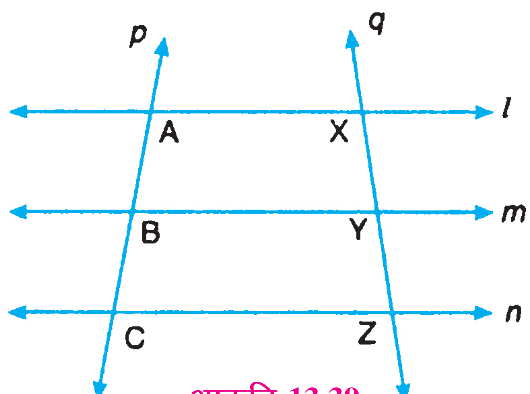
देखें आपने कितना सीखा 13.4

1. आकृति 13.38 में, l, m और n तीन बराबर दूरी पर समांतर रेखाएँ हैं। AD, PQ और GH तीन तिर्यक रेखाएँ हैं। यदि $BC = 2$ सेमी तथा $LM = 2.5$ सेमी है तथा $AD \parallel PQ$ तो MS और MN ज्ञात कीजिए।



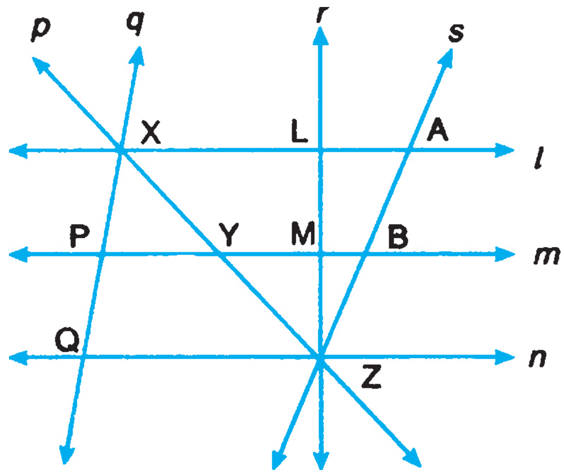
आकृति 13.38

2. आकृति 13.39 में, आप कब कह सकते हैं कि $AB = BC$ तथा $XY = YZ$ हैं?



आकृति 13.39

3. आकृति 13.40 में, LM = MZ = 3 सेमी, XY, XP और BZ ज्ञात कीजिए जबकि $l \parallel m \parallel n$ तथा PQ = 3.2 सेमी, AB = 3.5 सेमी तथा YZ = 3.4 सेमी हो।



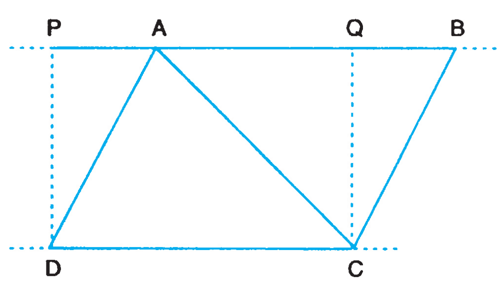
आकृति 13.40

13.6 एक समांतर चतुर्भुज का विकर्ण और इसका क्षेत्रफल से संबंध

एक समांतर चतुर्भज ABCD खींचिये। विकर्ण AC को मिलाइये। $DP \perp DC$ और $QC \perp DC$ खींचिए।

त्रिभुज ADC और त्रिभुज ACB को देखिए जिनमें समांतर चतुर्भुज ABCD को विकर्ण AC द्वारा दो भागों में बाँट दिया गया है।

$\because$ $AB \parallel DC$, $\therefore$ PD = QC



आकृति 13.41

अब $\quad \Delta ADC$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} DC \times PD \quad$ ....(i)

और $\quad \Delta ACB$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} AB \times QC \quad$ ....(ii)

$\therefore$ AB = DC और PD = QC

$\therefore$ (ΔADC) का क्षेत्रफल = (ΔACB) का क्षेत्रफल

इसलिए हम निष्कर्ष पर पहुंचते हैं

किसी समांतर चतुर्भुज का विकर्ण इसे समान क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में बाँटता है।

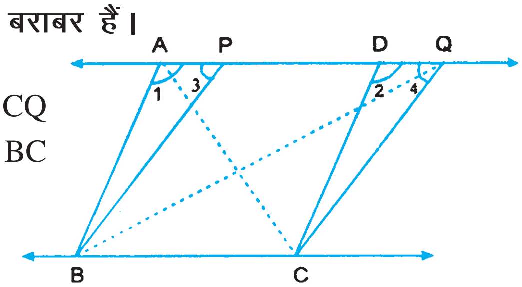
13.7 एक ही समांतर रेखाओं के बीच के समांतर चतुर्भुज और त्रिभुज

दो समांतर चतुर्भुज या त्रिभुज, जिनके एक ही या समान आधार हैं और जिनके दूसरे शीर्ष बिन्दु उनके आधारों के एक समांतर रेखा पर स्थित हैं, एक ही या समान आधारों पर और एक ही समांतरों के बीच कहे जाते हैं।

हम समांतर चतुर्भुजों और उनके क्षेत्रफल से संबंधित एक मुख्य प्रमेय को सिद्ध करेंगे।

समांतर चतुर्भुज, जो समान या एक ही आधारों पर हों और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हों, क्षेत्रफल में बराबर हैं।

दिया है: दो समांतर चतुर्भुज ABCD और PBCQ जिनका आधार BC और जो समांतर रेखाओं BC और AQ के बीच में है।



आकृति 13.42

सिद्ध करना है: क्षेत्रफल ($\|^{gm}$ABCD) = क्षेत्रफल ($\|^{gm}$ BCQP)

उपपत्ति: त्रिभुज ABP और ΔDCQ में,

AB = DC (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

BP = CQ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

और $\angle 1 = \angle 2$ (संगत कोण)

$\therefore$ $\Delta ABP \cong \Delta DCQ$

$\therefore$ क्षेत्रफल (ΔABP) = क्षेत्रफल (ΔDCQ) ...(i)

अब, क्षेत्रफल ($\|^{gm}$ ABCD) = क्षेत्रफल (ΔABP) + क्षेत्रफल (समलम्ब BCDP) ...(ii)

क्षेत्रफल ($\|^{gm}$ BCQP) = क्षेत्रफल (ΔDCQ) + क्षेत्रफल (समलम्ब BCDP) ...(iii)

(i), (ii) और (iii), से

क्षेत्रफल ($\|^{gm}$ ABCD) = क्षेत्रफल ($\|^{gm}$ BCQP)

अतः हमने निम्न प्रमेय सिद्ध की हैः

एक ही (या समान) आधार तथा एक ही समांतर रेखाओं के बीच समांतर चतुर्भुज क्षेत्रफल में समान होते हैं।

टिप्पणी: संकेत $\|^{gm}$ समान्तर चतुर्भुज के लिए है।

परिणाम: एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच के त्रिभुजों के क्षेत्रफल समान होते हैं।

आकृति 13.42 देखिए। समांतर चतुर्भुजों BCPQ और ABCD के विकर्णों BQ और AC को मिलाइये। हम जानते हैं कि एक विकर्ण समांतर चतुर्भुज को बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में बाँटता है।

$\therefore$ क्षेत्रफल (ΔBCQ) = क्षेत्रफल (ΔPBQ)

और क्षेत्रफल (ΔABC) = क्षेत्रफल (ΔCAD)

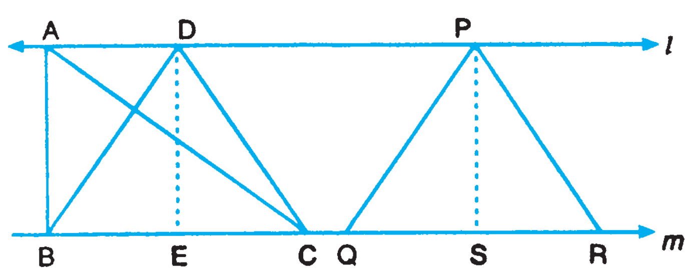
$\therefore$ क्षेत्रफल (ΔABC) = क्षेत्रफल (ΔBCQ)

इसलिए हम निष्कर्ष निकालते हैं किः

एक ही या बराबर आधार और समान समांतर रेखाओं के बीच के त्रिभुजों का क्षेत्रफल समान होते हैं।

13.8 एक ही या समान आधार और क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों के संगत शीर्षलम्ब समान होते हें

याद कीजिए कि किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (आधार) × शीर्षलम्ब



आकृति 13.43

आकृति 13.43 में, BC = QR

और क्षेत्रफल (ΔABC) = क्षेत्रफल (ΔDBC) = क्षेत्रफल (ΔPQR) ..(i)

रेखा l के बिन्दु D और P से m पर क्रमशः लम्ब DE और PS खींचिए जो रेखा m को बिन्दुओं E और S पर काटते हैं

अब क्षेत्रफल $(\Delta ABC) = \frac{1}{2} BC \times DE$

क्षेत्रफल $(\Delta DBC) = \frac{1}{2} BC \times DE$ ...(ii)

और क्षेत्रफल $(\Delta PQR) = \frac{1}{2} QR \times PS$

और $BC = QR$ (दिया हुआ है) ...(iii)

(i), (ii) और (iii) से

$$\frac{1}{2} BC \times DE = \frac{1}{2} QR \times PS$$

या $$\frac{1}{2} BC \times DE = \frac{1}{2} BC \times PS$$

$$\therefore \quad DE = PS$$

ΔABC, ΔDBC और ΔPQR के शीर्षलम्ब लम्बाई में बराबर हैं।

इसलिए हम निष्कर्ष पर पहुंचते हैं कि:

एक ही या समान आधार और समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों के संगत शीर्षलम्ब भी समान होते हैं।

अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 13.12: आकृति 13.44 में समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल 40 वर्ग सेमी है। यदि BC = 8 सेमी है, तो समांतर चतुर्भुज BCEF के शीर्षलम्ब का मान ज्ञात कीजिए।

हल: समांतर चतुर्भुज BCEF का क्षे. = समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = 40 वर्ग सेमी

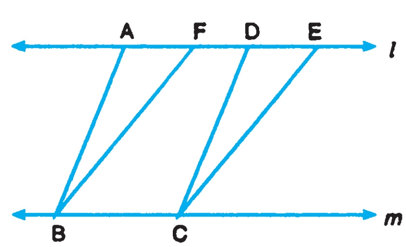
हम जानते हैं कि समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल BCEF = EF × शीर्षलम्ब

या 40 = BC × शीर्षलम्ब (समांतर चतुर्भुज BCEF का)

या 40 = 8 × समांतर चतुर्भुज BCEF का शीर्षलंब

∴ समांतर चतुर्भुज BCEF का शीर्षलंब

$$= \frac{40}{8} \text{ सेमी } = 5 \text{ सेमी}$$



आकृति 13.44

उदाहरण 13.13: आकृति 13.45 में, ΔABC का क्षेत्रफल 18 वर्ग सेमी के समान दिया है। यदि शीर्षलम्ब DL की लम्बाई 4.5 सेमी है, तो ΔBCD का आधार ज्ञात कीजिए।

हल: ΔBCD का क्षेत्रफल = ΔABC का क्षेत्रफल = 18 वर्ग सेमी

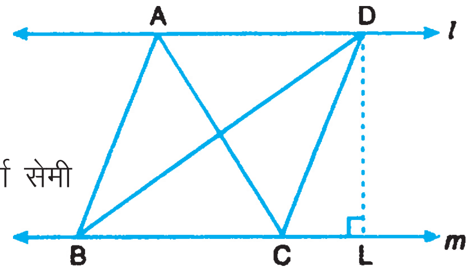
माना ΔBCD का आधारा x सेमी है।

$\therefore$ ΔBCD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} x \times DL$

$= \left(\frac{1}{2} x \times 4.5\right)$ वर्ग सेमी

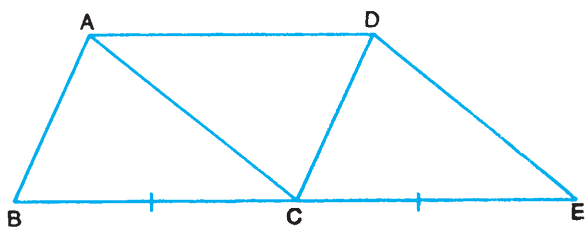
या $18 = \left(\frac{9}{4} x\right)$

$\therefore$ $x = \left(18 \times \frac{4}{9}\right)$ सेमी = 8 सेमी



आकृति 13.45

उदाहरण 13.14: आकृति 13.46 में, ABCD और ACED दो समांतर चतुर्भुज हैं। यदि ΔABC का क्षेत्रफल 12 वर्ग सेमी और CE और BC की लम्बाई एक दूसरे के बराबर हो, तो समलम्ब ABED का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 13.46

हल: समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = समांतर चतुर्भुज ACED का क्षेत्रफल

विकर्ण AC समांतर चतुर्भुज ABCD को दो बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में बाँटता है।

$\therefore$ ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल

$\therefore$ समांतर चतुर्भुज ACED का क्षेत्रफल = समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल

$= 2 \times 12$ वर्ग सेमी

$= 24$ वर्ग सेमी

$\therefore$ समलम्ब ABED का क्षेत्रफल

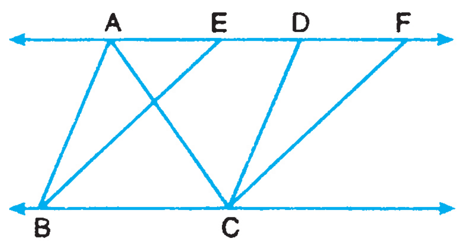
$= \Delta ABC$ का क्षेत्रफल + समांतर चतुर्भुज ACED का क्षेत्रफल

$= (12 + 24)$ वर्ग सेमी

$= 36$ वर्ग सेमी

देखें आपने कितना सीखा 13.5

1. दो समांतर चतुर्भुज, जो कि एक ही या समान आधार पर हों, कब समान क्षेत्रफल के कहलाते हैं?
2. समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC द्वारा बने त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल 16 वर्ग सेमी है। समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. आकृति 13.47 में, ΔACD का क्षेत्रफल 8 वर्ग सेमी है। यदि $EF = 4$ सेमी हो, तो समांतर चतुर्भुज BCFE का शीर्षलम्ब ज्ञात कीजिए।



आकृति 13.47

आइए दोहराएँ

- एक चतुर्भुज, चार भुजाओं से घिरी आकृति है जिसमें समतल का कुछ हिस्सा शामिल है।
- एक चतुर्भुज में अन्तः और बाह्य कोणों में प्रत्येक का योगफल 360^o के समान होता है।
- एक चतुर्भुज जिसमें सम्मुख भुजाओं का एक युग्म समांतर हो, समलम्ब कहलाता है।
- एक चतुर्भुज जिसमें सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म समांतर हों, समांतर चतुर्भुज कहलाता है।
- एक समांतर चतुर्भुज में

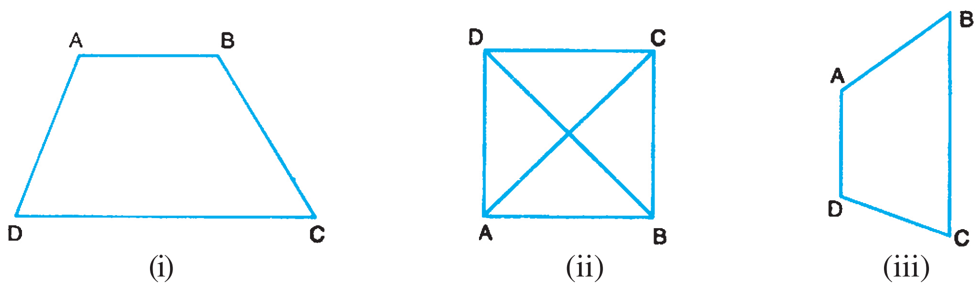
  (i) सम्मुख भुजाएँ और सम्मुख कोण समान होते हैं

  (ii) विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।
- एक समांतर चतुर्भुज जिसमें इसकी संलग्न भुजाएँ समान हों, समचतुर्भुज कहलाता है।
- एक समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

- एक समांतर चतुर्भुज जिसमें एक कोण 90° हो, आयत कहलाता है।
- एक आयत के विकर्ण आपस में समान होते हैं।
- एक आयत, जिसकी संलग्न भुजाएँ समान हों, एक वर्ग कहलाता है।
- एक वर्ग के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर प्रतिच्छेद करते हैं।
- एक समांतर चतुर्भुज का विकर्ण इसे दो समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में विभाजित करता है।
- समांतर चतुर्भुज, जो कि एक या समान आधार पर तथा एक ही समांतर रेखाओं के बीच हों, क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।
- एक ही या समान आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच के त्रिभुजों के क्षेत्रफल समान होते हैं।
- एक ही या समान आधार और बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों के संगत शीर्षलंब समान होते हैं।

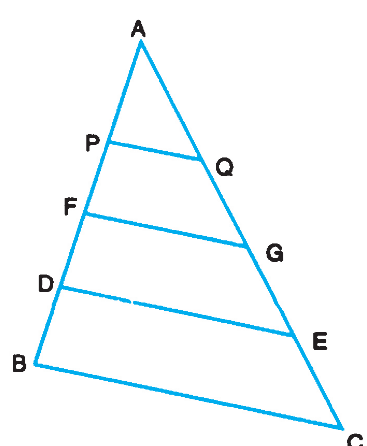
आइए अभ्यास करें

1. निम्न में कौन से समलम्ब हैं?



आकृति 13.48

2. आकृति 13.49 में, PQ || FG || DE || BC है। आकृति में सभी समलम्बों के नाम लिखिये:

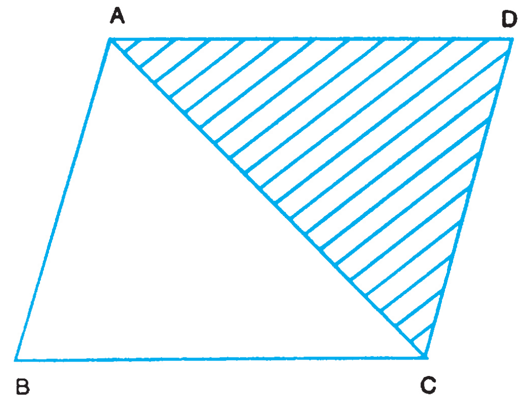


आकृति 13.49

3. आकृति 13.50 में, एक समांतर चतुर्भुज ABCD है जिसका क्षेत्रफल 48 वर्ग सेमी है।

   (i) छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

   (ii) छायांकित भाग को छोड़कर बाकी भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 13.50

4. सत्य कथन के लिए नीचे लिखे खाली स्थान भरियेः

   (i) एक चतुर्भुज एक समलम्ब कहलाता है यदि ....

   (ii) एक चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज कहलाता है यदि ....

   (iii) एक आयत, एक वर्ग कहलाता है यदि ...

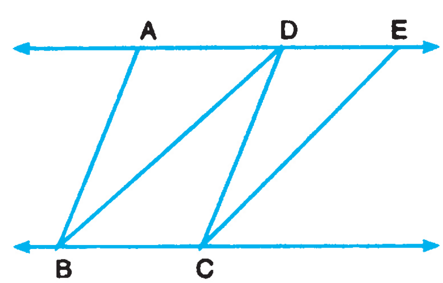
   (iv) एक चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं। यदि चतुर्भुज का कोई भी कोण समकोण नहीं है, तब यह कहलाता है एक...

   (v) एक चतुर्भुज के बाह्य कोणों का योगफल है ...

5. यदि एक चतुर्भुज के कोण $(x-20)^o$, $(x+20)^o$, $(x-15)^o$ और $(x+15)^o$ हों, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

6. एक समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180^0 है। ऐसे समांतर चतुर्भुज का विशेष नाम क्या है?

7. आकृति 13.51 में, ΔABD का क्षेत्रफल 24 वर्ग सेमी है। यदि DE = 6 सेमी तथा AB || DC, BD || CE तथा AE || BC हो, तो

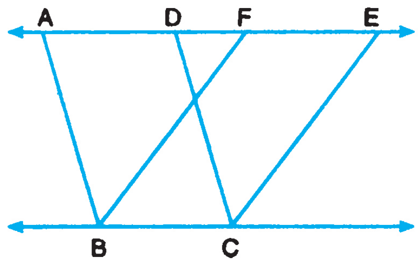


आकृति 13.51

(i) समांतर चतुर्भुज BCED का शीर्षलंब ज्ञात कीजिए।

(ii) समांतर चतुर्भुज BCED का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. आकृति 13.52 में, समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल 40 वर्ग सेमी है। यदि EF = 8 सेमी हो, तो ΔDCE का शीर्षलम्ब ज्ञात कीजिए।



आकृति 13.52

देखें आपने कितना सीखा के उत्तर

13.1

1. (i) आयत (ii) समलम्ब (iii) आयत (iv) समांतर चतुर्भुज
   (v) समचतुर्भुज (vi) वर्ग
2. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) सत्य
   (v) सत्य (vi) सत्य (vii) असत्य (viii) असत्य
   (ix) असत्य (x) असत्य
3. 90°
4. 60°, 84°, 84° और 132°
5. कोणों का दूसरा युग्म भी सम्पूरक होगा।

13.2

1. $\angle B = 118^\circ$, $\angle C = 62^\circ$ और $\angle D = 118^\circ$
2. $\angle A = 105^\circ$, $\angle B = 75^\circ$, $\angle C = 105^\circ$ और $\angle D = 75^\circ$
3. 30°
4. $\angle CDB = 55^\circ$ और $\angle ADB = 55^\circ$
5. $\angle ACD = 61^\circ$
6. $\angle OPS = 70^\circ$ 7. $\angle CAB = 45^\circ$

13.3

2. 5 सेमी

3. 3 सेमी

13.4

1. MS = 2 सेमी और MN = 2.5 सेमी
2. जब 1, m और n बराबर दूरी पर समांतर रेखाएँ हों।
3. XY = 3.4 सेमी, XP = 3.2 सेमी तथा BZ = 3.5 सेमी

13.5

1. जब कि वे एक ही समांतर रेखाओं के बीच होते हैं।
2. 32 वर्ग सेमी
3. 4 सेमी

आइए अभ्यास करें के उत्तर

1. (i) तथा (iii)
2. PFGQ, FDEG, DBCE, PDEQ, FBCG and PBCQ
3. (i) 24 वर्ग सेमी (ii) 24 वर्ग सेमी
4. (i) यदि सम्मुख भुजाओं का एक युग्म समांतर हो।
   (ii) यदि भुजाओं के दोनों युग्म समांतर और समान हों।
   (iii) यदि इसकी संलग्न भुजाएँ बराबर हों।
   (iv) समचतुर्भुज
   (v) 360^o
5. $x = 90^o$, चतुर्भुज के चार कोणों की माप क्रमशः 70^o, 110^o, 75^o और 105^o
6. आयत
7. (i) 8 सेमी (ii) 48 वर्ग सेमी
8. 5 सेमी