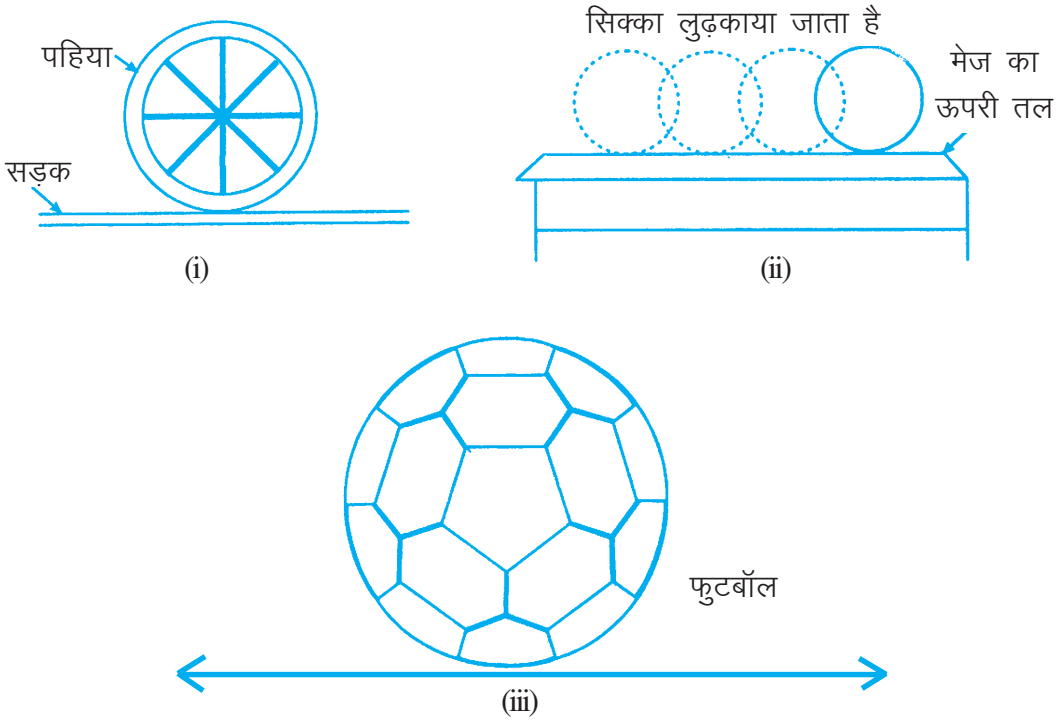
17

छेदक, स्पर्श रेखाएँ तथा उनकी विषेशताएँ

एक चलती हुई साइकिल को देखिए। आप देखेंगें कि किसी भी क्षण साइकिल का केवल कुछ ही भाग सड़क को स्पर्श करता है। यह कहना अधिक ठीक होगा कि किसी भी क्षण साइकिल के पहिए का केवल एक ही बिंदु सड़क को स्पर्श करता है।

यदि आप एक गोल सिक्के को खड़ा करके मेज अथवा फर्श के तल पर लुढ़काते हैं, तो आप देखते हैं कि किसी भी क्षण सिक्के के गोलाकार भाग का केवल एक ही बिंदु मेज़ अथवा फर्श के तल को स्पर्श करता है।



आकृति 17.1

उपरोक्त स्थितियों से आप क्या देखते हैं?

यदि आप साइकिल के पहिए को अथवा सिक्के को एक वृत्त मान लें, तथा स्पर्श करती पृश्ठ (सड़क अथवा मेज)को एक रेखा मान लें, तो उपरोक्त उदाहरण बताते हैं कि एक वृत्त एक रेखा को एक बिंदु पर स्पर्श करता है। इस पाठ में, हम एक रेखा तथा वृत्त के संभावित संपर्क के विशय में पढ़ेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप समर्थ हो जाएंगे कि:

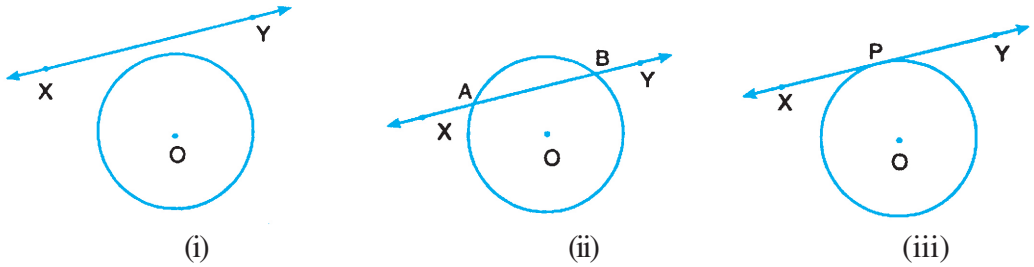
- एक वृत्त की छेदक तथा स्पर्श रेखा की परिभाशा दे सकें;
- एक छेदक तथा स्पर्श रेखा के बीच अंतर बता सकें;
- सिद्ध कर सकें कि एक वृत्त के किसी बाह्य बिंदु से वृत पर खींची गई दो स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ समान होती हैं;
- पाठ्यक्रम में दिए गए, छेदक तथा स्पर्श रेखाओं से सम्बन्धित अतारांकित परिणामों को प्रयोगों द्वारा सत्यापित कर सकें।

अपेक्षित पूर्वज्ञान

- कोणों तथा रेखाखण्डों की माप
- दी गई त्रिज्याओं के वृत्त खींचना
- दी गई रेखाओं के समांतर तथा लम्बवत रेखाएं खीचना
- रेखाओं, कोणों, सर्वांगसमता तथा वृत्तों के पूर्व पढ़े गए महत्वपूर्ण परिणाम
- पाइथागोरस प्रमेय

17.1 छेदक तथा स्पर्श रेखाएँ – एक परिचय

पहले के पाठों में, आपने रेखाओं तथा वृत्तों के बारे में पढ़ा है। याद कीजिए कि वृत्त, तल के एक बिंदु का बिंदुपथ है जो इस प्रकार चलता है कि तल के किसी स्थिर बिंदु से उसकी दूरी सदा समान रहती है। उसी स्थिर बिंदु को वृत्त का केंद्र तथा स्थिर दूरी को वृत्त की त्रिज्या कहते हैं। आप यह भी जानते हैं कि एक रेखा अनन्त बिंदुओं का संग्रह है, जो कि किसी बिंदु के दोनो ओर अनन्त तक फैले होते है; जबकि एक रेखाखण्ड, एक रेखा का वह भाग है जो दो बिंदुओं के बीच सीमित हो जाता है।



(i) (ii) (iii)

आकृति 17.2

अब आप उस प्रकरण को लीजिए जहाँ वृत्त तथा रेखा एक ही तल में स्थित हैं, जैसा कि आकृति 17.2. में दिखाया गया है। इसकी तीन स्थितियां हो सकती हैं।

आप देख सकते हैं कि आकृति 17.2(i) में, रेखा XY केंद्र O वाले वृत्त को प्रतिच्छेद नहीं करती। अर्थात् हम कह सकते हैं कि वृत्त तथा रेखा XY में कोई भी बिंदु सार्व (अथवा उभयनिष्ठ) नहीं है। आकृति 17.2 (ii) में, रेखा XY वृत्त को दो भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है तथा आकृति 17.2 (iii)में, रेखा XY, वृत्त को केवल एक ही बिंदु पर प्रतिच्छेद करती है तथा कहा जाता है कि रेखा वृत्त को बिंदु P पर स्प र्श करती है।

अतः, हम कह सकते हैं कि एक रेखा और वृत्त के प्रतिच्छेदन में तीन सम्भावनाएं होती हैं:

(i) रेखा, वृत्त को प्रतिच्छेद नहीं करती, अर्थात् रेखा वृत्त के बाह्य भाग में है।

(ii) रेखा, वृत्त को दो विभिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है। इस स्थिति में रेखा का कुछ भाग वृत्त के अन्तः भाग में, दो बिंदु वृत्त पर तथा रेखा का भोश भाग वृत्त के बाह्य क्षेत्र (भाग) में स्थित है।

(iii) रेखा वृत्त को केवल एक बिंदु पर स्पर्श करती है।

स्पर्श रेखा

एक रेखा जो वृत्त को केवल एक ही बिंदु पर स्पर्श करती है, स्पर्श रेखा कहलाती है तथा वह बिंदु, जहाँ रेखा वृत्त को स्पर्श करती है, स्पर्श बिंदु कहलाता है।

अतः आकृति 17.2 (iii) में, XY वृत्त की एक स्पर्श रेखा है तथा P स्पर्श बिंदु है।

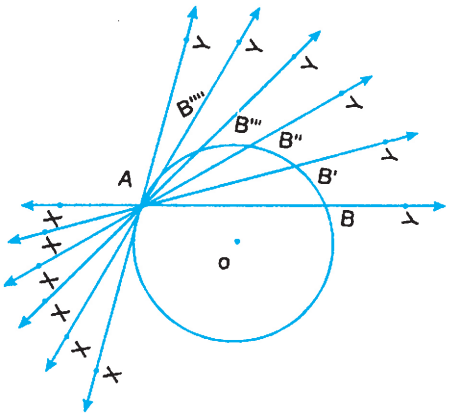
छेदक

एक रेखा जो वृत्त को दो भिन्न बिंदुओं पर काटती है, छेदक रेखा कहलाती है। (प्रायः उसे छेदक ही कहा जाता है)

आकृति 17.2 (ii) में, XY वृत्त की एक छेदक रेखा है और A तथा B रेखा XY तथा वृत्त, जिसका केंद्र O है, के प्रतिच्छेद बिंदु हैं।

17.2 स्पर्श रेखा, सीमांत रूप में

माना XY, केंद्र O वाले वृत की छेदक रेखा है, जो वृत्त को बिंदुओं A तथा B पर काटती है। माना एक बिंदु A, जो वृत्त पर स्थित है तथा छेदक रेखा XY का भाग है, स्थिर कर दिया गया है तथा छेदक इस बिंदु A के गिर्द घूमती हुई वृत्त को B′, B″, B‴, B⁗ इत्यादि पर काटती है, जैसा कि आकृति 17.3 में दिखाया गया है, तथा अन्त में वह XAY हो जाती है, जब वह वृत्त की A पर स्प र्श रेखा बन जाती है।



आकृति 17.3

अतः हम कह सकते हैं कि

एक स्पर्श रेखा, छेदक रेखा का सीमान्त रूप हैं जबकि दोनों प्रतिच्छेद बिन्दु संपाती हो जाते हैं।

17.3 स्पर्श बिंदु से होकर जाती हुई स्पर्श रेखा तथा त्रिज्या

माना XY एक वृत्त, जिसका केंद्र O है, की बिंदु P पर स्पर्श रेखा है। OP को मिलाएँ। स्पर्श रेखा XY पर बिंदु Q, R, S तथा T लें तथा OQ, OR, OS तथा OT को मिलाएँ।

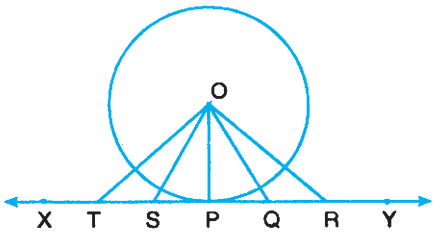
क्योंकि बिंदु Q, R, S तथा T वृत्त के बाह्य बिंदु हैं तथा P वृत्त पर स्थित है,

∴ OP की लंबाई OQ, OR, OS तथा OT में से प्रत्येक से कम है।

ज्यमिति के पूर्व ज्ञान से हम जानते हैं, कि

"किसी बिंदु से, जो एक रेखा पर स्थित नहीं है, एक रेखा पर खींचे गए सभी रेखाखण्डों मे से लम्ब रेखाखण्ड सबसे छोटा होता है।"

क्योंकि O से रेखा XY तक खींचे गए रेखाखंडों में OP सबसे छोटा है, इसलिए OP ⊥ XY है।



आकृति 17.4

अतः हम कह सकते हैं कि

वृत्त की एक स्पर्श रेखा, स्पर्श बिंदु से होकर जाती हुई वृत्त की त्रिज्या पर लम्ब होती है।

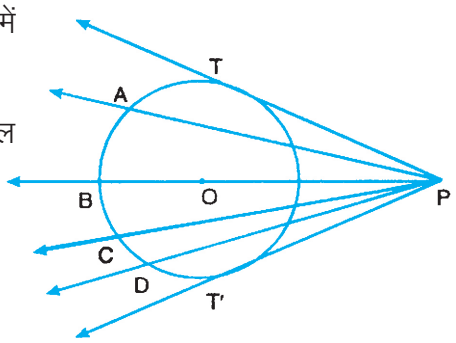
उपरोक्त परिणाम ∠OPX तथा ∠OPY को मापकर, तथा यह देख कर कि प्रत्येक 90° का है, द्वारा भी सत्यापित किया जा सकता है।

17.4 वृत्त के बाह्य बिंदु से वृत्त की स्पर्श रेखाएँ

केंद्र O वाले वृत्त के बाह्य क्षेत्र में एक बिंदु P लीजिए। P से होकर जाती हुई कुछ रेखाएं खींचिए। उनमे से कुछ PT, PA, PB, PC, PD तथा PT′ हैं, जो आकृति 17.5 में दिखाई गई हैं।

इनमें से कितनी रेखाएँ वृत्त को स्पर्श करती हैं? केवल दो।

इस क्रियाकलाप को एक अन्य बिंदु तथा अन्य वृत्त लेकर दोहरांए। आप पुनः वही परिमाण पाएँगे।



आकृति 17.5

अतः हम कह सकते हैं कि

किसी बाह्य बिंदु से, वृत्त पर केवल दो स्पर्श रेखाएं खींची जा सकती हैं।

यदि बिंदु P वृत्त पर स्थित हो, तो क्या फिर भी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं। आप देख सकते हैं कि तब केवल एक स्पर्श रेखा खींची जा सकती है। उस स्थिति में जब P वृत के अन्तः क्षेत्र में है, हम क्या कह सकते हैं? इस स्थिति में, P से खींची गई प्रत्येक रेखा वृत्त को दो बिन्दुओं पर काटेगी। अतः वृत्त के अन्तः बिंदु से वृत पर कोई भी स्पर्श रेखा नहीं खींची जा सकती।

(A) अब आप PT तथा PT′ की लंबाइयां मापें। आप पायेंगे कि

$$PT = PT' \qquad \text{....(i)}$$

(B) दिया है : एक वृत्त जिसका केंद्र O है। PT तथा PT′ एक बाह्य बिंदु P से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ हैं।

सिद्ध करना है : PT = PT′

रचना : OP, OT तथा OT′ को मिलाइए (आकृति 17.6)

उपपत्ति : त्रिभुजों OPT तथा OPT′ में,

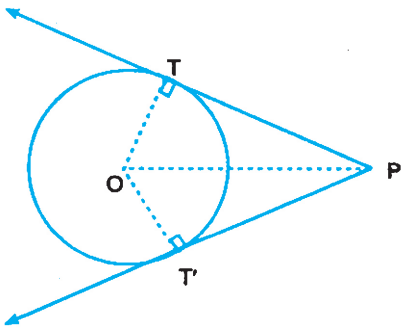
$\angle OTP = \angle OT'P$ (प्रत्येक समकोण है)

OT = OT′ (त्रिज्याएँ)

OP = OP (उभयनिष्ठ)

$\Delta OPT \cong \Delta OPT'$ (RHS)

$\therefore PT = PT'$



आकृति 17.6

वृत के किसी बाह्य बिंदु से वृत पर खींची गई दोनों स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ समान होती हैं।

आकृति 17.6 से, $\angle OPT = \angle OPT'$ (क्योंकि $\Delta OPT \cong \Delta OPT'$)

अतः,

वृत के किसी बाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ उस रेखा, जो बाह्य बिंदु को केंद्र से मिलाती है, पर समान कोण बनाती हैं।

आइए कुछ उदाहरण लेकर स्पष्ट करें :

उदाहरण 17.1: आकृति 17.7 में, OP = 5 सेमी है तथा वृत्त की त्रिज्या 3 सेमी है। बिंदु P से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा PT की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल: $\angle OTP = 90^o$ है। माना $PT = x$ है।

समकोण त्रिभुज OTP में,

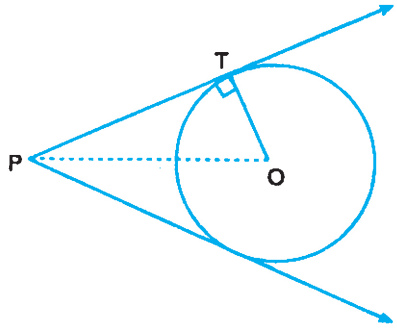
$$OP^2 = OT^2 + PT^2$$

या $5^2 = 3^2 + x^2$

या $x^2 = 25 - 9 = 16$

$\therefore$ $x = 4$

अतः स्पर्श रेखा PT की लंबाई 4 सेमी है।



आकृति 17.7

उदाहरण 17.2: आकृति 17.8 में, बिंदु P से वृत्त पर स्पर्श रेखाएं PT तथा PT′ खींची गई हैं। यदि वृत्त की त्रिज्या 7 सेमी है तथा वृत्त के केंद्र से P की दूरी 25 सेमी है तो PT तथा PT′ की लंबाइयाँ ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ OP = 25 सेमी तथा OT = 7 सेमी है।

हम यह भी जानते हैं कि

$\angle OTP = 90^o$ है।

$\therefore$ $PT^2 = OP^2 - OT^2$

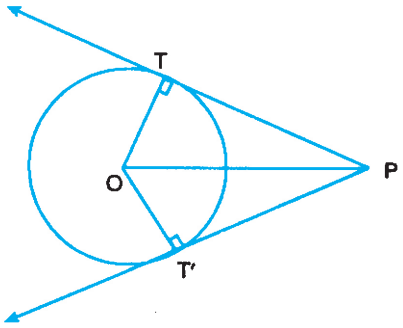
$= 625 - 49 = 576 = (24)^2$

$\therefore$ PT = 24 सेमी

हम यह भी जानते हैं कि

$PT = PT'$

$\therefore$ PT′ = 24 सेमी



आकृति 17.8

उदाहरण 17.3: आकृति 17.9 में, A, B तथा C एक वृत्त, जिसका केंद्र O है, के बाह्य बिंदु हैं। स्पर्श रेखाओं AP, BQ तथा CR की लंबाइयाँ क्रमशः 3 सेमी, 4 सेमी तथा 3.5 सेमी हैं। ΔABC का परिमाप ज्ञात कीजिए।

हल: मह जानते हैं कि वृत्त के किसी बाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ समान होती हैं।

$\therefore$ $AP = AR$

$BP = BQ,$

$CQ = CR$

$\therefore$ $AP = AR = 3$ सेमी

$BP = BQ = 4$ सेमी

तथा $CR = CQ = 3.5$ सेमी

$AB = AP + PB;$

$= (3 + 4)$ सेमी $= 7$ सेमी

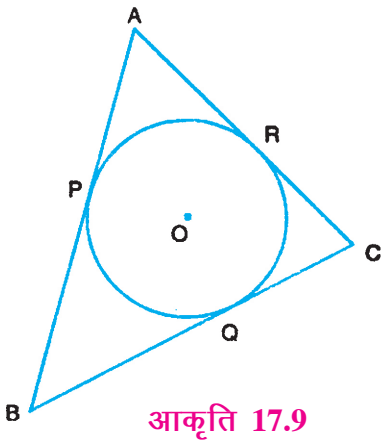
$BC = BQ + QC;$

$= (4 + 3.5)$ सेमी $= 7.5$ सेमी

$CA = AR + CR$

$= (3 + 3.5)$ सेमी

$\therefore$ $= 6.5$ सेमी



आकृति 17.9

$\therefore$ ΔABC का परिमाप $= (7 + 7.5 + 6.5)$ सेमी $= 21$ सेमी

उदाहरण 17.4: आकृति 17.10 में, $\angle AOB = 50^\circ$ है। $\angle ABO$ तथा $\angle OBT$ ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि $OA \perp XY$ है।

$\Rightarrow$ $\angle OAB = 90^\circ$

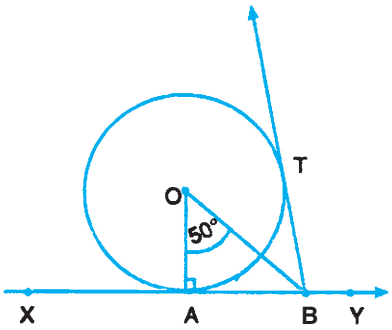
$\therefore$ $\angle ABO = 180^\circ - (\angle OAB + \angle AOB)$

$= 180^\circ - (90^\circ + 50^\circ) = 40^\circ$

हम जानते हैं कि $\angle ABO = \angle OBT$

$\Rightarrow$ $\angle OBT = 40^\circ$

$\therefore$ $\angle ABO = \angle OBT = 40^\circ$



आकृति 17.10

देखें आपने कितना सीखा 17.1

1. रिक्त स्थानों को भरिए :

   (i) एक स्पर्श रेखा, स्पर्श बिंदु से होकर जाती हुई त्रिज्या पर _____ होती है।

   (ii) किसी बाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ _____ होती हैं।

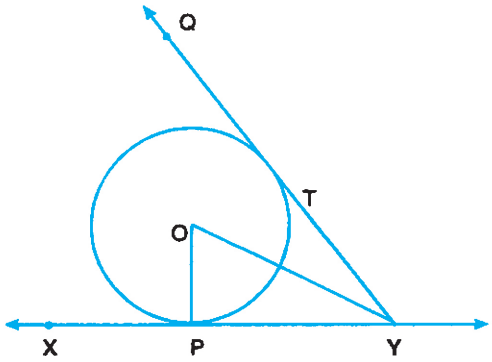
(iii) एक स्पर्श रेखा छेदक का सीमांत रूप है जब दोनों _____ एक हो जाते हैं।

(iv) किसी बाह्य बिंदु से वृत्त पर _____ स्पर्श रेखाएं खीची जा सकती हैं।

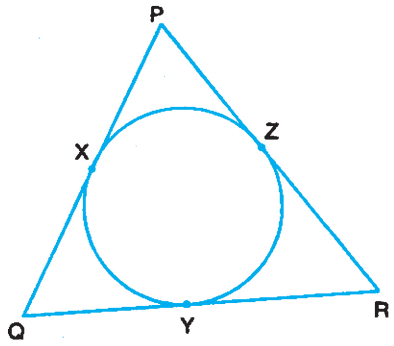
(v) वृत्त के अन्तः बिंदु से वृत पर एक भी स्पर्श रेखा _____ खींची जा सकती है।

2. आकृति 17.11 में, $\angle POY = 40^o$ है। $\angle OYP$ तथा $\angle OYT$ ज्ञात कीजिए।

3. आकृति 17.12 में, ΔPQR का अन्तः वृत्त खींचा गया है। यदि PX = 2.5 सेमी, RZ = 3.5 सेमी तथा ΔPQR का परिमाप 18 सेमी है, तो QY की लंबाई ज्ञात कीजिए।



आकृति 17.11



आकृति 17.12

4. एक प्रयोग द्वारा दिखाइए कि वृत के किसी बाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ समान होती हैं।

17.5 वृत्त के अंदर तथा बाहर प्रतिच्छेदी जीवाएँ

इससे पहले पाठ में आपने जीवाओं पर कई परिणामों के विषय में पढ़ा है। अब हम ऐसे कुछ परिणामों का सत्यापन करेंगे जो ऐसी दो जीवाओं के विषय में हैं, जो वृत्त के अन्दर अथवा बढ़ाने पर वृत्त के बाहर प्रतिच्छेद करती हैं।

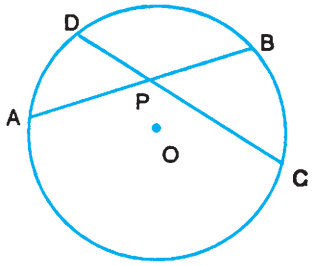
आइए निम्न क्रियाकलाप करें :

किसी त्रिज्या का केंद्र O वाला एक वृत्त खींचिए।

AB तथा CD दो ऐसी जीवाएँ खीचिए जो एक दूसरे को वृत के अन्दर P बिंदु पर काटती हैं।

रेखाखण्डों PD, PC, PA तथा PB की लंबाइयाँ मापिए। गुणनफल PA × PB तथा PC × PD ज्ञात कीजिए। आप पाएंगे कि ये गुणनफल समान हैं। कोई अन्य वृत्त खींच कर, इस क्रियाकलाप को दोहराइए। आप फिर भी पाएंगे कि

$PA \times PB = PC \times PD$ है।



आकृति 17.13

आइए अब ऐसी दो जीवाएँ लें जो बढ़ाने पर वृत्त के बाहर काटती हों। किसी भी त्रिज्या का एक वृत खींचिए जिसका केंद्र O हो। ऐसी दो जीवाएँ AB तथा DC खींचिए जो बढ़ाने पर वृत्त के बाहर बिंदु P पर काटती हैं। रेखाखण्डों PA, PB, PC तथा PD को मापें। पहले की तरह PA × PB तथा PC × PD ज्ञात करें।

आप देखेंगे कि गुणनफल PA × PB, गुणनफल PC × PD के समान आता है।

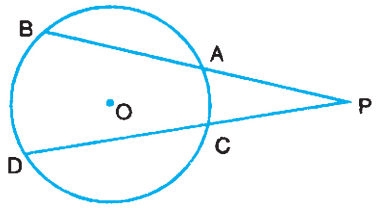
अर्थात्

$$PA \times PB = PC \times PD$$

इसी क्रियाकलाप को दो अन्य वृतों के साथ, जिनकी जीवाएं वृत्त के बाहर काटती हों, दोहराएँ।

आप फिर पायेंगे कि

$$PA \times PB = PC \times PD$$



आकृति 17.14

अतः हम कह सकते हैं कि

यदि वृत की दो जीवाएँ AB तथा CD एक दूसरे को बिंदु P पर (वृत्त के अन्दर या बाहर) काटती हैं, तो PA × PB = PC × PD होता है।

17.6 वृत्त के प्रतिच्छेदी छेदक तथा स्पर्श रेखाएँ

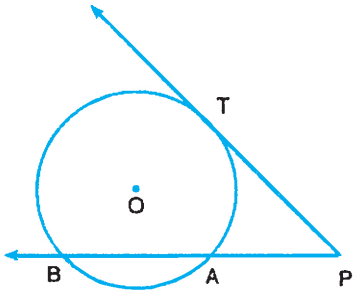
यह देखने के लिए कि एक छेदक तथा स्पर्श रेखा जो आपस में वृत्त के बाहर काटती हैं, में कोई सम्बन्ध है या नहीं, आइए हम निम्न क्रियाकलाप करें।

किसी त्रिज्या का O केंद्र वाला एक वृत्त खींचिए। किसी बाह्य बिंदु P से एक छेदक PAB तथा स्पर्श रेखा PT खींचिए।

रेखाखण्डों PA, PB तथा PT की लंबाइयाँ मापें।

गुणनफल PA × PB तथा PT × PT अर्थात् PT^2 ज्ञात करें। आप देखेंगे कि

$$PA \times PB = PT^2$$



आकृति 17.15

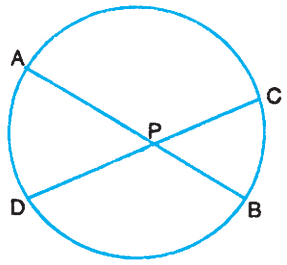
इसी क्रियाकलाप को आप दो अन्य वृत्तों के साथ दोहराएँ। आपको फिर भी वही परिणाम मिलेगा।

अतः, हम कह सकते हैं कि

यदि PAB एक वृत का छेदक है जो वृत्त को बिदुओं A तथा B पर काटता है, तथा PT वृत्त के बिंदु T पर स्पर्श रेखा है, तो $PA \times PB = PT^2$ होता है।

आइए कुछ उदाहरण लेकर इन्हे स्पष्ट करें:

उदाहरण 17.5: आकृति 17.16 में, AB तथा CD वृत की दो जीवाएं हैं, जो बिंदु P पर वृत्त के अन्दर काटती हैं । यदि PA = 3 सेमी, PB = 2 सेमी तथा PC = 1.5 सेमी है, तो PD की लंबाई ज्ञात कीजिए।



आकृति 17.16

हल: दिया है कि PA = 3 सेमी, PB = 2 सेमी तथा PC = 1.5 सेमी।

माना $PD = x$

हम जानते हैं कि $PA \times PB = PC \times PD$

$$\Rightarrow \quad 3 \times 2 = (1.5) \times x$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{3 \times 2}{1.5} = 4$$

∴ रेखाखण्ड PD = 4 सेमी है।

उदाहरण 17.6: आकृति 17.17 में, PAB एक छेदक है, जो वृत्त के केंद्र O से होकर जाता है तथा PT वृत्त की स्पर्श रेखा है। यदि PT = 8 सेमी तथा OP = 10 सेमी है, तो $PA \times PB = PT^2$ का प्रयोग करके वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

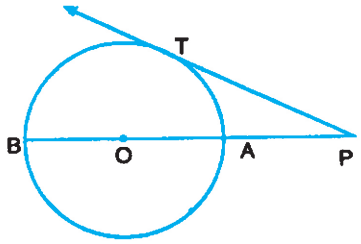
हल: माना x वृत्त की त्रिज्या है।

दिया है कि OP = 10 सेमी

∴ $PA = PO - OA = (10 - x)$ सेमी

तथा $PB = OP + OB = (10 + x)$ सेमी

PT = 8 तथा



आकृति 17.17

हम जानते हैं कि $PA \times PB = PT^2$

∴ $(10 - x)(10 + x) = 8^2$

या $100 - x^2 = 64$

या $x^2 = 36$ या $x = 6$

अर्थात् वृत्त की त्रिज्या 6 सेमी है।

उदाहरण 17.7: आकृति 17.18 में, जीवाएँ BA तथा DC वृत्त के बाहर एक बिंदु P पर एक दूसरे को काटती हैं। यदि PA = 4 सेमी, PB = 10 सेमी तथा CD = 3 सेमी है, तो PC की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया है कि PA = 4 सेमी, PB = 10 सेमी तथा CD = 3 सेमी

माना PC =x सेमी है। तब,

हम जानते हैं कि PA × PB = PC × PD

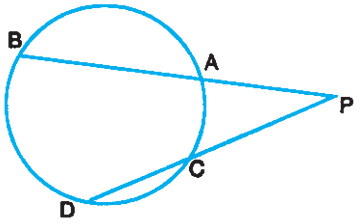
या $4 \times 10 = (x + 3)\, x$

या $x^2 + 3x - 40 = 0$

$(x + 8)\,(x - 5) = 0$

$\Rightarrow$ $x = 5$ या $x = -8$

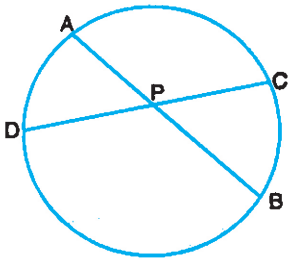
$\therefore$ PC = 5 सेमी (–8 संभव नहीं है)



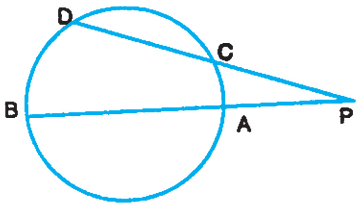
आकृति 17.18

देखें आपने कितना सीखा 17.2

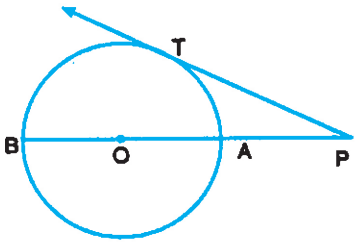
1. आकृति 17.19 में, यदि PA = 3 सेमी, PB = 6 सेमी तथा PD = 4 सेमी है तो PC की लंबाई ज्ञात कीजिए।
2. आकृति 17.19 में, यदि PA = 4 सेमी, PB = $(x + 3)$ सेमी, PD = 3 सेमी तथा PC = $(x + 5)$ सेमी है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।
3. आकृति 17.20 में, यदि PA = 4 सेमी, PB = 10 सेमी, तथा PC = 5 सेमी है तो PD ज्ञात कीजिए।



आकृति 17.19



आकृति 17.20



आकृति 17.21

4. आकृति 17.20 में, यदि PC = 4 सेमी, PD = $(x + 5)$ सेमी, PB = $(x + 2)$ सेमी तथा PA = 5 सेमी है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

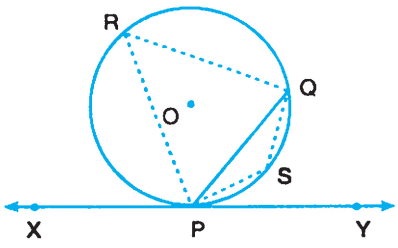
5. आकृति 17.21 में, PT = $2\sqrt{7}$ सेमी, तथा OP = 8 सेमी है तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए, जबकि O वृत का केंद्र है।

17.7 एक स्पर्श रेखा तथा जीवा द्वारा बनाए गए कोण

माना एक वृत्त का केंद्र O है तथा XY इस वृत के बिंदु P पर स्पर्श रेखा है। बिंदु P से वृत्त की जीवा PQ खींचिए, जैसा आकृति 17.22 में दिखाया गया है। दीर्घ चाप PRQ पर बिंदु R लीजिए तथा लघु चाप PSQ पर बिंदु S लीजिए।

दीर्घ चाप PRQ द्वारा बनाया गया वृत्तखण्ड ∠QPY का एकांतर वृत्तखण्ड कहलाता है तथा लघु चाप PSQ द्वारा बनाया गया वृत्तखण्ड ∠QPX का एकांतर वृत्तखण्ड कहलाता है।

आइए देखें कि क्या एकांतर वृत्तखण्ड में बने कोणों तथा जीवा और स्पर्श रेखा के बीच बने कोणों में कुछ सम्बन्ध है।



आकृति 17.22

QR तथा PR को मिलाएँ।

∠PRQ तथा ∠QPY को मापिए (आकृति 17.22 देखिए)।

आपको क्या मिलता है? आप देखेंगे कि ∠PRQ = ∠QPY है।

इसी क्रियाकलाप को आप अन्य वृत्त के साथ, जो भिन्न त्रिज्या का हो, दोहराएँ। आप फिर पायेंगे कि ∠QPY = ∠PRQ

अब आप ∠QPX तथा ∠QSP मापिए। आप फिर पायेंगे कि ∠QPX = ∠QSP है।

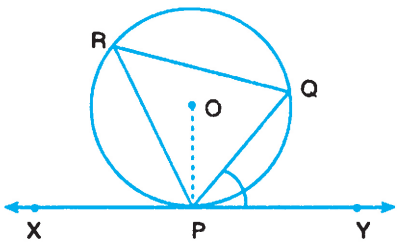
अतः हम कह सकते हैं कि

किसी जीवा द्वारा दी गई स्पर्श रेखा के साथ स्पर्श बिंदु पर बनाया गया कोण उस जीवा द्वारा एकान्तर वृत्तखण्ड में बनाए गए कोण के समान होता है।

इस परिणाम को अधिकतर "एकान्तर वृतखण्डों में बने कोण" के नाम से जाना जाता है।

आइए अब इस परिणाम के विलोम को जांच करें।

O केंद्र वाला एक वृत्त खींचिए, तथा इसकी जीवा PQ खींचिए तथा मान लेते हैं कि यह एकान्तर वृत्तखण्ड में ∠PRQ बनाती है, जैसा कि आकृति 17.23 में दिखाया गया है।



आकृति 17.23

P पर ∠QPY = ∠QRP बनाएँ। रेखाखण्ड PY को दोनों ओर इस प्रकार बढ़ाइए कि रेखा XY बन जाए। OP को मिला कर ∠OPY मापिए।

आप क्या देखते हैं? आप पायेंगे कि $\angle OPY = 90^\circ$ है, जो यह दिखाता है कि XY वृत्त की स्पर्श रेखा है।

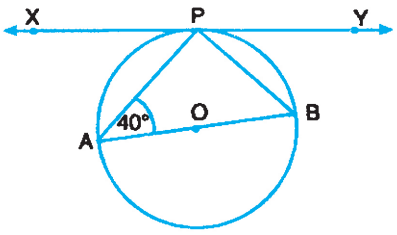
इस क्रियाकलाप को अन्य विभिन्न वृत्त लेकर दोहराएँ। आप फिर भी वही परिणाम पायेंगे।

अतः, हम कह सकते हैं कि

यदि वृत्त की जीवा के एक सिरे से होती हुई रेखा और जीवा के बीच का कोण एकान्तर वृत्तखण्ड में जीवा द्वारा बनाए गए अन्तः कोण के समान हो, तो वह रेखा वृत्त की स्पर्श रेखा होती है।

आइए कुछ उदाहरण लेकर इसे स्पष्ट करें :

उदाहरण 17.8: आकृति 17.24 में, XY केंद्र O वाले वृत्त की स्पर्श रेखा है। यदि AOB वृत का एक व्यास है तथा $\angle PAB = 40^\circ$ है, तो $\angle APX$ तथा $\angle BPY$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 17.24

हल: एकान्तर वृत्तखण्ड परिणाम के द्वारा,

$\angle BPY = \angle BAP$

$\therefore \quad \angle BPY = 40^\circ \qquad (\therefore \angle BAP = 40^\circ$ दिया है)

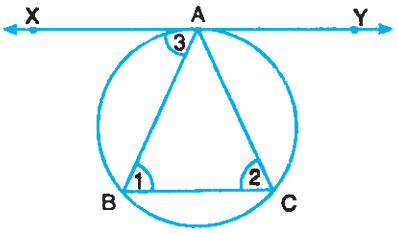
और $\quad \angle APB = 90^\circ \qquad$ (अर्धवृत्त में बना कोण)

तथा $\angle BPY + \angle APB + \angle APX = 180^\circ$

$\therefore \quad \angle APX = 180^\circ - (\angle BPY + \angle APB)$

$= 180^\circ - (40^\circ + 90^\circ) = 50^\circ$

उदाहरण 17.9: आकृति 17.25 में, ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें AB = AC है तथा XY त्रिभुज के परिवृत्त के बिंदु A पर स्पर्श रेखा है। दिखाइए कि XY आधार BC के समांतर है।



आकृति 17.25

हल: ΔABC में, AB = AC

$\therefore \quad \angle 1 = \angle 2$

और, XY वृत्त के बिंदु A पर स्पर्श रेखा है।

$\therefore \quad \angle 3 = \angle 2 \qquad$ (एकान्तर वृत्तखण्ड में बना कोण)

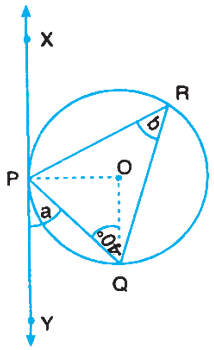
$\therefore \quad \angle 1 = \angle 3$

परन्तु ये एकान्तर कोण हैं।

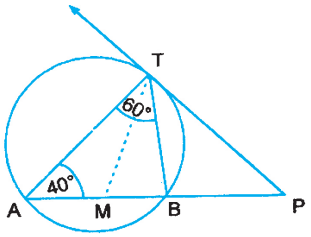
$\therefore \quad XY \parallel BC$

देखें आपने कितना सीखा 17.3

1. आकृति की सहायता से वह कोण दिखाइए जो वृत्त की एक जीवा एकान्तर वृत्तखण्ड में बनाती है।
2. आकृति 17.26 में, XY केंद्र O वाले वृत्त की स्पर्श रेखा है। यदि $\angle OQP = 40^\circ$ है, तो a तथा b के मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 17.26



आकृति 17.27

3. आकृति 17.27 में, PT वृत्त के एक बाह्य बिंदु P से वृत्त पर स्पर्श रेखा है। वृत्त की जीवा AB बढ़ाने पर TP को P पर मिलाती है। TA तथा TB को मिलाया गया है तथा TM कोण ATB का समद्विभाजक है।

   यदि $\angle PAT = 40^\circ$ तथा $\angle ATB = 60^\circ$ है, तो दर्शाइए कि PM = PT है।

आइए दोहराएँ

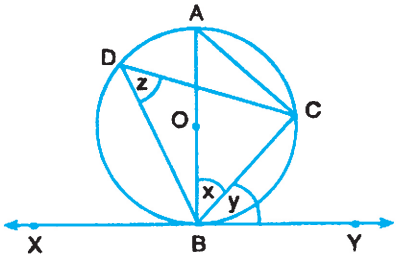
- एक रेखा जो वृत्त को दो बिंदुओं पर काटे, वृत्त का छेदक कहलाती है।
- एक रेखा जो वृत्त को एक ही बिंदु पर स्पर्श करे, वृत्त की स्पर्श रेखा कहलाती है।
- स्पर्श रेखा छेदक का सीमान्त रूप है, जब दोनो प्रतिच्छेद बिंदु एक हो जाते हैं।
- स्पर्श रेखा स्पर्श बिंदु से होकर जाती हुई त्रिज्या पर लम्ब होती है।
- किसी बाह्य बिंदु से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं, जो समान लम्बाई की होती हैं।
- यदि वृत्त की दो जीवाएं AB तथा CD बिंदु P पर (वृत्त के अन्दर या बाहर) प्रतिच्छेद करें, तो

  $PA \times PB = PC \times PD$ होता है।
- यदि PAB वृत्त का एक छेदक है जो वृत्त को बिंदु A तथा B पर काटता है तथा PT वृत्त के बिंदु T पर स्पर्श रेखा है, तो $PA \times PB = PT^2$ होता है।

- किसी जीवा द्वारा दी गई स्पर्श रेखा के साथ स्पर्श बिंदु पर बनाया गया कोण, उस जीवा द्वारा एकान्तर वृत्तखण्ड मे बनाए गए कोण के बराबर होता है।
- यदि वृत की जीवा के एक सिरे से होती हुई एक रेखा और जीवा के बीच का कोण एकान्तर वृत्तखण्ड में जीवा द्वारा बनाए गए कोण के बराबर हो, तो वह रेखा वृत्त की स्पर्श रेखा होती है।

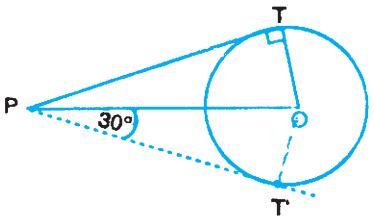
आइए अभ्यास करें

1. एक आकृति की सहायता से वृत्त के छेदक तथा वृत्त की स्पर्श रेखा में अंतर दर्शाइए।
2. क्रियाकलाप द्वारा दर्शाइए कि स्पर्श रेखा वृत्त के स्पर्श बिंदु से होकर जाती हुई त्रिज्या पर लम्ब होती है।
3. आकृति 17.28 में, यदि AC = BC तथा AB वृत्त का व्यास है, तो $\angle x$, $\angle y$ तथा $\angle z$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 17.28

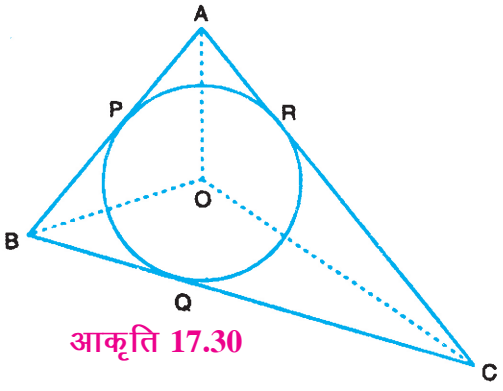
4. यदि आकृति 17.29 में, OT = 7 सेमी तथा OP = 25 सेमी है, तो PT की लंबाई ज्ञात कीजिए। यदि वृत्त पर PT′ एक अन्य स्पर्श रेखा है, तो PT′ तथा ∠POT′ भी ज्ञात कीजिए।



आकृति 17.29

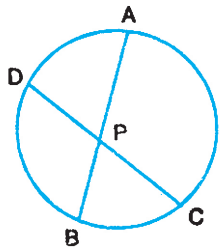
5. आकृति 17.30 में, त्रिभुज ABC का परिमाप 27 सेमी है। यदि PA = 4 सेमी तथा QB = 5 सेमी है, तो QC की लंबाई ज्ञात कीजिए।
6. आकृति 17.30 में, यदि $\angle BAC = 70^\circ$ है, तो $\angle BOC$ ज्ञात कीजिए।

   [संकेत: $\angle OBC + \angle OCB = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$]



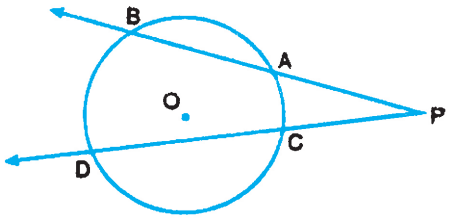
आकृति 17.30

7. आकृति 17.31 में, AB तथा CD वृत्त की दो जीवाएँ हैं, जो वृत्त के अन्दर बिंदु P पर काटती हैं। यदि PA = $(x + 3)$ सेमी, PB = $(x - 3)$ सेमी, PD = 3 सेमी तथा PC = $5\frac{1}{3}$ सेमी हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 17.31

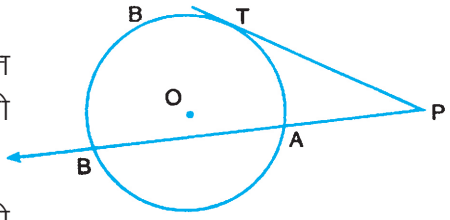
8. आकृति 17.32 में, O केंद्र वाले वृत्त की जीवाएं BA तथा DC बढ़ाने पर वृत के बाहर स्थित बिंदु P पर काटती हैं। यदि PA = 4 सेमी, PB = 9 सेमी, PC = x सेमी तथा PD = $4x$ सेमी है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 17.32

9. आकृति 17.33 में, PAB वृत की छेदक तथा PT वृत्त की स्पर्श रेखा है, जो वृत्त के बाह्य बिंदु P से खींची गई है।

यदि PT = x सेमी, PA = 4 सेमी तथा AB = 5 सेमी है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।



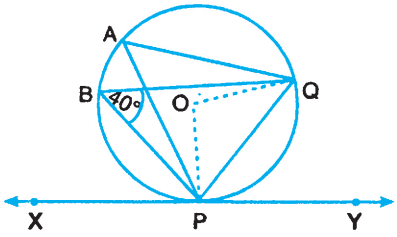
आकृति 17.33

10. यदि आकृति 17.34 में, O वृत्त का केंद्र है तथ $\angle PBQ = 40^\circ$ है, तो निम्न ज्ञात कीजिए:

(i) $\angle QPY$

(ii) $\angle POQ$

(iii) $\angle OPQ$



आकृति 17.34

देखे आपने कितना सीखा के उत्तर

17.1

1. (i) लम्ब (ii) समान (iii) संपाती
   (iv) दो (v) नहीं
2. 50°, 50°

3. 3 सेमी

17.2

1. 4.3 सेमी 2. 3 सेमी 3. 8 सेमी

4. 10 सेमी 4. 6 सेमी

17.3

2. $\angle a = \angle b = 50^o$

आइए अभ्यास करें के उत्तर

1. $\angle x = \angle y = \angle z = 45^o$

4. PT = 24 सेमी; PT' = 24 सेमी, $\angle POT' = 60^o$

5. QC = 4.5 सेमी 6. $\angle BOC = 125^o$

7. $x = 5$ 8. $x = 3$

9. $x = 6$

10. (i) 40^o (ii) 80^o (iii) 50^o