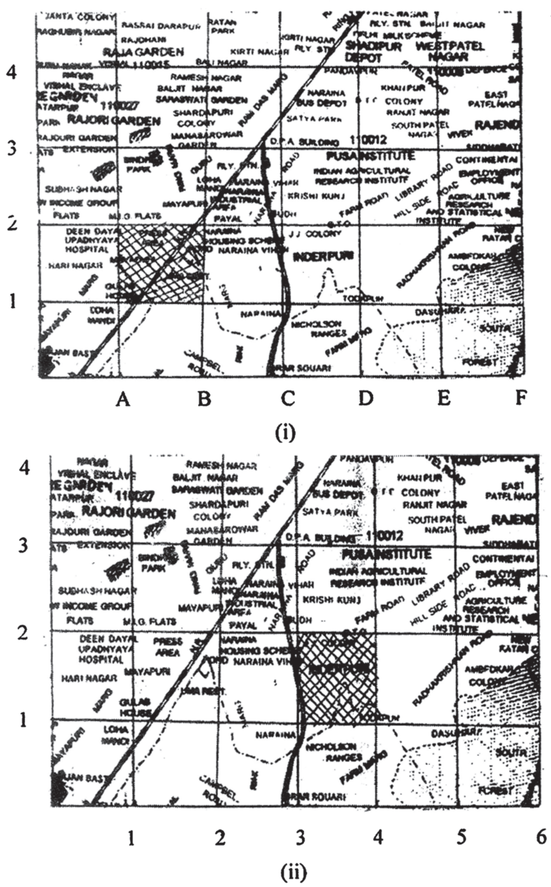
19

निर्देशांक ज्यामिति

एक बड़े नक्शे पर किसी गाँव अथवा सड़क की खोज एक कठिन कार्य है जिसके लिए अत्यधिक खोज की आवश्यकता पड़ती है परन्तु नक्शे को कुछ छोटे तथा नियंत्रित वर्गों में बाँटकर इसे आसान किया जा सकता है। प्रत्येक वर्ग को एक अक्षर तथा एक संख्या अथवा दो संख्या युग्मों द्वारा पहचाना जा सकता है। इसमें से एक अक्षर/संख्या नक्शे की ऊर्ध्वाधर बाँट (जो स्तंभ दर्शाती है) तथा दूसरी क्षैतिज बाँट (जो पंक्तियां दर्शाती है) को सूचित करता है।



आकृति 19.1

उपरोक्त आकृति 19.1 (i), में हमने नक्शे पर छायांकित वर्ग को संकेत (कोड) (B,2) या (4, 2) [आकृति 19.1 (ii))] द्वारा दर्शाया गया है। संकेत में प्रयोग संख्याद्विक को हम क्रमित युग्म (ordered pair) कहते हैं। यदि हमें किसी नगर के संकेत (कोड) का पता है तो हम नक्शे में उस छायांकित वर्ग के अन्तर्गत उसकी लगभग स्थिति निर्धारित कर सकते हैं परन्तु वास्तविक स्थिति का पता हमें फिर भी नहीं लगता। किसी तल में एक बिन्दु की वास्तविक स्थिति को निर्धारित करने के तरीके को एक फ्रांसीसी गणितज्ञ तथा दर्शनशास्त्री रेने डेकार्ट (1596–1650) ने दिया।

इसमें किसी बिन्दु की स्थिति को तल में दो संख्याओं, जिन्हें उस बिन्दु के कार्तीय निर्देशांक (Cartesian co-ordinates) कहते हैं, द्वारा दर्शाया जाता है।

इस पाठ में हम एक बिन्दु के कार्तीय निर्देशांक के विषय में पढ़ेंगे, तल में स्थित दो बिन्दुओं के बीच दूरी ज्ञात करने, दो बिन्दुओं को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को किसी दिये गये अन्तः अनुपात में बांटने वाले बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करने तथा एक त्रिभुज, जिसके शीर्ष दिये गये हों, के केन्द्रक (centroid) के निर्देशांक ज्ञात करने के लिए सूत्रों के विषय में पढ़ेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप समर्थ हो जाएंगे कि:

- एक तल में विभिन्न बिन्दुओं की स्थिति निर्धारित कर सकें;
- दो दिये गए निर्देशांकों वाले बिन्दुओं के बीच की दूरी ज्ञात कर सकें;
- उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कर सकें जो दो दिये गए बिन्दुओं से बने रेखाखण्ड को एक दिये गए अनुपात में अंतःविभाजित करें;
- दो बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखंड का मध्य बिन्दु ज्ञात कर सकें;
- किसी त्रिभुज, जिसके शीर्षों के निर्देशांक दिये हों, के केन्द्रक के निर्देशांक ज्ञात कर सकें;
- उपरोक्त संकल्पनाओं पर आधारित प्रश्न हल कर सकें।

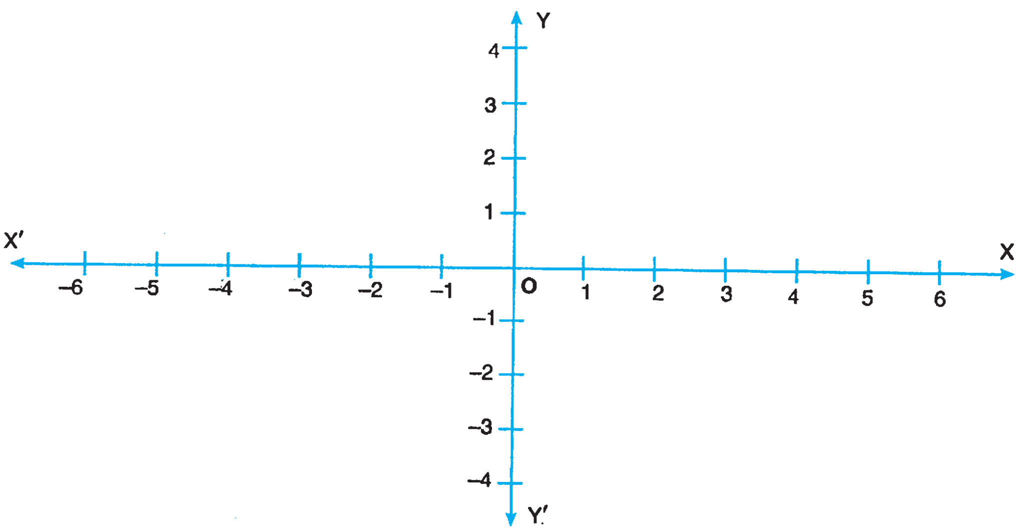
अपेक्षित पूर्व ज्ञान

- संख्या रेखा के विषय में ज्ञान
- संख्याओं पर मूलभूत संक्रियाएँ
- एक समकोण त्रिभुज के गुणधर्मों का ज्ञान

19.1 निर्देशांक तन्त्र

याद कीजिए आपने पाठ 5 में दो चरों वाले रैखिक समीकरणों के आलेख खींचने के विषय में पढ़ा था।

तल में एक बिन्दु की स्थिति निश्चित होती है, जो दो लम्बवत अक्षों से दूरियों के सापेक्ष होती है – इन अक्षों को हम रेखाओं XOX′ तथा YOY′ से दर्शाते हैं तथा यह एक दूसरे पर लम्ब होती हैं तथा आपस में O पर प्रतिच्छेद करती हैं। (आकृति 19.2)



आकृति 19.2

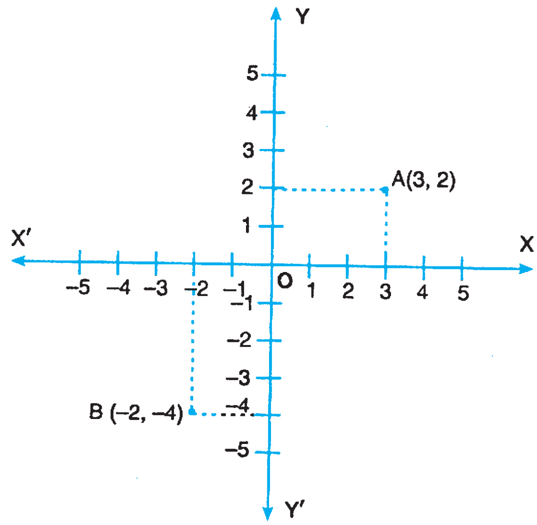
क्षैतिज संख्या रेखा XOX′ को हम **x**-अक्ष तथा ऊर्ध्वाधर रेखा YOY′ को हम **y**-अक्ष कहते हैं। बिन्दु O जहाँ दोनों संख्या रेखाएँ काटती हैं, को **मूल बिन्दु** कहते हैं। दोनों अक्षों को मिलाकर हम इसे आयताकार निर्देशांक तंत्र कहते हैं।

बिन्दु O से x-अक्ष के दायें भाग (OX) को x-अक्ष की धनात्मक दिशा तथा बायीं ओर को ऋणात्मक दिशा कहते हैं।

इस प्रकार x-अक्ष के ऊपर की ओर के भाग अर्थात OY की ओर को धन दिशा तथा x-अक्ष के नीचे के भाग OY′ को y-अक्ष की ऋण दिशा कहते हैं।

19.2 एक बिन्दु के निर्देशांक

एक बिन्दु की दो लम्बवत अक्षों से दूरी, जिन्हें उस बिन्दु के निर्देशांक कहते हैं, उस बिन्दु की तल में स्थिति निर्धारित करती है। परिपाटी द्वारा प्रथम संख्या को x-निर्देशांक (भुज) कहते हैं तथा दूसरी संख्या को y-निर्देशांक (कोटि) कहते हैं। x-निर्देशांक बिन्दु की y-अक्ष से दूरी दर्शाता है जबकि y-निर्देशांक बिन्दु की x-अक्ष से दूरी दर्शाता है।



आकृति 19.3

उपरोक्त आकृति 19.3 में बिन्दुओं A और B के निर्देशांक क्रमशः (3, 2) और (–2, –4) हैं।

आप कह सकते हैं कि बिन्दु A(3, 2) की y-अक्ष से दूरी 3 एकक है तथा x-अक्ष से दूरी 2 एकक है। परिपाटी द्वारा बिन्दु के निर्देशांकों को क्रमित युग्म अर्थात (x निर्देशांक, y निर्देशांक) द्वारा प्रदर्शित करते हैं। बिन्दु A(3, 2) से स्पष्ट है कि उसका x-निर्देशांक 3 तथा y-निर्देशांक 2 है। इसी प्रकार बिन्दु B(–2, –4) का x-निर्देशांक –2 तथा y-निर्देशांक –4 है।

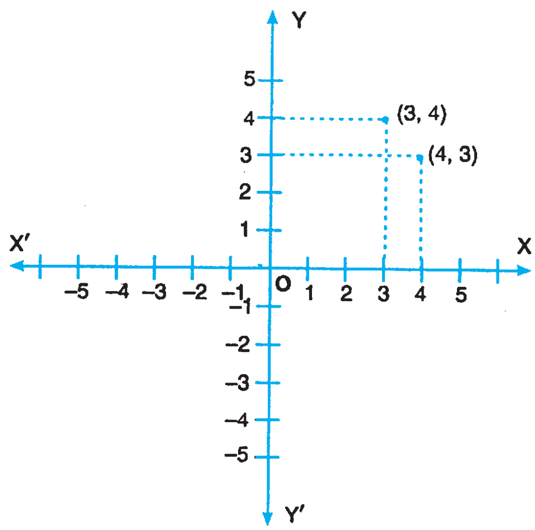
सामान्यतः एक बिन्दु P(x, y) के निर्देशांक से हमारा अभिप्राय है कि बिन्दु P की y-अक्ष से दूरी x एकक तथा x-अक्ष से दूरी y एकक है।

ध्यान रहे कि मूल बिन्दु (origin) O के निर्देशांक (0, 0) हैं। x-अक्ष पर प्रत्येक बिन्दु का y निर्देशांक शून्य है तथा y-अक्ष पर प्रत्येक बिन्दु का x-निर्देशांक शून्य है।

सामान्यतः x-अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु, जो मूल बिन्दु से दांयी ओर है, के निर्देशांक (a, 0) हैं तथा जो मूल बिन्दु से बायीं ओर है, के निर्देशांक (–a, 0) हैं, जहाँ ‘a’ एक शून्येतर धन संख्या है।

इसी प्रकार y-अक्ष पर स्थिति किसी बिन्दु, जो x-अक्ष के ऊपर की ओर है, के निर्देशांक (0, b) तथा जो बिन्दु x-अक्ष के नीचे की ओर स्थित है के निर्देशांक (0, –b) हैं, जहाँ b एक शून्येतर धन संख्या है।

ध्यान दीजिए कि आयताकार निर्देशांक अक्षों के सापेक्ष दो बिन्दु, जिनके निर्देशांक (x, y) तथा (y, x) हैं, भिन्न बिन्दु हैं। उदाहरणतया, आकृति 19.4 में, बिन्दुओं (3, 4) तथा (4, 3) की स्थितियाँ दर्शायी गयी हैं।



आकृति 19.4

उदाहरण 19.1: निम्न बिन्दुओं के x-निर्देशांक तथा y-निर्देशांक लिखिए:

(a) (1, 1) (b) (–3, 2) (c) (–7, –5) (d) (2, –6)

हल: (a) x-निर्देशांक = 1 (b) x निर्देशांक = –3

y निर्देशांक = 1 y निर्देशांक = 2.

(c) x निर्देशांक = –7 (d) x निर्देशांक = 2

y निर्देशांक = –5. y निर्देशांक = –6.

उदाहरण 19.2 : निम्नलिखित में से प्रत्येक बिन्दु की y-अक्ष तथा x-अक्ष से दूरी ज्ञात कीजिए:

(a) A(3, 4) (b) B(–5, 1) (c) C(–3, –3) (d) D(8, –9)

हल:
(a) बिन्दु A की y-अक्ष से दूरी 3 एकक तथा यह मूल बिन्दु के दायी ओर है तथा x-अक्ष से दूरी 4 एकक है तथा यह मूल बिन्दु के ऊपर की ओर है।

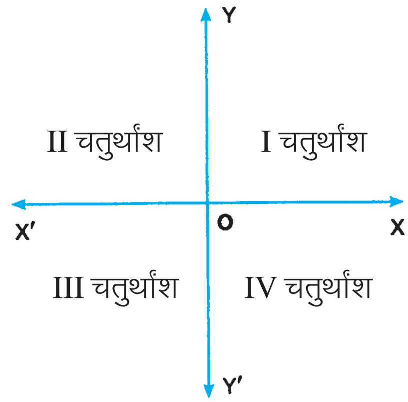
(b) बिन्दु B की y-अक्ष से दूरी 5 एकक है तथा यह मूल बिन्दु के बायीं ओर स्थित है तथा उसकी x-अक्ष से दूरी 1 एकक है तथा यह मूल बिन्दु से ऊपर की ओर है।

(c) बिन्दु C की y-अक्ष से दूरी 3 एकक है तथा यह मूल बिन्दु के बायीं ओर स्थित है तथा उसकी x-अक्ष से दूरी भी 3 एकक है तथा x-अक्ष से नीचे स्थित है।

(d) बिन्दु D की y-अक्ष से दूरी 8 एकक है तथा यह मूल बिन्दु के बायीं ओर स्थित है तथा उसकी x-अक्ष से दूरी 9 एकक है तथा यह x-अक्ष से नीचे स्थित है।

19.3 चतुर्थांश

अक्ष XOX′ तथा YOY′ तल को चार भागों के बाँटते हैं जिनमें से प्रत्येक को एक चतुर्थांश कहते हैं।



आकृति 19.5

चारों चतुर्थांशों को निम्न प्रकार से नामाकिंत किया जाता है। (आकृति 19.5)

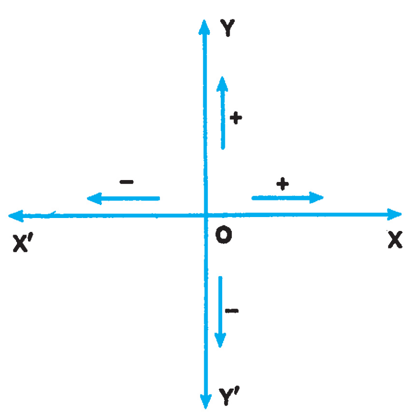
XOY : प्रथम I चतुर्थांश ; YOX′ : द्वितीय II चतुर्थांश ;

X′OY′ : तृतीय III चतुर्थांश ; Y′OX : चतुर्थ IV चतुर्थांश

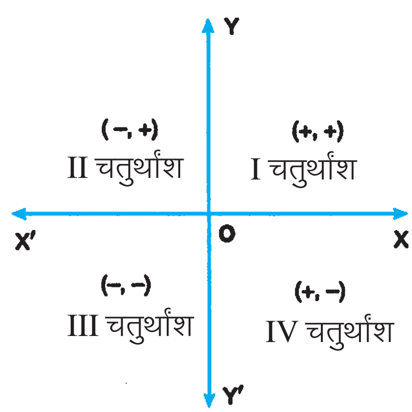
हमने खण्ड 19.1 में परचिर्चा की थी कि

(i) x-अक्ष का वह भाग, जो मूल बिन्दु से दायीं ओर है धनात्मक तथा बायीं ओर का भाग ऋणात्मक कहलाता है।

(ii) y-अक्ष के लिए, x अक्ष के ऊपर का भाग धनात्मक तथा x-अक्ष के नीचे का भाग ऋणात्मक लिया जाता है। (देखिए आकृति 19.6)



आकृति 19.6



आकृति 19.7

अतः प्रथम चतुर्थांश में निर्देशांक (+, +) प्रकार के होंगे (देखिए आकृति 19.7) अर्थात प्रथम चतुर्थांश में x-निर्देशांक तथा y-निर्देशांक दोनों धन संख्याएँ होंगी। दूसरे चतुर्थांश में x-निर्देशांक

ऋण संख्या तथा y-निर्देशांक धन संख्या (–, +) होगी। इसी प्रकार तीसरे चतुर्थांश में x तथा y निर्देशांक दोनों ही ऋण संख्याएँ (–,–) होंगी तथा चतुर्थ चतुर्थांश में x-निर्देशांक धन संख्या तथा y-निर्देशांक ऋण संख्या होगी (+,–) ।

उदाहरणतया:

(a) बिन्दु P(5, 6) प्रथम चतुर्थांश में है क्योंकि x तथा y निर्देशांक दोनों ही धन संख्याएँ हैं।

(b) बिन्दु Q(–3, 4) द्वितीय चतुर्थांश में है क्योंकि x- निर्देशांक ऋण संख्या तथा y-निर्देशांक धन संख्या है।

(c) बिन्दु R(–2, –3) तृतीय चतुर्थांश में है क्योंकि x तथा y निर्देशांक दोनों ऋण संख्याएँ हैं।

(d) बिन्दु S(4, –1) चतुर्थ चतुर्थांश में है क्योंकि x- निर्देशांक धन संख्या तथा y-निर्देशांक ऋण संख्या है।

देखें आपने कितना सीखा 19.1

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक बिन्दु के x-निर्देशाक तथा y-निर्देशांक लिखिए:

   (a) (3, 3) (b) (–6, 5) (c) (–1, –3) (d) (4, –2)

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक बिन्दु की x-अक्ष तथा y-अक्ष से दूरियाँ ज्ञात कीजिए:

   (a) A(2, 4) (b) B(–2, 4) (c) C(–2, –4) (d) D(2, –4)

3. निम्नलिखित में से प्रत्येक बिन्दु को विभिन्न चतुर्थांश में वर्गीकृत कीजिए:

   A(–3, 2), B (2, 3), C(7, -6), D(l, 1), E(–9, –9),

   F (–6, 1), G (–4, –5),. H(11, –3), P(3, 12), Q(–13, 6),

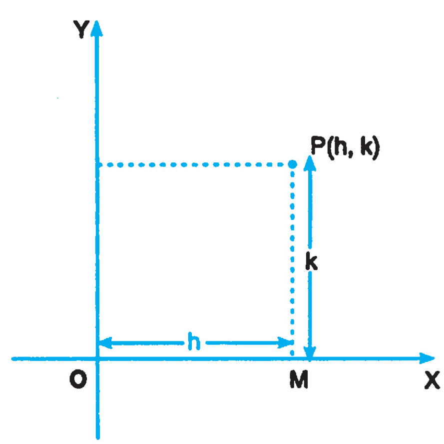
19.4 बिन्दुओं, जिनके निर्देशांक दिये हों, को तल में निरूपित करना

किसी बिन्दु को उसकी x-अक्ष तथा x-अक्ष की दूरियों के आधार पर निरूपित कर सकते हैं। अतः कोई बिन्दु (h, k) निम्न प्रकार से निरूपित किया जाता है:

(i) x-अक्ष के अनुदिश OM = h लीजिए। (आकृति 19.8).

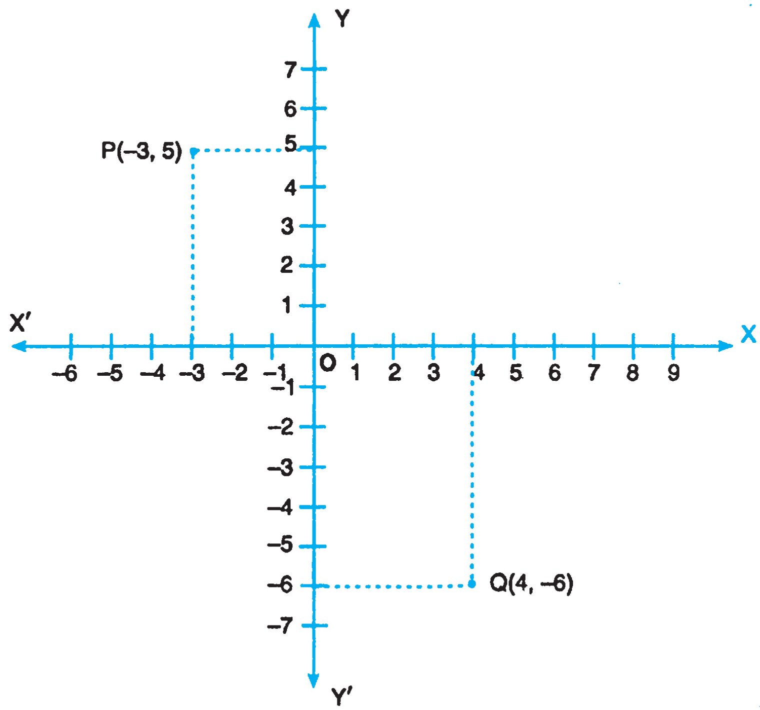
(ii) OMP से लम्बवत दिशा में MP = k लीजिए।

दोनों ही (i) तथा (ii) के लिए दिशा संकेत के नियम का प्रयोग करें।



आकृति 19.8

उदाहरणतया आकृति 19.9 में बिन्दु (–3, 5) तथा बिन्दु (4, –6) को निरूपित करके दिखाया गया है।

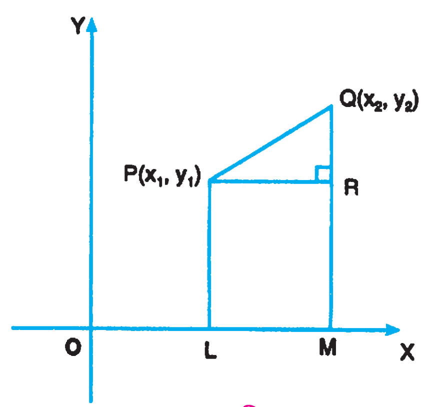


आकृति 19.9

19.5 दो बिन्दुओं के बीच की दूरी

तल में बिन्दुओं $P(x_1, y_1)$ तथा $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी रेखाखंड PQ की लम्बाई होती है।

बिन्दुओं P तथा Q से x-अक्ष पर लम्ब PL तथा QM खींचिए। OM पर P से लम्ब PR खींचिए।



आकृति 19.10

तो, $OL = x_1$, $OM = x_2$, $PL = y_1$ तथा $QM = y_2$

$\therefore$ $PR = LM = OM - OL = x_2 - x_1$

$QR = QM - RM = QM - PL = y_2 - y_1$

क्योंकि ΔPQR एक समकोण त्रिभुज है

$$\therefore \quad PQ^2 = PR^2 + QR^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad \text{(पाइथागोरस प्रमेय द्वारा)}$$

$$\therefore \quad PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

दो बिन्दुओं के बीच की दूरी = $\sqrt{(\text{भुजों का अन्तर})^2 + (\text{कोटियें का अन्तर})^2}$

दूरी को प्रयोग में लाई जाने वाली इकाई के साथ लिखा जाता है।

उपपरिणाम: बिन्दु (x_1, y_1) की मूल बिन्दु से दूरी

$$\sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2} = \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}}$$

आइए कुछ उदाहरण हल करें।

उदाहरण 19.3: निम्नलिखित बिन्दु युग्मों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए:

(a) P(6, 8) तथा Q(–9, –12)

(b) A(–6, –1) तथा B(–6, 11)

हल: (a) यहाँ बिन्दु P(6, 8) तथा Q(–9, –12) हैं।

दूरी के सूत्र का प्रयोग करने पर, हम पाते हैं

$$PQ = \sqrt{(-9-6)^2 + \{(-12-8)\}^2}$$

$$= \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{225 + 400} = \sqrt{625} = 25$$

अतः PQ = 25 एकक

(b) यहाँ बिन्दु A(–6, –1) तथा B(–6, 11) हैं

दूरी के सूत्र का प्रयोग करने पर, हम पाते हैं

$$AB = \sqrt{\{-6-(-6)\}^2 + \{11-(-1)\}^2}$$

$$= \sqrt{0^2 + 12^2} = 12$$

अतः AB = 12 एकक

उदाहरण 19.4: बिन्दुओं (0, 0) तथा (x, 3) के बीच की दूरी 5 एकक है। x का मान ज्ञात कीजिए।

हल: दूरी के सूत्र का प्रयोग करने पर (0, 0) तथा (x, 3) के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(x-0)^2 + (3-0)^2}$$

दिया गया है कि दूरी = 5 एकक

$$\sqrt{(x-0)^2 + (3-0)^2} = 5$$

या $\sqrt{x^2+3^2}=5$

दोनों ओर का वर्ग करने पर

$$x^2+9=25$$

अथवा $x^2=16$

या $x=\pm 4$

अतः $x=+4$ अथवा -4 एकक

उदाहरण 19.5: दर्शाइए कि बिन्दु (1, 1), (3, 0) तथा (–1, 2) संरेख हैं।

हल: माना P(1, 1), Q(3, 0) और R(–1, 2) दिये गए बिन्दु हैं।

$$\therefore \quad PQ=\sqrt{(3-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{4+1} \text{ or } \sqrt{5} \text{ एकक}$$

$$QR=\sqrt{(-1-3)^2+(2-0)^2}=\sqrt{16+4} \text{ or } 2\sqrt{5} \text{ एकक}$$

$$RP=\sqrt{(-1-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{4+1} \text{ or } \sqrt{5} \text{ एकक}$$

क्योंकि $PQ+RP=\left(\sqrt{5}+\sqrt{5}\right)$ एकक $=2\sqrt{5}$ एकक $=QR$

अतः बिन्दु P, Q तथा R संरेख हैं।

उदाहरण 19.6: उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र बिन्दु (0, 0) है तथा जो बिन्दु (–6, 8) से होकर जाता है।

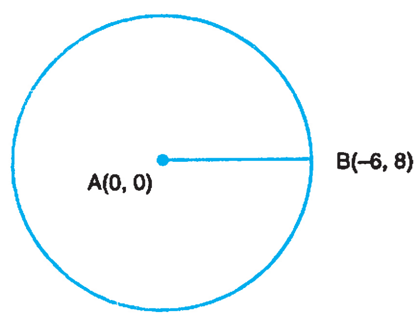
हल: माना O(0, 0) तथा B(–6, 8) दिये गए बिन्दु हैं रेखाखंड OB की लम्बाई वृत्त की त्रिज्या के बराबर है।

$$\therefore \quad OB=\sqrt{(-6-0)^2+(8-0)^2}$$

$$=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}$$

$$=10$$

अतः वृत्त की त्रिज्या 10 एकक है।



आकृति 19.11

देखें आपने कितना सीखा 19.2

1. निम्न बिन्दु युग्मों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए:

   (a) (3, 2) तथा (11, 8) (b) (–1, 0) तथा (0, 3)

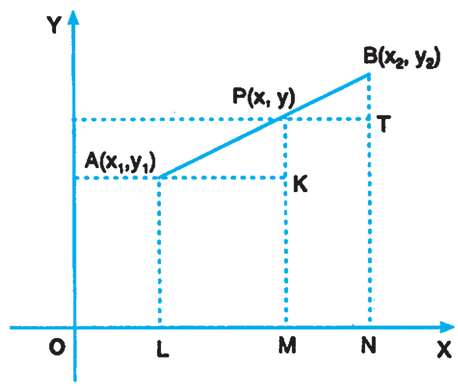
   (c) (3, –4) तथा (8, 5) (d) (2, –11) तथा (–9, –3)

2. उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र (2, 0) है तथा जो बिन्दु (7, –12) से होकर जाता है।
3. दर्शाइए कि बिन्दु (–5, 6), (–1, 2) तथा (2, –1) संरेख बिन्दु हैं।

19.6 खंड सूत्र

एक ऐसे बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करना जो दो बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखंड को दिये गए अंतः अनुपात में विभाजित करता हो।

माना $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ दो दिए गए बिन्दु हैं तथा बिन्दु $P(x, y)$, AB पर स्थित है जो उसे दिये गए अनुपात $m : n$ में विभाजित करता है। हमें P के निर्देशांक ज्ञात करने हैं।



आकृति 19.12

OX पर लम्ब AL, PM तथा BN खींचिए तथा लम्ब AK तथा PT क्रमशः PM तथा BN पर खींचिए।

समरूप त्रिभुजों APK तथा PBT से

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AK}{PT} = \frac{KP}{TB} \qquad \text{...(i)}$$

अब $AK = LM = OM - OL = x - x_1$

$PT = MN = ON - OM = x_2 - x$

$KP = MP - MK = MP - LA = y - y_1$

$TB = NB - NT = NB - MP = y_2 - y$

अतः (i) से,

$$\frac{m}{n} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

प्रथम दो सम्बन्धों से,

$$\frac{m}{n} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

अथवा $mx_2 - mx = nx - nx_1$

अथवा $x(m + n) = mx_2 + nx_1$

अथवा $$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

इसी प्रकार $\frac{AP}{PB} = \frac{KP}{TB}$ से

$$\frac{m}{n} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

या $$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

$$\therefore \quad x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \text{ and } y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \qquad \text{...(i)}$$

अतः उस बिन्दु के निर्देशांक जो, बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) द्वारा बने रेखाखंड को $m : n$ के अन्तः अनुपात में विभाजित करता है, हैं

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$$

19.6.1 मध्य–बिन्दु सूत्र

बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) द्वारा बने रेखाखंड का मध्य बिन्दु ज्ञात करने के लिए $m = n$ लेने पर हमें प्राप्त होता है,

$$x = \frac{nx_2 + nx_1}{n+n} = \frac{x_2 + x_1}{2}$$

तथा $$y = \frac{ny_2 + ny_1}{n+n} = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) के मध्य बिन्दु के निर्देशाक हैं

$$\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$$

आइए कुछ उदाहरण लेकर स्पष्ट करें।

उदाहरण 19.7: निम्न में से प्रत्येक बिन्दु युग्म को मिलाने वाले रेखाखण्ड को दिये गए अनुपात में विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

(a) (2, 3) तथा (7, 8), 2 : 3 के अन्तः अनुपात में

(b) (–1, 4) तथा (0, –3), 1 : 4 के अन्तः अनुपात में।

हल: (a) माना A(2, 3) तथा B(7, 8) दिये गए बिन्दु हैं

माना P(x, y) रेखाखंड AB को 2 : 3 के अन्तः अनुपात में विभाजित करता है।

खंड सूत्र का प्रयोग करने पर हमें मिलता है

$$x = \frac{2\times7+3\times2}{2+3} = \frac{20}{5} = 4$$

तथा $$y = \frac{2\times8+3\times3}{2+3} = \frac{25}{5} = 5$$

अतः P(4, 5) रेखाखंड AB को 2 : 3 के अन्तः अनुपात में विभाजित करता है।

(b) माना A(–1, 4) तथा B(0, –3) दिये गये बिन्दु हैं।

माना P(x, y) रेखाखण्ड AB को 1 : 4 के अन्तः अनुपात में बांटता है।

खंड–सूत्र का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है

$$x = \frac{1\times0+4\times(-1)}{1+4} = -\frac{4}{5}$$

तथा $$y = \frac{1\times(-3)+4\times4}{1+4} = \frac{13}{5}$$

$\therefore P\left(-\frac{4}{5}, \frac{13}{5}\right)$ रेखाखण्ड AB को 1 : 4 के अन्तः अनुपात में विभाजित करता है।

उदाहरण 19.8: दो बिन्दुओं (3, 4) तथा (5, 12) को मिलाने से बने रेखाखंड का मध्य बिंदु ज्ञात कीजिए।

हल: माना A(3, 4) तथा B(5, 12) दिये गए बिन्दु हैं।

माना C(x, y) रेखाखंड AB का मध्य बिन्दु है

मध्य बिन्दु सूत्र का प्रयोग करने पर मिलता है

$$x = \frac{3+5}{2} = 4$$

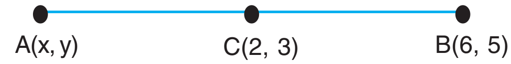
तथा $$y = \frac{4+12}{2} = 8$$

अतः C(4, 8) उस बिन्दु के निर्देशांक हैं जो बिन्दुओं (3, 4) तथा (5, 12) को मिलाने वाले रेखाखंड का मध्य बिन्दु है।

उदाहरण 19.9: एक रेखाखंड का मध्य बिन्दु (2, 3) है। यदि रेखाखंड के एक सिरे के निर्देशांक (6, 5) हैं, तो उसके दूसरे सिरे के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल: माना दूसरे सिरे के निर्देशांक A(x, y) हैं।

यह दिया गया है कि C(2, 3), AB का मध्य बिन्दु है।



अतः

$$2 = \frac{x+6}{2} \qquad \text{and} \qquad 3 = \frac{y+5}{2}$$

अथवा $4 = x + 6$ अथवा $6 = y + 5$

अथवा $x = -2$ अथवा $y = 1$

अतः (–2, 1) दूसरे सिरे के निर्देशांक हैं।

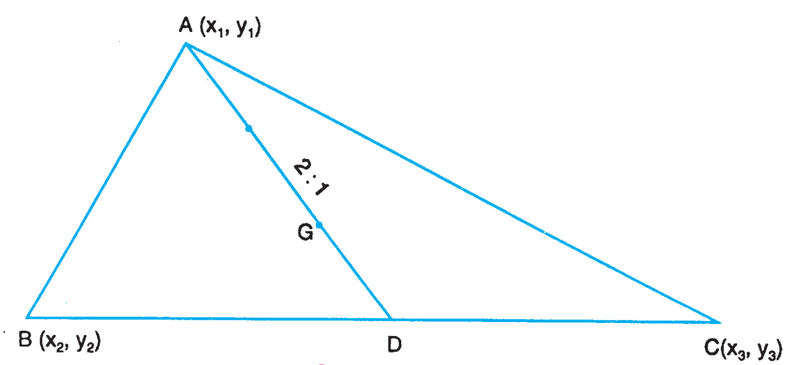
19.7 त्रिभुज का केन्द्रक

उस त्रिभुज, जिसके शीर्षों के निर्देशांक दिए हों, के केन्द्रक के निर्देशांक ज्ञात करना

परिभाषा: किसी त्रिभुज का केन्द्रक वह बिन्दु है जहाँ त्रिभुज की माध्यिकाएँ मिलती हैं तथा जो प्रत्येक माध्यिका को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

माना $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$ त्रिभुज ABC के शीर्ष हैं। माना माध्यिका AD आधार को समद्विभाजित करती है, तो

$$D = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$$



आकृति 19.14

अब केन्द्रक बिन्दु G जो AD पर स्थित है, उसे 2 : 1 के अन्तः अनुपात में बाँटता है। माना G के निर्देशांक (x, y) हैं तो

$$x = \frac{2 \times \frac{x_2 + x_3}{2} + 1 \times x_1}{2+1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y = \frac{2 \times \frac{y_2 + y_3}{2} + 1 \times y_1}{2+1} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

अतः त्रिभुज के केन्द्रक के निर्देशाक हैं

$$\left(\frac{\mathbf{x_1 + x_2 + x_3}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{y_1 + y_2 + y_3}}{\mathbf{3}} \right)$$

उदाहरण 19.10: एक त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक (3, –1), (10, 7) तथा (5, 3) हैं। त्रिभुज के केन्द्रक के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल: माना A(3, –1), B(10, 7) तथा C(5, 3) त्रिभुज के शीर्ष हैं।

माना G(x, y) केन्द्रक के निर्देशांक हैं।

$$x = \frac{3+10+5}{3} = 6$$

तथा $$y = \frac{-1+7+3}{3} = 3$$

अतः (6, 3) त्रिभुज ABC के केन्द्रक G के निर्देशांक हैं।

देखें आपने कितना सीखा 19.3

1. निम्नलिखित बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखंड को दिये गए अनुपात में विभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए:

   (a) (1, –2) तथा (4, 7), 1 : 2 के अन्तः अनुपात में

   (b) (3, –2) तथा (–5, 4), 1 : 1 के अन्तः अनुपात में

2. निम्नलिखित बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखंडों के मध्य बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए:

   (a) (0, 0) तथा (8, –5)

   (b) (–7, 0) तथा (0, 10)

3. उस त्रिभुज का केन्द्रक ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (5, –1), (–3, –2) तथा (–1, 8) है

आइए दोहराएँ

- यदि किसी बिन्दु के निर्देशांक (2, 3) हैं तो उसका x-निर्देशांक (भुज) 2 है तथा y-निर्देशांक (कोटि) 3 है।
- निर्देशांक (x, y) में 'x' बिन्दु की y-अक्ष से दूरी तथा 'y' बिन्दु की x-अक्ष से दूरी दर्शाती है।
- मूल बिन्दु के निर्देशांक (0, 0) हैं।
- x-अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिन्दु का y-निर्देशांक 0 है तथा y-अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिन्दु का x-निर्देशांक 0 है।
- दो अक्ष XOX′ तथा YOY′ किसी तल को चार भागों में बांटते हैं जिन्हें चतुर्थांश कहते हैं।
- दो बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) को मिलाने वाले रेखाखंड की लम्बाई है

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- बिन्दु (x_1, y_1) की मूल बिन्दु से दूरी $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ है।
- दो बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) को मिलाने वाले रेखाखंड को m : n के अन्तः अनुपात में विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक हैं:

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$$

- बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) को मिलाने वाले रेखाखंड के मध्य बिन्दु के निर्देशांक हैं

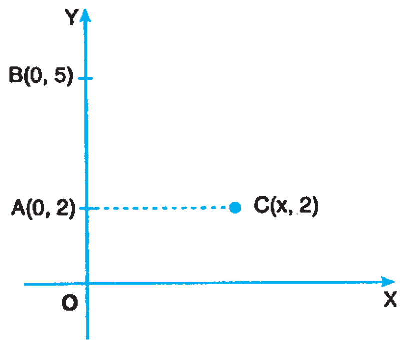
$$\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$$

- उस त्रिभुज, जिसके शीर्षों के निर्देशांक (x_1, y_1), (x_2, y_2) तथा (x_3, y_3) हैं, का केन्द्रक है

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

आइए अभ्यास करें

1. आकृति 19.15 में, AB = AC है। x का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 19.15

2. बिन्दुओं (2, 3) तथा (4, x) के बीच की दूरी $\sqrt{13}$ एकक है। x का मान ज्ञात कीजिए।

3. उस त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाईयाँ ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष A(3, 4), B(2, –1) तथा C(4, –6) हैं।

4. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (2, –2), (–2, 1) तथा (5, 2) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

5. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (2, –1) तथा (–3, 4) को मिलाने वाले रेखाखंड को 2 : 3 के अन्तः अनुपात में विभाजित करता है।

6. उस वृत्त का केन्द्र ज्ञात कीजिए जिसके एक व्यास के अन्तः बिन्दु P(–5, 7) तथा Q(3, –11) हैं।

7. उस त्रिभुज के केन्द्रक के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष P(–2, 4), Q(7, –3) तथा R(4, 5) हैं।

देखें आपने कितना सीखा के उत्तर

19.1

1. (a) 3; 3 (b) –6; 5 (c) –1; –3 (d) 4; –2

2. (a) 2 एकक; 4 एकक

   (b) 2 एकक मूल बिन्दु से बायीं ओर ; 4 एकक x-अक्ष से ऊपर की ओर

   (c) 2 एकक मूल बिन्दु से बायीं ओर ; 4 एकक x-अक्ष से नीचे

   (d) 2 एकक मूल बिन्दु से दायीं ओर; 4 एकक x-अक्ष से नीचे

3. चतुर्थांश I: B(2, 3), D(1, 1) तथा P(3, 12)

   चतुर्थांश II: A(–3, 2), F(–6, 1) तथा Q(–13, 6)

चतुर्थांश III: $E(-9, -9)$ तथा $G(-4, -5)$

चतुर्थांश IV: $C(7, -6)$ तथा $H(11, -3)$

19.2

1. (a) 10 एकक (b) $\sqrt{10}$ एकक (c) $\sqrt{106}$ एकक (d) $\sqrt{185}$ एकक
2. 13 एकक

19.3

1. (a) $(2, 1)$ (b) $(-1, 1)$
2. (a) $\left(4, -\frac{5}{2}\right)$ (b) $\left(-\frac{7}{2}, 5\right)$
3. $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$

आइए अभ्यास करें के उत्तर

1. 3 एकक
2. 0 अथवा 6
3. $AB = \sqrt{26}$ एकक, $BC = \sqrt{29}$ एकक तथा $CA = \sqrt{101}$ एकक
5. $(0, 1)$
6. $(-1, -2)$
7. $(3, 2)$

माध्यमिक पाठ्यक्रम
गणित

अभ्यास कार्य–ज्यामिति

अधिकतम अंक: 25 **समय : 45 मिनट**

अनुदेश

1. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर पुस्तिका के अलग–अलग पृष्ठ पर दीजिए।
2. निम्न सूचना अपनी उत्तर पुस्तिका में दीजिए।

   नाम

   नामांकन संख्या

   विषय

   अभ्यास कार्य का प्रकरण (Topic)

   पता
3. आप अपने अभ्यास कार्य की जांच अध्ययन केन्द्र पर अपने विषय अध्यापक से कराईए जिससे आपके कार्य का उचित परिष्करण मिल सके।

अपना अभ्यास कार्य राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान को मत भेजिए।

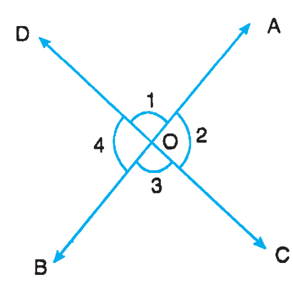
1. दो रेखाएं AB तथा CD एक दूसरे को O बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं। इस प्रकार बने कोणों में सम्मुख कोणों का एक युग्म है।

   (A) 1, 2

   (B) 2, 3

   (C) 3, 4

   (D) 2, 4



2. किसी त्रिभुज ABC के लिए कौन सा कथन सत्य है? 1

   (A) AB + BC = AC

   (B) AB + BC < AC

   (C) AB + BC > AC

   (D) AB + BC + AC = 0

3. एक आयत की आसन्न भुजाओं के युग्मों के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला चतुर्भुज 1

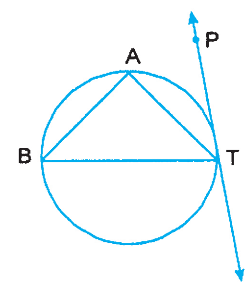
(A) आयत है

(B) वर्ग है

(C) समचतुर्भुज है

(D) समलम्ब है

4. आकृति में, PT वृत्त के बिन्दु T पर स्पर्श रेखा है। यदि $\angle BTA = 45^\circ$ तथा $\angle PTB = 70^\circ$, हो, तो $\angle ABT$ बराबर है: 1



(A) 110°

(B) 70°

(C) 45°

(D) 23°

5. दो बिन्दुओं A और B के निर्देशांक क्रमशः (2, 3) तथा (4, x) हैं। यदि $AB^2 = 13$ हो, तो x का संभव मान है: 1

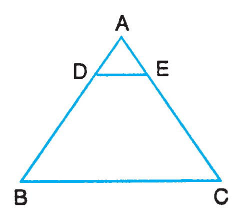
(A) –6

(B) 0

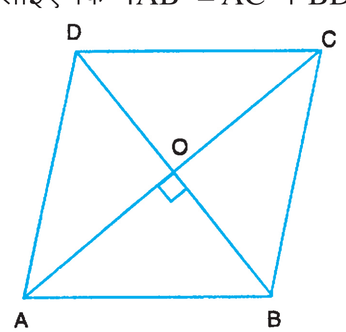
(C) 9

(D) 12

6. ΔABC में, AB = 10 सेमी और $DE \parallel BC$ तथा $AE = \frac{1}{4}AC$। AD ज्ञात कीजिए। 2



7. ABCD एक समचतुर्भुज है। दर्शाइए कि $4AB^2 = AC^2 + BD^2$ 2



8. x-अक्ष पर उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (3, 8) तथा (9, 5) से समान दूरी पर है। 2

9. एक रेखाखण्ड के मध्य बिन्दु के निर्देशांक (2, 3) है। यदि रेखाखण्ड के एक अन्तः बिन्दु के निर्देशांक (6, 5) हों, तो दूसरे अन्तः बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

10. एक त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक (3, –1), (10, 7) तथा (5, 3) है। इसके केन्द्रक के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। 2

11. एक न्यून कोण ΔABC में, $AD \perp BC$ है। सिद्ध कीजिए कि

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.\,BD$$ 4

12. सिद्ध कीजिए कि समान आधार (या एक ही आधार) और दो समान्तर रेखाओं के बीच बने समान्तर चतुर्भुज क्षेत्रफल में समान होते हैं। 6