



14

त्रिभुजों की समरूपता

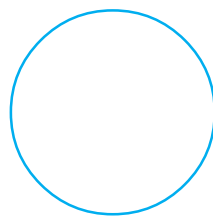
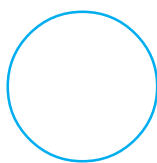
अपने आस पास देखने पर आपको कई ऐसी वस्तुएँ मिलेंगी जो एक ही आकार की तो हैं पर उनकी माप अलग-अलग हैं। उदाहरणार्थ एक पेड़ पर लगे पत्ते साधारणतया एक ही आकार परन्तु विभिन्न मापों के होते हैं। इसी प्रकार एक ही नेगेटिव से विभिन्न साइज के बने फोटो एक ही आकार के होते हैं। एक बिल्डिंग का छोटा माडल तथा बिल्डिंग एक ही आकार परन्तु विभिन्न माप के होते हैं। वह सब वस्तुएँ जिनके माप अलग-अलग हैं परन्तु एक ही आकार की हैं— समरूप वस्तुएँ कहलाती हैं।

आइए अब हम तल में बनी आकृतियों के विषय में देखें (आकृति 14.1):

- (i) दो रेखाखण्ड जो एक ही लम्बाई के हों सर्वांगसम तथा समरूप होते हैं परन्तु अलग लम्बाई के रेखाखण्ड समरूप होते हैं, सर्वांगसम नहीं।

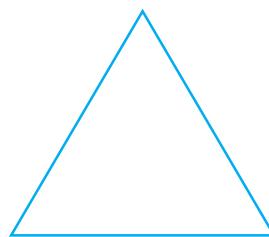
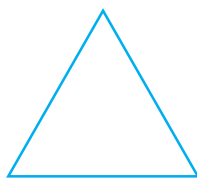
आकृति 14.1 (i)

- (ii) दो, एक समान त्रिज्या वाले वृत्त सर्वांगसम तथा समरूप होते हैं परन्तु भिन्न त्रिज्याओं वाले वृत्त समरूप होते हैं, सर्वांगसम नहीं।



आकृति 14.1 (ii)

- (iii) भिन्न भिन्न भुजाओं के दो समबाहु त्रिभुज समरूप होते हैं परन्तु सर्वांगसम नहीं।



आकृति 14.1 (iii)



टिप्पणी

(iv) भिन्न भिन्न भुजाओं के दो वर्ग सदैव समरूप होते हैं परन्तु सर्वांगसम नहीं।



आकृति 14.1 (iv)

इस पाठ में हम "समरूपता" की संकल्पना के विषय में पढ़ेंगे—विशेषतया त्रिभुजों की समरूपता तथा उनके प्रतिबन्ध। हम उनसे सम्बन्धित कुछ महत्वपूर्ण परिणाम भी पढ़ेंगे।



उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप समर्थ हो जाएंगे कि:

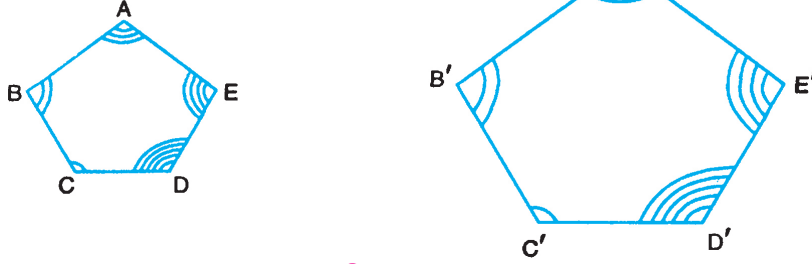
- समरूप आकृतियाँ पहचान सकें;
- सर्वांगसम तथा समरूप आकृतियों में अन्तर कर सकें;
- सिद्ध कर सकें कि यदि एक त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर रेखा खींची जाए तो यह दूसरी भुजाओं को एक ही अनुपात में विभाजित करती है;
- त्रिभुजों की समरूपता के विभिन्न निष्कर्षों को बता सकें जैसे AAA, SSS, SAS इत्यादि;
- समरूपता से संबंधित पाठ्यक्रम में लिखित, ताराकित परिणामों का सत्यापन तथा प्रयोग कर सकें;
- बोधायन/पाइथागोरस प्रमेय को सिद्ध कर सकें;
- इन परिणामों का समरूप त्रिभुजों पर आधारित प्रश्नों को प्रयोग द्वारा सत्यापित करने (या हल करने) में प्रयोग कर सकें।

अपेक्षित पूर्व ज्ञान

- समतलीय आकृतियों जैसे त्रिभुज, चतुर्भुज, वृत्त, आयत, वर्ग इत्यादि का ज्ञान
- त्रिभुजों के सर्वांगसम होने की विभिन्न कसौटियाँ
- संख्याओं का वर्ग तथा वर्गमूल इत्यादि ज्ञात करना
- अनुपात तथा समानुपात
- त्रिभुज के अन्तः तथा बाह्य कोण।



14.1 समरूप समतलीय आकृतियाँ



आकृति 14.2

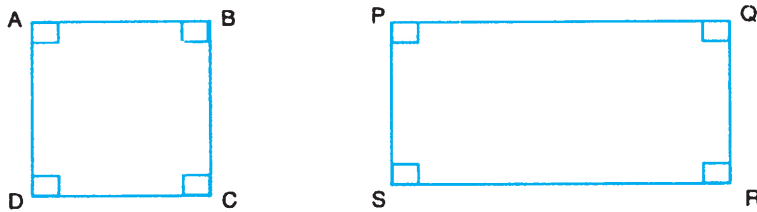
आकृति 14.2 में, दो पंचभुज हैं जो एक ही आकार की लगती हैं। हम देखते हैं कि $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$ और $\angle E = \angle E'$ तथा $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$ है। हम कह सकते हैं कि दो पंचभुज समरूप हैं। अतः हम कह सकते हैं:

कोई भी दो बहुभुज, जिनके संगत कोण समान हों तथा संगत भुजाएँ समानुपाती हों, समरूप होती हैं।

अतः दो बहुभुज समरूप होंगे यदि वह निम्नलिखित दो प्रतिबन्ध संतुष्ट करते हों:

- (i) संगत कोण समान हों
- (ii) संगत भुजाएँ समानुपाती हों।

इनमें से यदि एक भी प्रतिबन्ध ठीक न उतरता हो, तो बहुभुज समरूप नहीं होंगे जैसा कि आकृति 14.3 में एक वर्ग तथा एक आयत को दर्शाया गया है। यहाँ इनके संगत कोण समान हैं परन्तु संगत भुजाएँ समानुपाती नहीं हैं।



आकृति 14.3

14.2 आधारभूत समानुपाती प्रमेय

हम अब आधारभूत समानुपाती प्रमेय देते हैं।



टिप्पणी

यदि त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर एक रेखा खींची जाए जो अन्य दो भुजाओं को प्रतिच्छेद करे, तो वह अन्य दो भुजाओं को एक ही अनुपात में विभाजित करती है।

आकृति 14.4 में, $DE \parallel BC$, उपरोक्त परिणाम के अनुसार

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

हम उपरोक्त परिणाम का सत्यापन आसानी से AD, DB, AE तथा EC को माप कर कर सकते हैं। हम पायेंगे कि

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

हम उपरोक्त परिणाम के विलोम को निम्न प्रकार से कहते हैं:

यदि एक रेखा किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं को एक ही अनुपात में बाँटे, तो वह रेखा उस त्रिभुज की तीसरी भुजा के समान्तर होती है।

अतः आकृति 14.4 में, यदि DE त्रिभुज ABC की भुजाओं AB तथा AC को इस प्रकार बाँटे कि

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}, \text{ तब } DE \parallel BC.$$

हम इस परिणाम को भी $\angle ADE$ तथा $\angle ABC$ को मापकर तथा यह पाकर कि

$$\angle ADE = \angle ABC$$

कह सकते हैं, क्योंकि यह एकान्तर कोण है, अतः DE तथा BC समान्तर हैं।

आइए अब हम कुछ उदाहरण लें:

उदाहरण 14.1: आकृति 14.5 में, $DE \parallel BC$ है। यदि $AD = 3$ सेमी, $DB = 5$ सेमी तथा $AE = 6$ सेमी है, तो AC ज्ञात कीजिए।

हल: $DE \parallel BC$ (दिया है). माना $EC = x$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

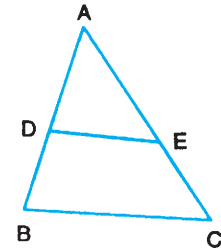
$$\therefore \frac{3}{5} = \frac{6}{x}$$

$$\Rightarrow 3x = 30$$

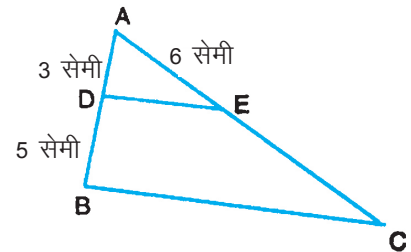
$$\Rightarrow x = 10$$

$$\therefore EC = 10 \text{ सेमी}$$

$$\therefore AC = AE + EC = 16 \text{ सेमी}$$



आकृति 14.4



आकृति 14.5



टिप्पणी

उदाहरण 14.2: आकृति 14.6 में, $AD = 4$ सेमी, $DB = 5$ सेमी, $AE = 4.5$ सेमी तथा $EC = 5\frac{5}{8}$ सेमी है। क्या $DE \parallel BC$ है? अपने उत्तर के कारण दीजिए।

हल: हमें दिया है कि $AD = 4$ सेमी तथा $DB = 5$ सेमी

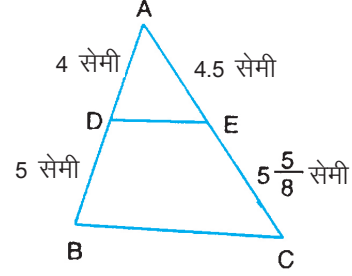
$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{4}{5}$$

इसी प्रकार,
$$\frac{AE}{EC} = \frac{4.5}{45} = \frac{9}{2} \times \frac{8}{45} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

\therefore आधारभूत समानुपाती प्रमेय के विलोम अनुसार,

$$DE \parallel BC$$

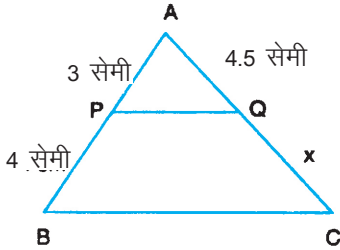


आकृति 14.6

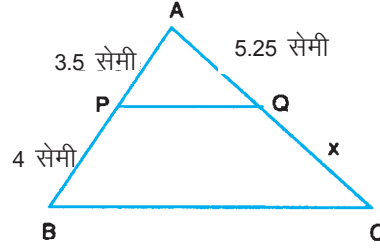


देखें आपने कितना सीखा 14.1

1. आकृति 14.7 (i) तथा (ii) में, $PQ \parallel BC$, प्रत्येक के लिए x का मान ज्ञात कीजिए।



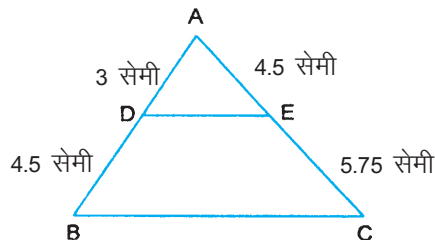
(i)



(ii)

आकृति 14.7

2. आकृति 14.8 में ज्ञात कीजिए कि $DE \parallel BC$ है या नहीं। अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।



आकृति 14.8



टिप्पणी

14.3 त्रिभुज के एक कोण का समद्विभाजक

अब हम एक महत्वपूर्ण परिणाम नीचे देते हैं

किसी त्रिभुज के एक कोण का आन्तरिक समद्विभाजक सम्मुख भुजा को दो ऐसे रेखाखंडों में विभाजित करना है जो कोण बनाने वाली भुजाओं के समानुपाती होते हैं।

उपरोक्त परिणाम के अनुसार यदि AD त्रिभुज ABC के $\angle A$ का आन्तरिक समद्विभाजक है, तो

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \text{ (आकृति 14.9)}$$

हम BD, DC, AB तथा AC को मापकर उपरोक्त परिणाम का सत्यापन आसानी से कर सकते हैं कि

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

यदि हम यह क्रिया दो अन्य त्रिभुजों के साथ करें तो हमें यही परिणाम प्राप्त होगा।

आइए हम उपरोक्त परिणाम को कुछ उदाहरण लेकर स्पष्ट करें।

उदाहरण 14.3: त्रिभुज ABC की भुजाओं AB तथा AC की लम्बाइयाँ क्रमशः 6 सेमी तथा 8 सेमी हैं। $\angle A$ का समद्विभाजक AD, सम्मुख भुजाओं BC को बिन्दु D पर मिलता है तथा $BD = 4.5$ सेमी है। रेखाखण्ड CD की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल: उपरोक्त परिणाम के अनुसार

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

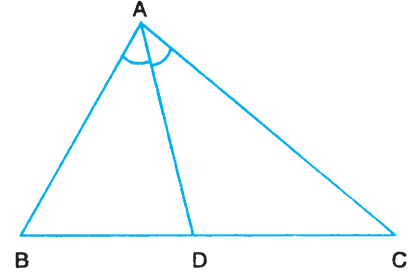
(\because क्योंकि AD, $\angle A$ का समद्विभाजक है)

$$\text{या } \frac{4.5}{x} = \frac{6}{8}$$

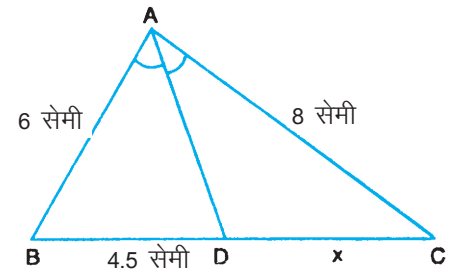
$$\Rightarrow 6x = 4.5 \times 8$$

$$\therefore x = 6$$

अतः, रेखाखण्ड CD की लम्बाई 6 सेमी है।



आकृति 14.9



आकृति 14.10



उदाहरण 14.4: एक त्रिभुज की भुजाएँ 28 सेमी, 36 सेमी तथा 48 सेमी हैं। सबसे छोटी भुजा के सामने के कोण का समद्विभाजक उस भुजा को जिन दो रेखाखण्डों में विभाजित करेगा, उनकी लम्बाइयों ज्ञात कीजिए।

हल: सबसे छोटी भुजा 28 सेमी लम्बी है तथा उसके सामने के कोण A को बनाने वाली भुजाएँ 36 सेमी तथा 48 सेमी लम्बाई की हैं। माना कोण A का समद्विभाजक BC को D पर काटता है। (आकृति 14.11).

$$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$$

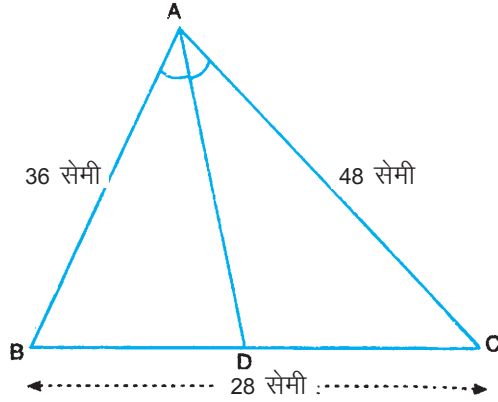
$$\Rightarrow 4BD = 3DC \text{ या } BD = \frac{3}{4} DC$$

$$BC = BD + DC = 28 \text{ सेमी}$$

$$\therefore DC + \frac{3}{4} DC = 28$$

$$\therefore DC = \left(28 \times \frac{4}{7}\right) \text{सेमी} = 16 \text{ सेमी}$$

$$\therefore BD = 12 \text{ सेमी और } DC = 16 \text{ सेमी}$$

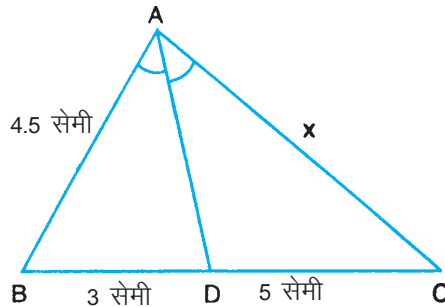


आकृति 14.11



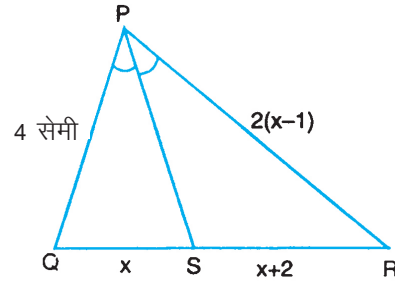
देखें आपने कितना सीखा 14.2

1. आकृति 14.12 में, AD कोण $\angle A$ का समद्विभाजक है जो BC को D पर काटता है। यदि $AB = 4.5$ सेमी, $BD = 3$ सेमी तथा $DC = 5$ सेमी है, तो x ज्ञात कीजिए।



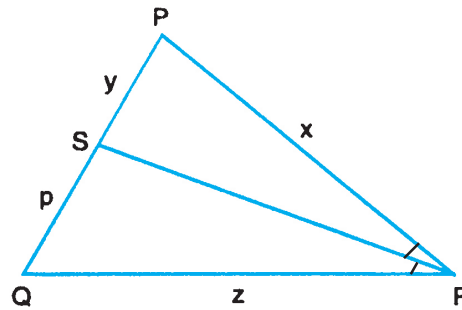
आकृति 14.12

2. आकृति 14.13 में, PS त्रिभुज PQR के कोण P का आन्तरिक समद्विभाजक है। कुछ भुजाओं के माप यहाँ दिये गये हैं। x का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 14.13

3. आकृति 14.14 में, ΔPQR में, RS , $\angle R$ का आन्तरिक समद्विभाजक है। दी गई विमाओं के लिए QS की लम्बाई p को x, y, z के रूप में व्यक्त कीजिए।



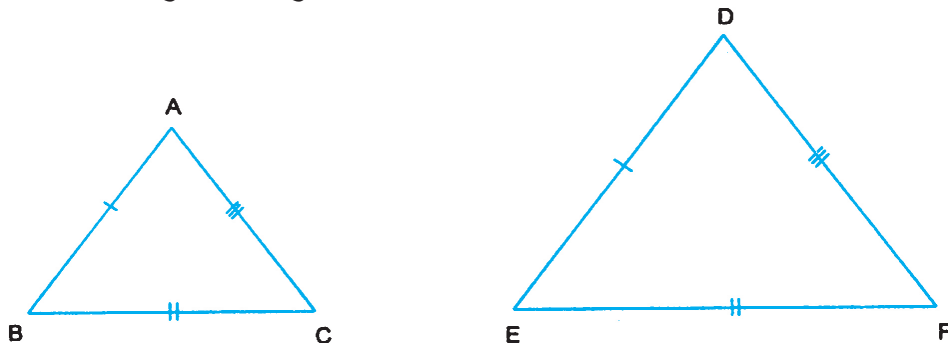
आकृति 14.14

14.4 त्रिभुजों की समरूपता

त्रिभुज एक विशेष प्रकार का बहुभुज है। अतः बहुभुज की समरूपता वाले प्रतिबन्ध त्रिभुजों पर भी लागू होते हैं। अतः

दो त्रिभुज समरूप होंगे यदि

- (i) उनके संगत कोण बराबर हों, तथा
- (ii) उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती हों



आकृति 14.15



हम कहते हैं कि $\triangle ABC$ और $\triangle DEF$ समरूप हैं तथा हम इसे इस प्रकार दर्शाते हैं

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (आकृति 14.15)

यहाँ प्रतीक ' \sim ' "समरूप है" के लिए है

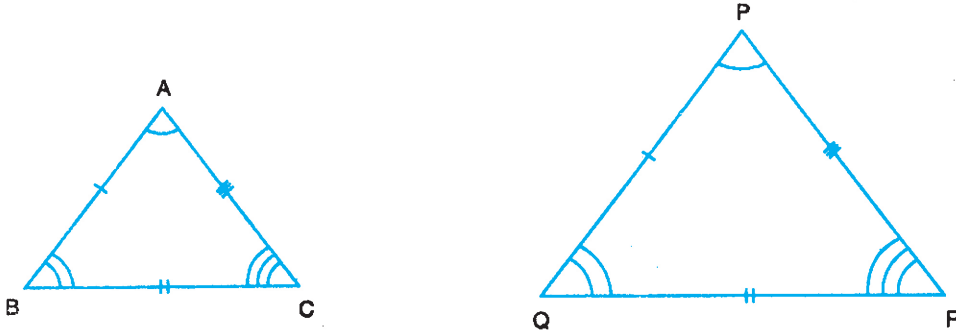
यदि $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, तो परिभाषा के अनुसार

$$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F \text{ तथा } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}.$$

14.4.1 समरूपता का AAA परिणाम

हम दर्शायेंगे कि उपरोक्त दोनों में से एक भी प्रतिबन्ध यदि पूरा हो, तो दूसरा भी अपने आप हो जाता है। आइए निम्न प्रयोग करें:

दो त्रिभुज ABC और PQR बनाइए जिनमें $\angle P = \angle A$, $\angle Q = \angle B$ तथा $\angle R = \angle C$ हो जैसा कि आकृति 14.16 में दर्शाया गया है।



आकृति 14.16

$\triangle ABC$ की भुजाओं AB , BC तथा CA को मापिए तथा $\triangle PQR$ की भुजाएँ PQ , QR तथा RP मापिए।

अब $\frac{AB}{PQ}$, $\frac{BC}{QR}$ तथा $\frac{CA}{RP}$ ज्ञात कीजिए।

आप क्या पाते हैं? आप देखेंगे कि सब अनुपात समान हैं और इसलिए त्रिभुज समरूप हैं।

अब आप अन्य ऐसी त्रिभुजों के साथ यह क्रिया कीजिए जिनके संगत कोण समान हों। आप उनके साथ भी यही परिणाम पायेंगे।

अतः हम कह सकते हैं कि

यदि दो त्रिभुजों में उनके संगत कोण समान हों, तो त्रिभुज समरूप होते हैं।

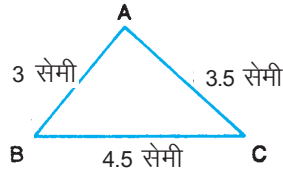
इसे AAA समरूपता परिणाम कहते हैं।



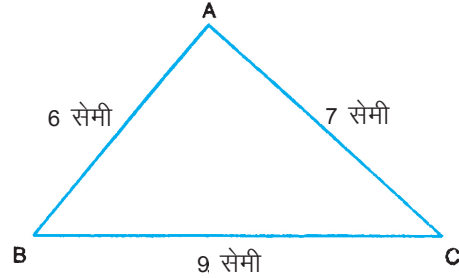
14.4.2 समरूपता के लिए SSS परिणाम

आइए अब निम्न प्रयोग करें:

त्रिभुज ABC बनाइये जिसमें $AB = 3$ सेमी, $BC = 4.5$ सेमी तथा $CA = 3.5$ सेमी [आकृति 14.17 (i)].



(i)



(ii)

आकृति 14.17

अब एक और ΔPQR बनाइये जैसा कि आकृति 14.17(ii) में दर्शाया गया है जिसमें $PQ = 6$ सेमी, $QR = 9$ सेमी तथा $PR = 7$ सेमी हो।

आप देखते हैं कि $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$

अर्थात्, दोनों त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपाती हैं।

अब आप ΔABC तथा ΔPQR के $\angle A, \angle B, \angle C$ तथा $\angle P, \angle Q, \angle R$ मापिए।

आप पाएंगे कि $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q$ तथा $\angle C = \angle R$.

अन्य दो त्रिभुजों, जिनकी संगत भुजाएँ समानुपाती हों, को लेकर इस क्रिया को दोहरायें। आप पायेंगे कि उनके संगत कोण समान होते हैं। इसलिए त्रिभुज समरूप हैं।

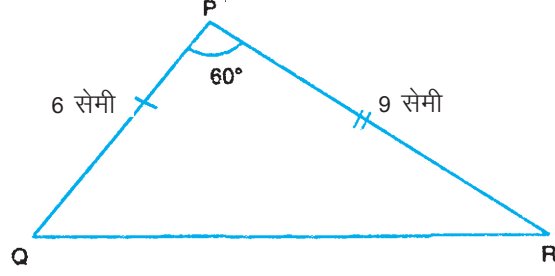
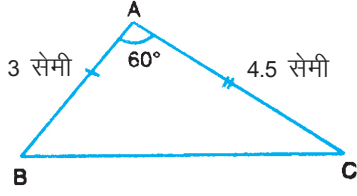
अतः हम कह सकते हैं कि

यदि दो त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपाती हों, तो त्रिभुज समरूप होते हैं। इसे समरूपता का SSS परिणाम कहते हैं।

14.4.3 समरूपता का SAS परिणाम

आइए हम निम्न प्रयोग करें।

एक रेखाखंड $AB = 3$ सेमी लेकर A पर 60° का कोण बनाइए। AC को 4.5 सेमी के बराबर काटकर BC को मिलाइए।



आकृति 14.18

अब रेखाखंड $PQ = 6$ सेमी लेकर P पर 60° का कोण बनाइए तथा $PR = 9$ सेमी के बराबर काटकर QR को मिलाइए।

$\angle B$, $\angle C$, $\angle Q$ तथा $\angle R$ को मापिए। हम पायेंगे कि $\angle B = \angle Q$ तथा $\angle C = \angle R$

अतः $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

अतः हम इस निष्कर्ष पर पहुंचते हैं:

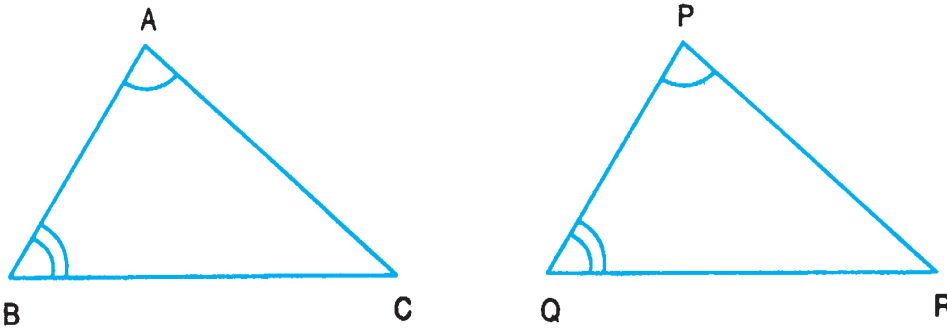
यदि एक त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के एक कोण के बराबर हो तथा इन दो कोणों को बनाने वाली भुजाएँ समानुपाती हैं, तो त्रिभुज समरूप होते हैं।

इसे हम SAS समरूपता परिणाम कहते हैं।

अतः हमारे पास त्रिभुजों की समरूपता के निम्न तीन महत्वपूर्ण परिणाम हैं:

- (i) यदि दो त्रिभुजों में, संगत कोण समान हों, तो त्रिभुज समरूप होते हैं।
- (ii) यदि दो त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपाती हों, तो त्रिभुज समरूप होते हैं।
- (iii) यदि एक त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के एक कोण के बराबर हो तथा उन कोणों को बनाने वाली भुजाएँ समानुपाती हों, तो त्रिभुज समरूप होते हैं।

उदाहरण 14.5: आकृति 14.19 में, दो त्रिभुज ABC तथा PQR दिये गए हैं, जिनमें $\angle A = \angle P$ तथा $\angle B = \angle Q$ । क्या $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ है?



आकृति 14.19



हल: हमें दिया गया है कि

$$\angle A = \angle P \text{ तथा } \angle B = \angle Q$$

हम यह भी जानते हैं कि

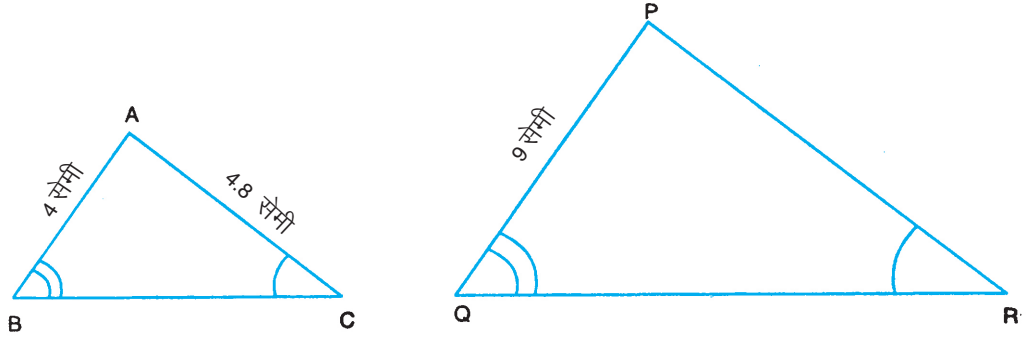
$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle P + \angle Q + \angle R = 180^\circ$$

$$\therefore \angle C = \angle R$$

अतः समरूपता के प्रथम परिणाम AAA के अनुसार

$$\triangle ABC \sim \triangle PQR$$

उदाहरण 14.6: आकृति 14.20 में, $\triangle ABC \sim \triangle PQR$. यदि $AC = 4.8$ सेमी, $AB = 4$ सेमी तथा $PQ = 9$ सेमी है, तो PR ज्ञात कीजिए।



आकृति 14.20

हल: यह दिया गया है कि $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$$

माना $PR = x$ सेमी

$$\therefore \frac{4}{9} = \frac{4.8}{x}$$

$$\Rightarrow 4x = 9 \times 4.8$$

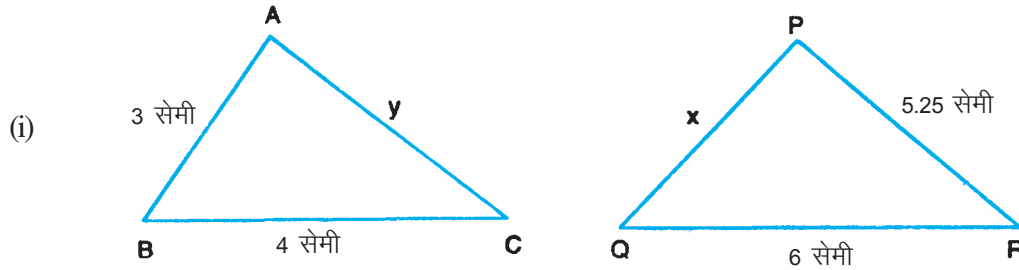
$$\Rightarrow x = 10.8$$

अर्थात् $PR = 10.8$ सेमी

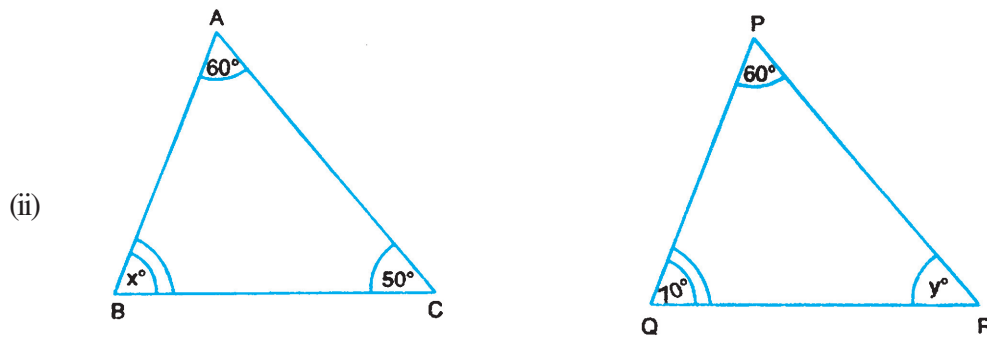


देखें आपने कितना सीखा 14.3

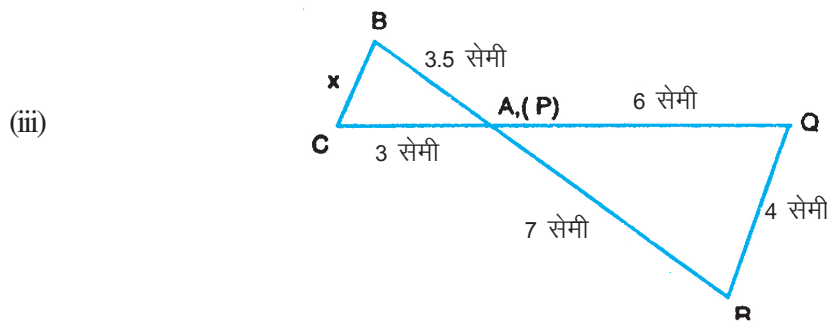
x तथा y के मान ज्ञात कीजिए यदि $\triangle ABC \sim \triangle PQR$



आकृति 14.21



आकृति 14.22



आकृति 14.23

14.5 कुछ अन्य महत्वपूर्ण परिणाम

आइए समकोण त्रिभुज में समकोण वाले शीर्ष से सम्मुख भुजा पर लम्ब डालने पर जो दो त्रिभुज बनते हैं उनकी समरूपता के सम्बन्ध में एक अन्य महत्वपूर्ण परिणाम पढ़ें। उस परिणाम को हम अगले पृष्ठ पर देते हैं तथा उसे सत्यापित करने का प्रयत्न करेंगे।





टिप्पणी

यदि एक समकोण त्रिभुज के समकोण वाले शीर्ष से कर्ण पर लम्ब डाला जाए, तो इस लम्ब के दोनों ओर बने हुए त्रिभुज दिए हुए त्रिभुज के तथा परस्पर एक दूसरे के समरूप होते हैं।

आइए इसे हम एक क्रियाकलाप द्वारा सत्यापित करें।

एक त्रिभुज ABC, जिसमें $\angle A$ समकोण है, की रचना कीजिए। कर्ण पर बिन्दु A से लम्ब AD खींचिए जो BC को बिन्दु D पर मिलता है।

माना $\angle DBA = \alpha,$

$\ominus \quad \angle ADB = 90^\circ,$

$\therefore \quad \angle BAD = 90^\circ - \alpha$

क्योंकि $\angle BAC = 90^\circ$ तथा $\angle BAD = 90^\circ - \alpha$

अतः $\angle DAC = \alpha$

इसी प्रकार $\angle DCA = 90^\circ - \alpha$

$\therefore \Delta ADB$ तथा ΔCDA समरूप हैं क्योंकि इनके सभी संगत कोण समान हैं।

इसी प्रकार ΔBAC के कोण B, A तथा C क्रमशः $\alpha, 90^\circ$ तथा $90^\circ - \alpha$ हैं।

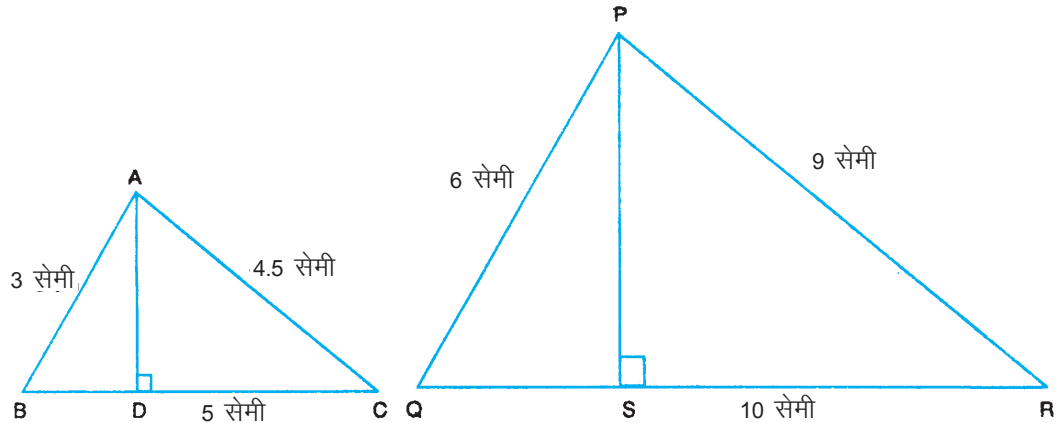
$\therefore \quad \Delta ADB \sim \Delta CDA \sim \Delta CAB$

एक अन्य महत्वपूर्ण परिणाम समरूप त्रिभुजों की भुजाओं तथा उनके क्षेत्रफलों से संबंधित है।

इसका कथन है

दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।

आइये हम इस परिणाम को निम्न क्रियाकलाप से सत्यापित करें। दो त्रिभुज ABC तथा PQR जो समरूप हैं, खींचिए। समरूपता के कारण इनकी भुजाएँ समानुपाती हैं। (आकृति 14.25)



आकृति 14.25



$AD \perp BC$ तथा $PS \perp QR$ खींचिए।

AD तथा PS की लम्बाइयाँ मापिए।

गुणन $AD \times BC$ तथा $PS \times QR$ ज्ञात कीजिए।

आप पाएंगे कि $AD \times BC = 2 \cdot \text{क्षेत्रफल } \Delta ABC$

$PS \times QR = 2 \cdot \text{क्षेत्रफल } \Delta PQR$

$$\therefore \frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta PQR \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{AD \times BC}{PS \times QR} = \frac{BC^2}{QR^2} \quad \dots(i)$$

क्योंकि $\frac{BC}{QR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$

$$\therefore \frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta PQR \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{AC^2}{PR^2}$$

उपरोक्त क्रिया अन्य समरूप भुजाओं के युग्मों को लेकर करने पर, फिर यही परिणाम प्राप्त होगा। आइए कुछ उदाहरण लेकर इसे स्पष्ट करें।

उदाहरण 14.7: दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों में अनुपात ज्ञात कीजिए यदि उनकी संगत भुजाओं का एक युग्म 2.5 सेमी तथा 5.0 सेमी है।

हल: माना त्रिभुज ABC तथा PQR हैं।

माना $BC = 2.5$ सेमी तथा $QR = 5.0$ सेमी

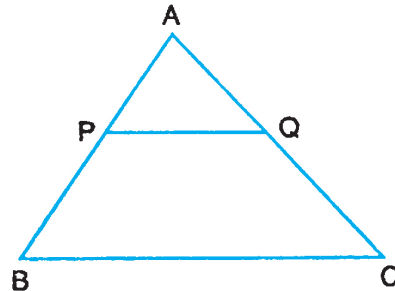
$$\frac{(\Delta ABC) \text{ का क्षेत्रफल}}{(\Delta PQR) \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{(2.5)^2}{(5.0)^2} = \frac{1}{4}$$

उदाहरण 14.8: एक त्रिभुज ΔABC में, $PQ \parallel BC$ तथा PQ, AB तथा AC को क्रमशः P तथा Q पर काटता है। यदि $\frac{AP}{BP} = \frac{2}{3}$ हो, तो ΔAPQ तथा ΔABC के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल: आकृति 14.26 में

$PQ \parallel BC$

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{QC} = \frac{2}{3}$$



आकृति 14.26



टिप्पणी

$$\therefore \frac{BP}{AP} = \frac{QC}{AQ} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore 1 + \frac{BP}{AP} = 1 + \frac{QC}{AQ} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{2}{5}$$

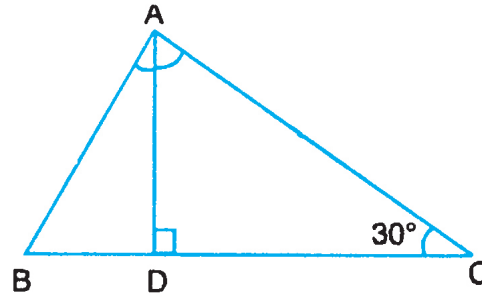
$$\therefore \Delta APQ \sim \Delta ABC$$

$$\therefore \frac{(\Delta APQ) \text{ का क्षेत्रफल}}{(\Delta ABC) \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{AP^2}{AB^2} = \left(\frac{AP}{AB}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} \quad (\because \Delta APQ \sim \Delta ABC)$$



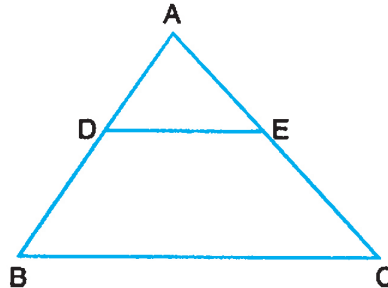
देखें आपने कितना सीखा 14.4

1. आकृति 14.27 में, ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें $A = 90^\circ$ तथा $C = 30^\circ$ । दर्शाइए कि $\Delta DAB \sim \Delta DCA \sim \Delta ACB$ है।



आकृति 14.27

2. उन दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए जिनकी संगत भुजाएँ 3 सेमी तथा 5 सेमी लम्बी हैं।
3. आकृति 14.28 में, ABC एक त्रिभुज है। जिसमें $DE \parallel BC$ है। यदि $AB = 6$ सेमी तथा $AD = 2$ सेमी हो, तो ΔADC तथा समलंब DBCE के क्षेत्रफलों में अनुपात ज्ञात कीजिए।



आकृति 14.28



4. P, Q तथा R क्रमशः $\triangle ABC$ की भुजाओं AB, BC तथा CA के मध्य बिन्दु हैं। दर्शाइए कि $\triangle PQR$ का क्षेत्रफल $\triangle ABC$ के क्षेत्रफल का एक चौथाई है।
5. यदि दो समरूप त्रिभुजों ABC तथा PQR के तदनुरूपी शीर्ष लम्बों में 4 : 9 का अनुपात है, तो $\triangle ABC$ तथा $\triangle PQR$ के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

$$\left[\text{संकेत : } \frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PS} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{PR} \text{ का प्रयोग करें} \right]$$

6. यदि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों में 16 : 25 का अनुपात है, तो त्रिभुजों की संगत भुजाओं में अनुपात ज्ञात कीजिए।

14.6 बौधायन/पाइथागोरस प्रमेय

अब हम एक महत्वपूर्ण प्रमेय को समरूप त्रिभुजों की संकल्पना का प्रयोग करके सिद्ध करेंगे, जो बौधायन/पाइथागोरस प्रमेय के नाम से विख्यात है।

प्रमेय: एक समकोण त्रिभुज में, कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के समान होता है।

दिया है: एक समकोण त्रिभुज ABC, जिसमें $\angle B = 90^\circ$ है।

सिद्ध करना है: $AC^2 = AB^2 + BC^2$

रचना: B से $BD \perp AC$ खींचिए (देखिए आकृति 14.29)

उपपत्ति: $BD \perp AC$

$$\therefore \triangle ADB \sim \triangle ABC \quad \dots(i)$$

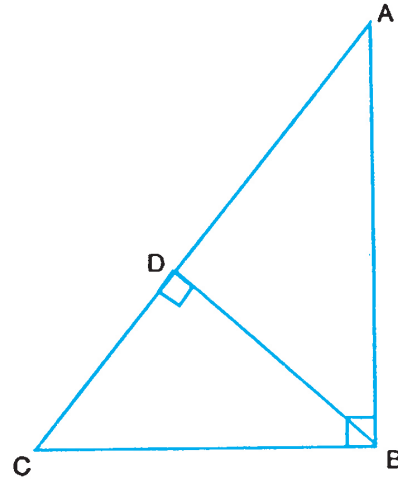
$$\text{और } \triangle BDC \sim \triangle ABC \quad \dots(ii)$$

$$(i), \text{ से हमें मिलता है } \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB} \\ \Rightarrow AB^2 = AC \cdot AD \quad \dots(X)$$

$$(ii) \text{ से हमें मिलता है } \frac{BC}{AC} = \frac{DC}{BC} \\ \Rightarrow BC^2 = AC \cdot DC \quad \dots(Y)$$

(X) तथा (Y), का योग करने पर

$$AB^2 + BC^2 = AC(AD + DC) \\ = AC \cdot AC = AC^2$$



आकृति 14.29



यह प्रमेय प्रसिद्ध ग्रीक गणितज्ञ पाइथागोरस के नाम से विख्यात है। इसे मूलतः एक भारतीय गणितज्ञ बौधायन ने पाइथागोरस से 200 वर्ष पूर्व लगभग 800 ई.पू. में दिया था।

14.6.1 पाइथागोरस प्रमेय का विलोम

उपरोक्त प्रमेय का विलोम नीचे दिया है

एक त्रिभुज में, यदि एक भुजा का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर हो, तो पहली भुजा के सामने का कोण समकोण होता है।

यह परिणाम निम्न क्रिया से सत्यापित किया जा सकता है।

एक त्रिभुज ABC बनाइये जिसकी भुजाएँ 3 सेमी, 4 सेमी तथा 5 सेमी हैं।

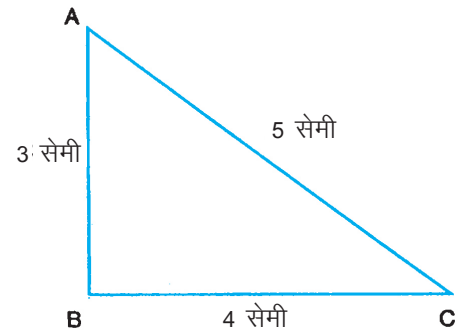
अर्थात्, $AB = 3$ सेमी, $BC = 4$ सेमी

तथा $AC = 5$ सेमी (आकृति 14.30)

आप देख सकते हैं कि $AB^2 + BC^2 = (3)^2 + (4)^2$
 $= 9 + 16 = 25$

तथा $AC^2 = (5)^2 = 25$

$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$



आकृति 14.30

अतः आकृति 14.30 में त्रिभुज उपरोक्त परिणाम के प्रतिबन्ध को पूरा करता है।

अब $\angle ABC$, को मापिये। आप पायेंगे कि $\angle ABC = 90^\circ$ है। इसी प्रकार आप 5 सेमी, 12 सेमी तथा 13 सेमी, भुजा वाले; तथा 7 सेमी, 24 सेमी तथा 25 सेमी वाले त्रिभुज बनाकर देखिये कि क्रमशः 13 सेमी तथा 25 सेमी वाली भुजाओं के सामने के कोण 90° हैं।

उदाहरण 14.9: किसी समकोण त्रिभुज में समकोण के साथ वाली भुजाएँ 5 सेमी तथा 12 सेमी लम्बाई की हैं। कर्ण की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना ABC समकोण त्रिभुज है जिसमें B पर समकोण है।

$\therefore AB = 5$ सेमी, $BC = 12$ सेमी

अब, $AC^2 = BC^2 + AB^2$
 $= (12)^2 + (5)^2$
 $= 144 + 125$
 $= 169$

$\therefore AC = 13$

अतः कर्ण की लम्बाई 13 सेमी है।



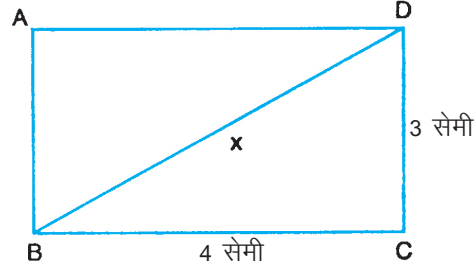
टिप्पणी

उदाहरण 14.10: किसी आयत के विकर्ण की लम्बाई ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाएँ 3 सेमी तथा 4 सेमी हैं।

हल: आकृति 14.31 में, ABCD एक आयत है। विकर्ण BD को मिलाइये। अब DCB एक समकोण त्रिभुज है।

$$\begin{aligned} \therefore BD^2 &= BC^2 + CD^2 \\ &= 4^2 + 3^2 \\ &= 16 + 9 = 25 \end{aligned}$$

$$\therefore BD = 5$$



आकृति 14.31

अतः आयत ABCD के विकर्ण की लम्बाई 5 सेमी है।

उदाहरण 14.11: किसी समबाहु त्रिभुज में, सत्यापित कीजिए कि किसी भुजा के वर्ग का तीन गुना शीर्ष लम्ब के वर्ग के चार गुने के बराबर होगा।

हल: शीर्ष लम्ब $AD \perp BC$

तथा $BD = CD$ (आकृति 14.32)

माना $AB = BC = CA = 2a$

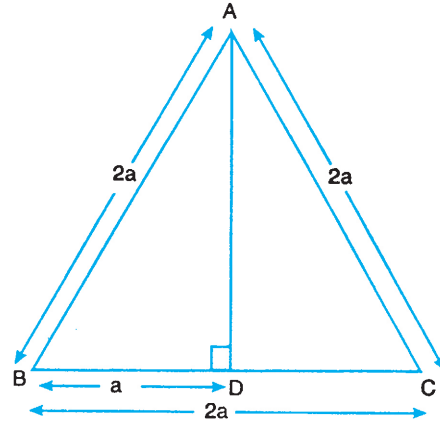
तथा $BD = CD = a$

माना $AD = x$

$$\therefore x^2 = (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2$$

$$3 \times (\text{भुजा})^2 = 3 \cdot (2a)^2 = 12a^2$$

$$4 \times (\text{शीर्ष लम्ब})^2 = 4 \cdot 3a^2 = 12a^2$$



आकृति 14.32

अतः परिणाम सही है।

उदाहरण 14.12: ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें कोण $C = 90^\circ$ है। यदि CD, शीर्ष C से AB पर डाले गए लम्ब की लम्बाई p है और $BC = a$, $AC = b$ तथा $AB = c$ हो, तो दर्शाइये कि

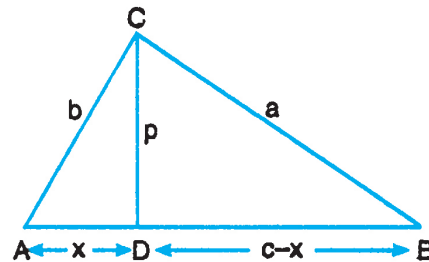
(i) $pc = ab$

(ii) $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

हल: (i) $CD \perp AB$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ACD$$

$$\therefore \frac{c}{b} = \frac{a}{p}$$



आकृति 14.33



टिप्पणी

$$\Rightarrow pc = ab$$

$$(ii) AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$\text{या } c^2 = b^2 + a^2$$

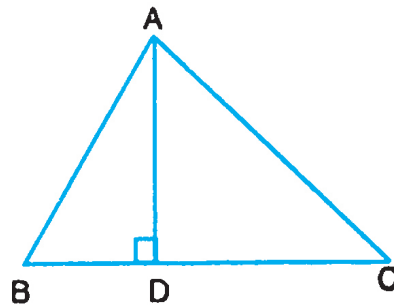
$$\left(\frac{ab}{p}\right)^2 = b^2 + a^2$$

$$\text{या } \frac{1}{p^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$



देखें आपने कितना सीखा 14.5

- किसी त्रिभुज ABC की भुजाएँ नीचे दी गई हैं। ज्ञात कीजिए कि इनमें से कौनसा समकोण त्रिभुज है: [AB = c, BC = a, CA = b]
 - a = 4 सेमी, b = 5 सेमी, c = 3 सेमी
 - a = 1.6 सेमी, b = 3.8 सेमी, c = 4 सेमी
 - a = 9 सेमी, b = 16 सेमी, c = 18 सेमी
 - a = 7 सेमी, b = 24 सेमी, c = 25 सेमी
- दो बाँस, जिनकी ऊँचाइयाँ 6 मी तथा 11 मी हैं, समतल भूमि पर उर्ध्वाधर खड़े हैं। यदि उनके पादों में 12 मी की दूरी हो, तो उनके ऊपरी सिरों के बीच दूरी ज्ञात कीजिए।
- किसी वर्ग, जिसकी भुजा 10 सेमी है, के विकर्ण की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
- आकृति 14.34 में, $\angle C$ न्यूनकोण है तथा $AD \perp BC$ है। दर्शाइए कि $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 BC \cdot DC$.



आकृति 14.34



5. किसी समकोण त्रिभुज ABC, जिसमें $\angle B = 90^\circ$ है, की भुजाओं AB तथा AC के क्रमशः मध्य बिन्दु L तथा M हैं। दर्शाइये कि $4LC^2 = AB^2 + 4BC^2$ है।
6. एक $\triangle ABC$, जिसमें $\angle C = 90^\circ$ है, की भुजाओं CA तथा CB पर क्रमशः बिन्दु P तथा Q स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि $AQ^2 + BP^2 = AB^2 + PQ^2$ है।
7. $\triangle PQR$ एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle Q = 90^\circ$ है। सिद्ध कीजिए कि $PR^2 = 2PQ^2$ है।
8. एक सीढ़ी दीवार के साथ इस तरह लगी है कि वह दीवार की 4 मी की ऊँचाई तक पहुँचती है। यदि सीढ़ी का पाद दीवार से 3 मी की दूरी पर है तो सीढ़ी की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



आइए दोहराएँ

- वह वस्तुएँ जिनके आकार एक जैसे हों पर माप भिन्न हों, समरूप वस्तुएँ कहलाती हैं।
- कोई दो बहुभुज जिसके संगत कोण समान तथा संगत भुजाएँ समानुपाती हैं, समरूप होती हैं।
- यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर एक रेखा खींची जाए, तो यह दूसरी भुजाओं को एक ही अनुपात में विभाजित करती है तथा इसका विलोम।
- किसी त्रिभुज के एक कोण का आन्तरिक समद्विभाजक, सम्मुख भुजा को दो ऐसे रेखाखण्डों में विभाजित करता है, जो कोण बनाने वाली भुजाओं के समानुपाती होते हैं।
- दो त्रिभुज समरूप होते हैं यदि
 - (a) उनके संगत कोण समान हों
 - (b) उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती हों
- समरूपता की कसौटियाँ
 - AAA कसौटी
 - SSS कसौटी
 - SAS कसौटी
- यदि एक समकोण त्रिभुज के समकोण वाले शीर्ष से कर्ण पर लम्ब डाला जाए, तो इस लम्ब के दोनों ओर बने त्रिभुज दिए हुए त्रिभुज के तथा परस्पर एक दूसरे के समरूप होते हैं।
- दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी तदनुरूपी भुजाओं के वर्गों के अनुपात के समान होता है।

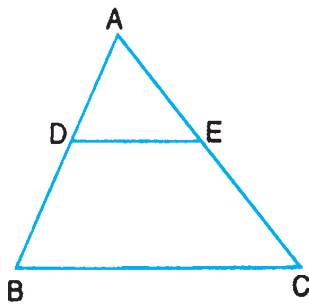


- एक समकोण त्रिभुज के कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है। (बौधायन/पाइथागोरस प्रमेय)
- यदि किसी त्रिभुज में किसी भुजा का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है तो पहली भुजा के सामने का कोण समकोण होता है। (पाइथागोरस प्रमेय का विलोम)

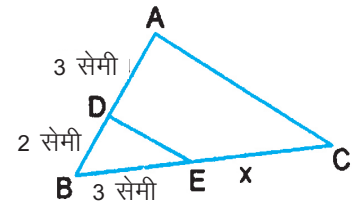


आइए अभ्यास करें

1. दो बहुभुजों की समरूपता की कसौटियाँ लिखिए।
2. दो त्रिभुजों की समरूपता की विभिन्न कसौटियाँ लिखिए।
3. निम्न में किस किस में ΔABC तथा ΔPQR समरूप हैं?
 - (i) $\angle A = 40^\circ, \angle B = 60^\circ, \angle C = 80^\circ, \angle P = 40^\circ, \angle Q = 60^\circ$ तथा $\angle R = 80^\circ$
 - (ii) $\angle A = 50^\circ, \angle B = 70^\circ, \angle C = 60^\circ, \angle P = 50^\circ, \angle Q = 60^\circ$ तथा $\angle R = 70^\circ$
 - (iii) $AB = 2.5$ सेमी, $BC = 4.5$ सेमी, $CA = 3.5$ सेमी
 $PQ = 5.0$ सेमी, $QR = 9.0$ सेमी, $RP = 7.0$ सेमी
 - (iv) $AB = 3$ सेमी, $BC = 7.5$ सेमी, $CA = 5.0$ सेमी
 $PQ = 4.5$ सेमी, $QR = 7.5$ सेमी, $RP = 6.0$ सेमी
4. आकृति 14.35 में, $AD = 3$ सेमी, $AE = 4.5$ सेमी, $DB = 4.0$ सेमी हो, तो CE ज्ञात कीजिए, दिया गया है कि $DE \parallel BC$ है।

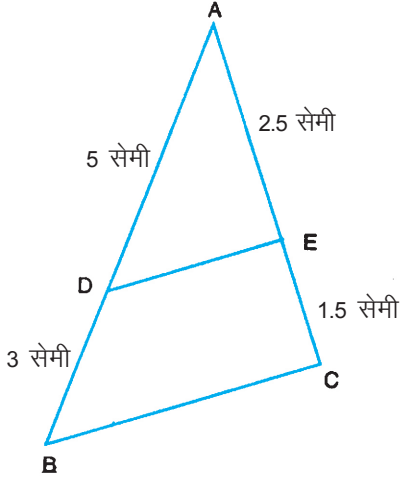


आकृति 14.35

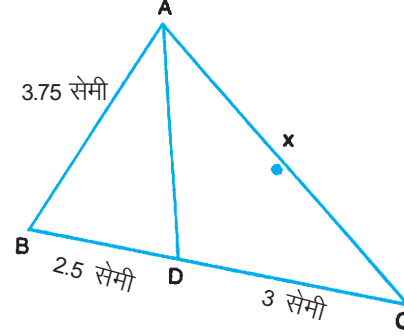


आकृति 14.36

5. आकृति 14.36 में, $DE \parallel AC$ है। आकृति में दी गई विमाओं से x का मान ज्ञात कीजिए।
6. आकृति 14.37 में, एक ΔABC है, जिसमें $AD = 5$ सेमी, $DB = 3$ सेमी, $AE = 2.50$ सेमी तथा $EC = 1.5$ सेमी है। क्या $DE \parallel BC$ है? अपने उत्तर के लिए कारण लिखिए।



आकृत 14.37

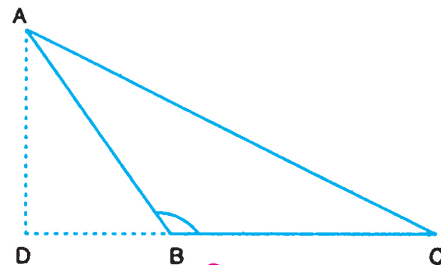


आकृत 14.38

7. आकृति 14.38 में, $\triangle ABC$ के $\angle A$ का आन्तरिक समद्विभाजक AD है। दी गयी विमाओं से x ज्ञात कीजिए।
8. दो समरूप त्रिभुजों ABC तथा DEF के परिमाण क्रमशः 12 सेमी तथा 18 सेमी हैं। $\triangle ABC$ और $\triangle DEF$ के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
9. दो समरूप त्रिभुजों ABC तथा PQR के शीर्ष लम्ब AD तथा PS की लम्बाइयाँ 2.5 सेमी तथा 3.5 सेमी हैं। $\triangle ABC$ तथा $\triangle PQR$ के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
10. निम्न में से कौन से त्रिभुज समकोण त्रिभुज हैं?
 - (i) $AB = 5$ सेमी, $BC = 12$ सेमी, $CA = 13$ सेमी
 - (ii) $AB = 8$ सेमी, $BC = 6$ सेमी, $CA = 10$ सेमी
 - (iii) $AB = 10$ सेमी, $BC = 5$ सेमी, $CA = 6$ सेमी
 - (iv) $AB = 25$ सेमी, $BC = 24$ सेमी, $CA = 13$ सेमी
 - (v) $AB = a^2 + b^2$, $BC = 2ab$, $CA = a^2 - b^2$
11. $2a$ भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
12. 12 मी तथा 17 मी ऊँचाई के दो बांस समतल भूमि पर खड़े हैं तथा उनके पादों के बीच की दूरी 12 मी है। उनके शिखरों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

13. आकृति 14.39 में, दर्शाइये कि

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 BC \cdot CD$$



आकृति 14.39



टिप्पणी

14. एक सीढ़ी दीवार के साथ रखने पर भूमि से 8 मी की ऊँचाई तक पहुँचती है। यदि दीवार तथा सीढ़ी के पाद के बीच की दूरी 6 मी है, तो सीढ़ी की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
15. एक समबाहु त्रिभुज में दर्शाइए कि एक भुजा के वर्ग का तीन गुना उसकी माध्यिका के वर्ग के चार गुने के बराबर होता है।



देखें आपने क्या सीखा के उत्तर

14.1

1. (i) 6 सेमी (ii) 6 सेमी (iii) 10 सेमी
2. (i) नहीं (ii) हाँ (iii) हाँ

14.2

1. 7.5 सेमी 2. 4 सेमी
3. $\frac{yz}{x}$ ($x \neq -1$)

14.3

1. (i) $x = 4.5, y = 3.5$ (ii) $x = 70, y = 50$ (iii) $x = 2$ सेमी, $y = 7$ सेमी

14.4

2. 9 : 25 3. 1 : 8 5. 16 : 81 6. 4 : 5

14.5

1. (i) हाँ (ii) नहीं (iii) नहीं (iv) हाँ
2. 13 मी 3. $10\sqrt{2}$ सेमी 8. 5 मी



आइए अभ्यास करें के उत्तर

3. (i) तथा (iii) 4. 6 सेमी 5. 4.5 सेमी 6. हाँ: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$
7. 4.5 सेमी 8. 4 : 9 9. 25 : 49 10. (i), (ii), (iv) तथा (v)
11. $\sqrt{3} a^2$ 12. 13 मी 14. 10 मी