मॉड्यूल 4

क्षेत्रमिति (मेंसुरेशन)

*सभी गणितीय विचार दैनिक जीवन के अनुभवों से उजागर हुए हैं। मानव की सबसे पहली आवश्यकता वस्तुएँ गिनने की थी। इससे **संख्याओं** के विचार का उद्‌गम हुआ। जब मानव ने फसलों को उगाना सीखा, तो उसे निम्न प्रकार की समस्याओं का सामना करना पड़ा:*

(i) उस खेत, जहाँ फसल को उगाया जाना है, कि चारों ओर एक बाड़ लगाना या एक प्रकार की परिसीमा की रचना करना।

(ii) विभिन्न फसलों को उगाने के लिए, विभिन्न मापों की भूमि बंटित करना।

(iii) विभिन्न फसलों के अंतर्गत विभिन्न उत्पादनों को संपित करने के लिए, उपयुक्त स्थान बनाना।

*इन समस्याओं से परिमापों (लंबाइयों), क्षेत्रफलों तथा आयतनों को मापने की आवश्यकता पड़ी, जिनसे बाद में एक गणित की शाखा का उद्‌गम हुआ जिसे **क्षेत्रमिति (Mensuration)** कहा जाता है। इस शाखा में, हम कुछ ऐसी समस्याओं का हल करते हैं, जैसेकि खेत के चारों ओर कँटेदार तार लगाने की लागत ज्ञात करने, किसी कमरे के फर्श पर लगाए जाने वाली टाइलों की संख्या ज्ञात करना, एक दीवार की रचना करने के लिए आवश्यक ईंटों की संख्या ज्ञात करना, एक दी हुई दर पर किसी खेत की जुताइ कराने का व्यय ज्ञात करना, किसी कॉलोनी में पानी की आपूर्ति के लिए एक पानी की टंकी बनाने की लागत ज्ञात करना, मेज़ की ऊपरी सतह पर पॉलिश कराने या एक दरवाजे पर पेंट कराने का व्यय इत्यादि। उपरोक्त प्रकार की समस्याओं के कारण, कभी–कभी क्षेत्रमिति को फर्नीचर और दीवारों का विज्ञान कहा जाता है।*

उपरोक्त प्रकार की समस्याओं को हल करने के लिए, हमें सरल बंद समतल आकृतियों (आकृति जो एक ही तल में स्थित हो) के परिमाप और क्षेत्रफल तथा ठोस आकृतियों (वे आकृतियाँ जो संपूर्ण रूप से एक ही तल में स्थित न हों) के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात करने पड़ते हैं। आप परिमाप, क्षेत्रफल, पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन की अवधारणाओं से पहले से ही परिचित हैं। इस मॉड्यूल में, हम इनके बारे में उन परणिामों और सूत्रों से प्रारंभ करते हुए जिनसे आप पहले से ही परिचित हैं, विस्तृत रूप से चर्चा करेंगे।

20

समतल आकृतियों के परिमाप और क्षेत्रफल

आप अनेक समतल आकृतियों जैसे आयत, वर्ग, समांतर चतुर्भुज, त्रिभुज, वृत्त, इत्यादि से पहले ही परिचित हो चुके हैं। आप विभिन्न सूत्रों का प्रयोग करके इनके परिमाप और क्षेत्रफल ज्ञात करना भी जानते हैं। इस पाठ में, हम इस ज्ञान का पुनर्गठन करेंगे तथा इनके आगे कुछ और अध्ययन करेंगे, विशेष रूप से त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हीरोन के सूत्र का तथा वृत्त के एक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात करने के सूत्र का अध्ययन करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ का अध्ययन करने के बाद, आप समर्थ हो जायेंगे कि:

- पहले सीखे हुए सूत्रों का प्रयोग करके कुछ त्रिभुजों और चतुर्भुजों के परिमाप और क्षेत्रफल ज्ञात कर सकें;
- एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हीरोन के सूत्र का प्रयोग कर सकें;
- कुछ सरल रेखीय आकृतियों (आयताकार पथ भी सम्मिलित हैं) के क्षेत्रफल, उन्हें परिचित आकृतियों, जैसे त्रिभुज, वर्ग, समलंब, आयत, इत्यादि में विभाजित करके, ज्ञात कर सकें;
- एक वृत्त की परिधि और क्षेत्रफल ज्ञात कर सकें;
- वृत्त के एक त्रिज्यखंड के परिमाप और क्षेत्रफल के लिए सूत्रों को निगमित कर सकें और उन्हें समझ सकें;
- उपरोक्त सूत्रों का प्रयोग करके वृत्त के त्रिज्यखंड के परिमाप और क्षेत्रफल ज्ञात कर सकें;
- आकृतियों के कुछ संयोजनों के क्षेत्रफल, जिनमें वृत्त, त्रिज्यखंड तथा साथ ही त्रिभुज, वर्ग और आयत भी संबद्ध हों, ज्ञात कर सकें;
- विभिन्न समतल आकृतियों के परिमापों और क्षेत्रफलों पर आधारित दैनिक जीवन की समस्याओं को हल कर सकें।

अपेक्षित पूर्व ज्ञान

- त्रिभुज, चतुर्भुज, समांतर चतुर्भुज, समलंब, वर्ग, आयत और वृत्त जैसी सरल बंद आकृतियाँ तथा उनके गुण।
- परिमाप और क्षेत्रफल के लिए विभिन्न इकाइयाँ जैसे मी और मी^{2}, सेमी और सेमी^{2}, मिमी और मिमी^{2} इत्यादि।
- एक इकाई का दूसरी इकाइयों में परिवर्तन।
- क्षेत्रफलों के लिए बड़ी इकाइयाँ जैसे **एकड़** और **हेक्टेयर।**
- विभिन्न आकृतियों के परिमाप और क्षेत्रफलों के लिए निम्नलिखित सूत्रः

(i) आयत का परिमाप $= 2$ (लंबाई $+$ चौड़ाई)

(ii) आयत का क्षेत्रफल $=$ लंबाई $\times$ चौड़ाई

(iii) वर्ग का परिमाप $= 4 \times$ भुजा

(iv) वर्ग का क्षेत्रफल $=$ (भुजा)^2

(v) समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $=$ आधार $\times$ संगत शीर्षलंब

(vi) त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार $\times$ संगत शीर्षलंब

(vii) समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ विकर्णों का गुणनफल

(viii) समलंब का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (समांतर भुजाओं का योग) $\times$ उनके बीच की दूरी

(ix) वृत्त की परिधि $= 2\,\pi \times$ त्रिज्या

(x) वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi \times$ (त्रिज्या)^2

20.1 कुछ विशिष्ट चतुर्भुजों और त्रिभुजों के परिमाप और क्षेत्रफल

आप यह जानते हैं कि एक समतल बंद आकृति के अनुदिश (परिसीमा) चली गई दूरी उसका **परिमाप** कहलाती है तथा इस आकृति द्वारा परिबद्ध क्षेत्र की माप उसका **क्षेत्रफल** कहलाती है। आप यह भी जानते हैं कि परिमाप या लंबाई को **रैखिक इकाइयों** में मापा जाता है तथा क्षेत्रफल को **वर्ग इकाइयों** में मापा जाता है। उदाहरणार्थ, परिमाप (या लंबाई) की इकाइयाँ मी या सेमी या मिमी हैं तथा क्षेत्रफल की इकाइयां मी^{2} या सेमी^{2} या मिमी^{2} हैं (जिन्हें वर्ग मी या वर्ग सेमी या वर्ग मिमी भी लिखते हैं)।

आप कुछ विशेष सूत्रों का प्रयोग करके, कुछ विशिष्ट चतुर्भुजों (जैसे वर्ग, आयत, समांतर चतुर्भुज, इत्यादि) और त्रिभुजों के परिमापों और क्षेत्रफलों के परिकलनों से भी परिचित हैं। आइए इस ज्ञात को कुछ उदाहरणों की सहायता से पुनर्गठित करें।

उदाहरण 20.1: उस वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका परिमाप 80 मी है।

हल: मान लीजिए कि वर्ग की लंबाई a मी है।

अतः वर्ग का परिमाप $= 4 \times a$ मी

इसलिए, $4a = 80$

या $\quad a = \dfrac{80}{4} = 20$

इस प्रकार, वर्ग की भुजा $= 20$ मी

अतः, वर्ग का क्षेत्रफल $= (20\text{मी})^2 = 400$ मी^{2}

उदाहरण 20.2: किसी आयताकार खेत की लंबाई और चौड़ाई क्रमशः 23.7 मी तथा 14.5 मी है। ज्ञात कीजिएः

(i) खेत के चारों ओर बाड़ लगाने के लिए आवश्यक कांटेदार तार की लम्बाई

(ii) खेत का क्षेत्रफल

हल: (i) खेत पर बाड़ लगाने के लिए आवश्यक कांटेदार तार की लम्बाई

= खेत का परिमाप

= 2 (लंबाई + चौड़ाई)

$= 2(23.7 + 14.5)$ मी $= 76.4$ मी

(ii) खेत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

$= 23.7 \times 14.5$ मी^{2}

$= 343.65$ मी^{2}

उदाहरण 20.3: उस समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका आधार 12 सेमी तथा संगत शीर्षलंब 8 सेमी है।

हल: समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × संगत शीर्षलंब

$= 12 \times 8$ सेमी^{2}

$= 96$ सेमी^{2}

उदाहरण 20.4: एक त्रिभुजाकार खेत का आधार उसके संगत शीर्षलंब का तिगुना है। यदि ₹ 15 प्रति वर्ग मीटर की दर से इस खेत की जुताई कराने का व्यय ₹ 20250 हो, तो इस खेत का आधार तथा संगत शीर्षलंब ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिए कि संगत शीर्षलंब x मी है।

अतः, आधार $= 3x$ मी

इसलिए खेत का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार $\times$ संगत शीर्षलंब

$$= \frac{1}{2}\ 3x \times x \text{ मी}^2 = \frac{3x^2}{2} \text{ मी}^2 \qquad ....(1)$$

साथ ही खेत की जुताई पर ₹ 15 प्रति वर्ग मीटर की दर से व्यय = ₹ 20250

अतः खेत का क्षेत्रफल $= \frac{20250}{15}$ मी^{2}

$= 1350$ मी^{2} ...(2)

(1) तथा (2) से हमें प्राप्त होता है

$$\frac{3x^2}{2} = 1350$$

या $$x^2 = \frac{1350 \times 2}{3} = 900 = (30)^2$$

या $$x = 30$$

अतः, संगत शीर्षलंब 30 मी और आधार $= 3 \times 30$ मी $= 90$ मी है।

उदाहरण 20.5: उस समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके विकर्णों की लंबाइयाँ 16 सेमी तथा 12 सेमी हैं।

हल: समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ विकर्णों का गुणनफल $= \frac{1}{2} \times 16 \times 12$ सेमी^{2}

$= 96$ सेमी^{2}

उदाहरण 20.6: किसी समलंब की समांतर भुजाएँ 20 सेमी तथा 12 सेमी हैं तथा उनके बीच की दूरी 5 सेमी है। इस समलंब का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: समलंब का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (समांतर भुजाओं का योग) $\times$ उनके बीच की दूरी

$= \frac{1}{2}\ (20 + 12) \times 5$ सेमी^{2} $= 80$ सेमी^{2}

देखें आपने कितना सीखा 20.1

1. एक वर्गाकार खेत का क्षेत्रफल 225 मी^{2} है। खेत का परिमाप ज्ञात कीजिए।
2. उस वर्ग का विकर्ण ज्ञात कीजिए जिसका परिमाप 60 सेमी है।
3. किसी आयताकार खेत की लंबाई और चौड़ाई क्रमशः 22.5 मी तथा 12.5 मी हैं। ज्ञात कीजिए:

   (i) खेत का क्षेत्रफल

   (ii) खेत के चारों ओर बाड़ लगाने के लिए आवश्यक काँटेदार तार की लंबाई
4. किसी आयत की लंबाई और चौड़ाई 3 : 2 के अनुपात में हैं। यदि आयत का क्षेत्रफल 726 मी^{2} है, तो उसका परिमाप ज्ञात कीजिए।
5. उस समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका आधार और शीर्षलंब क्रमशः 20 सेमी तथा 12 सेमी है।
6. किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल 280 सेमी^{2} है। यदि इस त्रिभुज का आधार 70 सेमी है, तो उसका संगत शीर्षलंब ज्ञात कीजिए।
7. उस समलंब का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी 26 सेमी तथा 12 सेमी लम्बाइयों वाली समांतर भुजाओं के बीच की दूरी 10 सेमी है।
8. किसी समचतुर्भुज का परिमाप 146 सेमी तथा इसका एक विकर्ण 48 सेमी लंबा है। इसके दूसरे विकर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए।

20.2 हीरोन का सूत्र

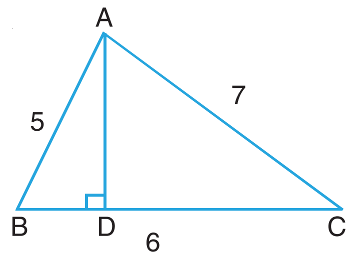
यदि किसी त्रिभुज का आधार और संगत शीर्षलंब ज्ञात हैं, तो निम्न सूत्र का प्रयोग पहले ही कर चुके हैं:

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\ \text{आधार} \times \text{संगत शीर्षलंब}$$

परंतु कभी–कभी हमें एक त्रिभुज का आधार तथा संगत शीर्षलंब नहीं दिया होता है। इसके स्थान पर हमें त्रिभुज की तीनों भुजाएं दी हुई होती हैं। इस स्थिति में भी हम एक भुजा के संगत शीर्षलंब (ऊँचाई) ज्ञात करके क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं। आइए इसे एक उदाहरण की सहायता से स्पष्ट करें।

उदाहरण 20.7: उस त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाएँ AB, BC और CA क्रमशः 5 सेमी, 6 सेमी और 7 सेमी हैं।

हल: आकृति 20.1 में दर्शाए अनुसार $AD \perp BC$ खींचिए।



आकृति 20.1

मान लीजिए $BD = x$ सेमी

अतः, $CD = (6 - x)$ सेमी है।

अब समकोण त्रिभुज ABD से हमें प्राप्त होता है:

$AB^2 = BD^2 + AD^2$ (पाइथागोरस प्रमेय)

अर्थात् $25 = x^2 + AD^2$ ...(1)

इसी प्रकार, समकोण त्रिभुज ACD से हमें प्राप्त होता है:

$AC^2 = CD^2 + AD^2$

अर्थात् $49 = (6 - x)^2 + AD^2$ ...(2)

(1) और (2) से हमें प्राप्त होता है:

$49 - 25 = (6 - x)^2 - x^2$

अर्थात् $24 = 36 - 12x + x^2 - x^2$

या $12\,x = 12$, अर्थात $x = 1$

x के इस मान को (1) में रखने पर हमें प्राप्त होता है:

$25 = 1 + AD^2$

अर्थात् $AD^2 = 24$ या $AD = \sqrt{24}$ सेमी $= 2\sqrt{6}$ सेमी

अतः ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\ BC \times AD = \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{6}$ सेमी^{2} $= 6\sqrt{6}$ सेमी^{2}

आपने यह अवश्य ही देख लिया होगा कि यह प्रक्रिया कुछ लंबी है। ऐसी स्थितियों में, हमारी सहायता के लिए, एक यूनानी गणितज्ञ हीरोन (75 B.C. से 10 B.C.) ने त्रिभुज के क्षेत्रफल के लिए एक सूत्र दिया, जब उसकी तीनों भुजाएं दी हुई हों। यह सूत्र इस प्रकार है:

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

जहाँ, a, b और c त्रिभुज की भुजाएं हैं तथा $s = \frac{a+b+c}{2}$ है। इस सूत्र को उदाहरण 20.7 की तरह 6,7 और 5 को क्रमशः a, b और c लेकर सिद्ध किया जा सकता है।

आइए इस सूत्र का प्रयोग करके उदाहरण 20.7 के त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

यहाँ, $a = 6$ सेमी, $b = 7$ सेमी और $c = 5$ सेमी है।

अतः $s = \dfrac{6+7+5}{2} = 9$ सेमी

अतः ΔABC का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{9(9-6)(9-7)(9-5)}$ सेमी^{2}

$= \sqrt{9 \times 3 \times 2 \times 3}$ सेमी^{2}

$= 6\sqrt{6}$ सेमी^{2}, जो वही है, जो पहले प्राप्त किया था।

आइए इस सूत्र के उपयोग को दर्शाने के लिए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 20.8: किसी त्रिभुजाकार खेत की भुजाएँ 165 मी, 154 मी और 143 मी हैं। इस खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: $s = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{(165+154+143)}{2}$ मी $= 231$ मी

अतः, खेत का क्षेत्रफल$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{231 \times (231-165)(231-154)(231-143)}$ मी^{2}

$= \sqrt{231 \times 66 \times 77 \times 88}$ मी^{2}

$= \sqrt{11 \times 3 \times 7 \times 11 \times 2 \times 3 \times 11 \times 7 \times 11 \times 2 \times 2 \times 2}$ मी^{2}

$= 11 \times 11 \times 3 \times 7 \times 2 \times 2$ मी^{2} $= 10164$ मी^{2}

उदाहरण 20.9: एक समलंब का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी समांतर भुजाओं की लंबाइयाँ 11 सेमी और 25 सेमी हैं तथा असमांतर भुजाओं की लंबाइयाँ 15 सेमी और 13 सेमी हैं।

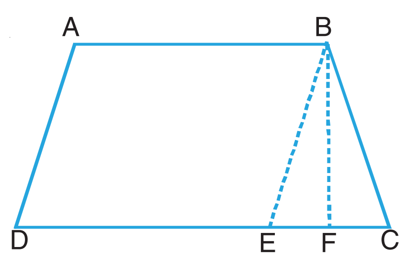
हल: मान लीजिए कि ABCD एक समलंब है, जिसमें AB = 11 सेमी, CD = 25 सेमी, AD = 15 सेमी और BC =13 सेमी (देखिए आकृति 20.2)

B से होकर हम एक रेखा AD के समांतर खींचते हैं, जो DC को E पर प्रतिच्छेद करती है। $BF \perp DC$ खींचिए।

अतः स्पष्टतः BE = AD = 15 सेमी

BC = 13 सेमी (दिया है)

तथा EC = (25 – 11) सेमी = 14 सेमी



आकृति 20.2

इसलिए, ΔBEC के लिए $= \dfrac{15+13+14}{2}$ सेमी $= 21$ सेमी

इसलिए ΔBEC का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{21 \times (21-15)(21-13)(21-14)} \text{ सेमी}^2$$

$$= \sqrt{21 \times 6 \times 8 \times 7} \text{ सेमी}^2$$

$$= 7 \times 3 \times 4 \text{ cm}^2 = 84 \text{ सेमी}^2 \quad ...(1)$$

पुनः ΔBEC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} EC \times BF$

$$= \frac{1}{2} \times 14 \times BF \quad ...(2)$$

अतः (1) और (2) से,

$$\frac{1}{2} \times 14 \times BF = 84$$

अर्थात $BF = \frac{84}{7}$ सेमी $= 12$ सेमी

अतः समलंब ABCD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} (AB + CD) \times BF$

$$= \frac{1}{2}(11 + 25) \times 12 \text{ सेमी}^2$$

$$= 18 \times 12 \text{ सेमी}^2 = 216 \text{ सेमी}^2$$

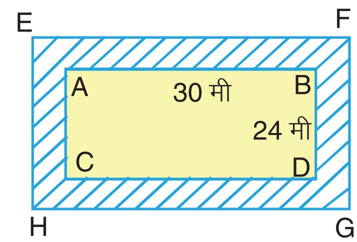
देखें आपने कितना सीखा 20.2

1. 15 सेमी, 16 सेमी और 17 सेमी भुजाओं वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. हीरोन के सूत्र का प्रयोग करके उस समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजा 12 सेमी है। इससे त्रिभुज का शीर्षलंब भी ज्ञात कीजिए।

20.3 आयताकार पथों तथा कुछ सरल रेखीय आकृतियों के क्षेत्रफल

आपने अपने घर के पास पार्कों में बने विभिन्न प्रकार के आयताकार पथों को अवश्य ही देखा होगा। आपने यह भी देखा होगा कि कभी–कभी, भूमि या खेत एक अकेले आकार या आकृति के रूप में नहीं होते। वास्तव में, इन्हें अनेक बहुभुजों, जैसे आयत, वर्ग, त्रिभुज इत्यादि से मिलकर बनी आकृति समझा जा सकता है। हम ऐसी आकृतियों के क्षेत्रफल परिकलित करने की विधियों को कुछ उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 20.10: 30 मी लंबाई और 24 मी चौड़ाई वाले एक पार्क के चारों ओर 4 मी चौड़ा एक पथ बना हुआ है। इस पथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 20.3

हल: मान लीजिए कि ABCD एक पार्क है तथा छायांकित भाग उसके चारों ओर एक पथ है। (देखिए आकृति 20.3).

अतः आयत EFGH की लंबाई $= (30 + 4 + 4)$ मी $= 38$ मी

और आयत EFGH की चौड़ाई $= (24 + 4 + 4)$ मी $= 32$ मी

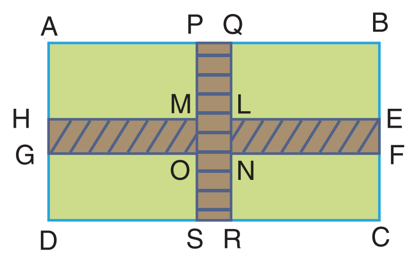
अतः पथ का क्षेत्रफल = आयत EFGH का क्षेत्रफल – आयत ABCD का क्षेत्रफल

$= (38 \times 32 - 30 \times 24)$ मी^{2}

$= (1216 - 720)$ मी^{2}

$= 496$ मी^{2}

उदाहरण 20.11: किसी पार्क के मध्य में दो आयताकार पथ हैं, जैसा कि आकृति 20.4 में दर्शाया गया है। इन पथों पर ₹ 15 प्रति मी^{2} की दर पर कंक्रीट बिछाने का व्यय ज्ञात कीजिए। AB = CD = 50 मी, AD = BC = 40 मी और EF = PQ = 2.5 मी दिया हुआ है।



आकृति 20.4

हल: पथों का क्षेत्रफल = PQRS का क्षेत्रफल + EFGH का क्षेत्रफल– वर्ग MLNO का क्षेत्रफल

$= (40 \times 2.5 + 50 \times 2.5 - 2.5 \times 2.5)$ मी^{2}

$= 218.75$ मी^{2}

अतः ₹ 15 प्रति मी^{2} की दर से कंक्रीट बिछाने का व्यय = ₹ 218.75×15

= ₹ 3281.25

उदाहरण 20.12: आकृति ABCDEFG (देखिए आकृति 20.5) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। जिसमें ABCG एक आयत है, AB = 3 सेमी, BC = 5 सेमी, GF = 2.5 सेमी = DE = CF, CD = 3.5 सेमी, EF = 4.5 सेमी, और CD ∥ EF है।

हल: वाँछित क्षेत्रफल = आयत ABCG का क्षेत्रफल + समद्विबाहु त्रिभुज FGC का क्षेत्रफल

+ समलंब DCEF का क्षेत्रफल ...(1)

अब आयत ABCG का क्षेत्रफल $= l \times b$ $= 5 \times 3$ सेमी^{2} $= 15$ सेमी^{2} ...(2)

ΔFGC के क्षेत्रफल के लिए, $FM \perp CG$ खींचिए।

क्योंकि FG = FC दिया है, अतः M, GC का मध्य बिंदु होगा।

अर्थात, GM = $\frac{3}{2}$ = 1.5 सेमी

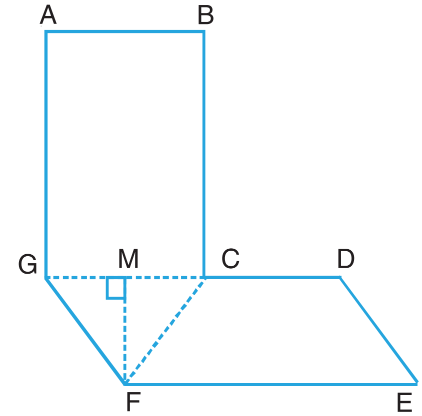
अब ΔGMF से,

$GF^2 = FM^2 + GM^2$

या $(2.5)^2 = FM^2 + (1.5)^2$

या $FM^2 = (2.5)^2 - (1.5)^2 = 4$

या FM = 2, अर्थात FM की लंबाई 2 सेमी है।



आकृति 20.5

अतः ΔFGC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ GC × FM

= $\frac{1}{2}$ × 3 × 2 सेमी² = 3 सेमी² ...(3)

साथ ही समलंब CDEF का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (समांतर भुजाओं का योग) × उनके बीच की दूरी

= $\frac{1}{2}$ (3.5 + 4.5) × 2 सेमी²

= $\frac{1}{2}$ × 8 × 2 cm² = 8 सेमी² ...(4)

अतः दी हुई आकृति का क्षेत्रफल

= (15 + 3 + 8) सेमी² [(1), (2), (3) और (4) से]

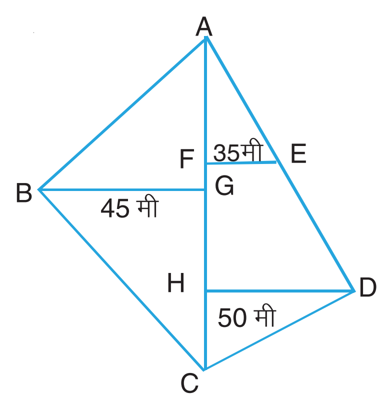
= 26 सेमी²

देखें आपने कितना सीखा 20.3

1. 48 मी लंबे और 36 मी चौड़े एक आयताकार पार्क के अंदर की ओर उसकी परिसीमा के अनुदिश 3 मी चौड़ा एक पथ बना हुआ है। इस पथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

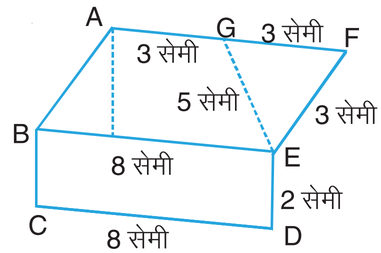
2. 80 मी लंबे और 60 मी चौड़े एक आयताकार गार्डन के बीच में दो पथ बने हुए हैं, जिसमें से प्रत्येक की चौड़ाई 2मी है। इनमें से एक पथ लंबाई के समांतर है तथा दूसरा पथ चौड़ाई के समांतर है। इन पथों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

3. आकृति 20.6 में दी आकृति ABCDE का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ EF, BG तथा DH रेखाखंड AC पर लंब हैं, AF = 40 मी, AG = 50 मी, GH = 40 मीऔर CH = 50 मी है।



आकृति 20.6

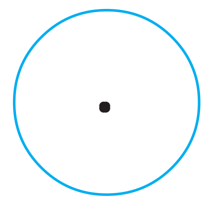
4. आकृति 20.7 में दी गई आकृति ABCDEFG का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ ABEG एक समलंब है, BCDE एक आयत है तथा AG और BE के बीच की दूरी 2 सेमी है।



आकृति 20.7

20.4 वृत्तों और वृत्ताकर पथों के क्षेत्रफल

अभी तक हमने उन आकृतियों के परिमापों और क्षेत्रफलों की चर्चा की है, जो केवल रेखाखंडों से ही बनी हुई हैं। अब हम एक चिर परिचित और बहुत उपयोगी आकृति, जिसे वृत्त कहते हैं, की चर्चा करेंगे, जो रेखाखंडों से नहीं बनी होती है (देखिए आकृति 20.8)।



आकृति 20.8

आप पहले से ही जानतें हैं कि **एक वृत्त का परिमाप (परिधि) $2\pi r$ और क्षेत्रफल πr^2 होता है**, जहाँ r वृत्त की परिधि और व्यास का एक अचर अनुपात है। आप यह भी जानते हैं कि π एक अपरिमेय संख्या है। एक महान भारतीय गणितज्ञ आर्यभट्ट (476 - 550 AD) ने π का मान $\frac{62832}{20000}$ दिया, जो दशमलव के चार स्थानों तक परिशुद्ध 3.1416 है। परंतु व्यावहारिक कार्यों के लिए π का मान लगभग $\frac{22}{7}$ या 3.14 लिया जाता है। जब तक अन्यथा न कहा जाए, हम π का मान $\frac{22}{7}$ लेंगे।

उदाहरण 20.13: दो वृत्तों की त्रिज्याएँ 18 सेमी और 10 सेमी हैं। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि इन दानों वृत्तों की परिधियों के योग के बराबर है।

हल: मान लीजिए कि वृत्त की त्रिज्या r सेमी है।

अतः इसकी परिधि $= 2\pi r$ सेमी ....(1)

साथ ही, दोनों वृत्तों की परिधियों का योग $= (2\pi \times 18 + 2\pi \times 10)$ सेमी

$= 2\pi \times 28$ सेमी ...(2)

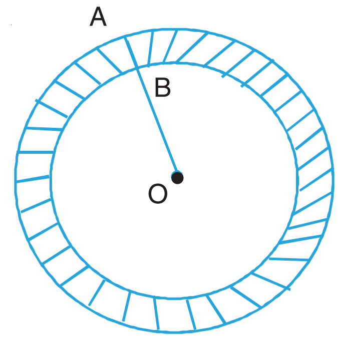
अतः (1) और (2) से, $2\pi r = 2\pi \times 28$

या $r = 28$

अर्थात, वृत्त की त्रिज्या 28 सेमी है।

उदाहरण 20.14: त्रिज्या 16 मी वाले एक वृत्ताकार पार्क की परिसीमा के अनुदिश अंदर की ओर 2 मी चौड़ा एक वृत्ताकार पथ है। ₹ 24 प्रति मी^{2} की दर से इस पथ पर ईंटें बिछाने का व्यय ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)

हल: मान लीजिए कि OA पार्क की त्रिज्या है तथा छायांकित भाग पथ है। (देखिए आकृति 20.9)



आकृति 20.9

अतः, OA = 16 मी

और OB = 16 मी – 2 मी = 14 मी

अतः पथ का क्षेत्रफल

$= (\pi \times 16^2 - \pi \times 14^2)$ मी^{2}

$= \pi(16 + 14)(16 - 14)$ मी^{2}

$= 3.14 \times 30 \times 2 = 188.4$ मी^{2}

अतः, इस पथ पर ₹ 24 प्रति मी^{2} की दर से ईंट बिछाने का व्यय

= ₹ 24×188.4

= ₹ 4521.60

देखें आपने कितना सीखा 20.4

1. दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 9 सेमी और 12 सेमी हैं। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए, जिसका क्षेत्रफल इन दोनों वृत्तों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर हो।

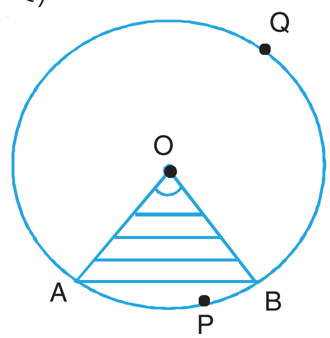
2. किसी कार के पहियों में से प्रत्येक की त्रिज्या 40 सेमी है। यदि कार 66 किमी प्रति घंटा की चाल से चल रही है, तो प्रत्येक पहिए द्वारा 20 मिनट में लगाए गए चक्करों की संख्या ज्ञात कीजिए।

3. त्रिज्या 21 मी वाले एक वृत्ताकार पार्क के अनुदिश बाहर की ओर 7 मी चौड़ी एक वृत्ताकार सड़क है। इस सड़क का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

20.5 एक त्रिज्यखंड का परिमाप तथा क्षेत्रफल

आप पद **वृत्त के त्रिज्यखंड** से पहले से ही परिचित हैं। याद कीजिए कि वृत्त की त्रिज्याओं के बीच परिबद्ध संगत वृत्तीय क्षेत्र का भाग उस वृत्त का एक त्रिज्यखंड कहलाता है। इस प्रकार, आकृति 20.10 में, OAPB केन्द्र O वाले वृत्त का एक त्रिज्यखंड है। $\angle AOB$ त्रिज्यखंड का **केन्द्रीय कोण** या केवल **कोण** कहलाता है। स्पष्टतः APB इस त्रिज्यखंड का संगत चाप है।

आप यह भी देख सकते हैं कि भाग OAQB (अछायांकित क्षेत्र) भी इस वृत्त का एक वृत्तखंड है। स्पष्ट कारणों से, OAPB **लघु त्रिज्यखंड** तथा OAQB **दीर्घ त्रिज्यखंड** कहलाता है (जिसका संगत दीर्घ चाप AQB है)



आकृति 20.10

टिप्पणी: जब तक अन्यथा न कहा जाए, त्रिज्यखंड से हमारा तात्पर्य लघु त्रिज्यखंड से होगा।

(i) **त्रिज्यखंड का परिमाप:** स्पष्टतः, त्रिज्यखंड OAPB का परिमाप OA + OB + चाप APB की लंबाई है।

मान लीजिए कि त्रिज्या OA (या OB) = r, चाप APB की लंबाई l है और $\angle AOB = \theta$ है।

इस चाप APB की लंबाई निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं:

अब, केन्द्र पर कुल कोण 360^0 के लिए लंबाई $= 2\,\pi r$

अतः, कोण θ के लिए, लंबाई $l = \dfrac{2\pi r}{360^o} \times \theta$

या $\quad l = \dfrac{\pi r \theta}{180^o} \quad \ldots(1)$

इस प्रकार OAPB का परिमाप $= OA + OB + l$

$$= r + r + \frac{\pi r \theta}{180^o} = 2\,r + \frac{\pi r \theta}{180^o}$$

(ii) **त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल**

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

अब कुल कोण 360^o के लिए, क्षेत्रफल $= \pi r^2$

अतः, **कोण θ के लिए, क्षेत्रफल** $= \dfrac{\pi r^2}{360^o} \times \theta$

इस प्रकार त्रिज्यखंड OAPB का क्षेत्रफल $= \dfrac{\pi r^2\theta}{360^\circ}$

टिप्पणी: कोण $360^\circ - \theta$ लेकर, हम दीर्घ त्रिज्यखंड OAQB का परिमाप और क्षेत्रफल निम्न रूप में ज्ञात कर सकते हैं:

$$\text{परिमाप} = 2r + \frac{\pi r(360^\circ - \theta)}{180^\circ}$$

$$\text{तथा क्षेत्रफल} = \frac{\pi r^2}{360^\circ} \times (360^\circ - \theta)$$

उदाहरण 20.15: त्रिज्या 9 सेमी और केन्द्रीय कोण 35° वाले एक त्रिज्यखंड का परिमाप और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: त्रिज्यखंड का परिमाप $= 2r + \dfrac{\pi r\theta}{180^\circ}$

$$= \left(2\times 9 + \frac{22}{7}\times\frac{9\times 35^\circ}{180^\circ}\right) \text{ सेमी}$$

$$= \left(18 + \frac{11\times 1}{2}\right) \text{ सेमी} = \frac{47}{2} \text{ सेमी}$$

त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \dfrac{\pi r^2 \times \theta}{360^\circ}$

$$= \left(\frac{22}{7}\times\frac{81\times 35^\circ}{360^\circ}\right) \text{सेमी}^2$$

$$= \left(\frac{11\times 9}{4}\right) \text{सेमी}^2 = \frac{99}{4} \text{ सेमी}^2$$

उदाहरण 20.16: त्रिज्या 6 सेमी वाले एक वृत्त के त्रिज्यखंड का परिमाप और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसके संगत चाप की लंबाई 22 सेमी है।

हल: त्रिज्यखंड का परिमाप = 2r + चाप की लंबाई

= (2 × 6 + 22) सेमी = 34 सेमी

क्षेत्रफल के लिए, आइए पहले केन्द्रीय कोण θ ज्ञात करें।

$$\text{अतः,} \quad \frac{\pi r\theta}{180^\circ} = 22$$

या $\quad \frac{22}{7} \times 6 \times \frac{\theta}{180^\circ} = 22$

या $\quad \theta = \frac{180^\circ \times 7}{6} = 210^\circ$

अतः, त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ}$

$= \frac{22}{7} \times \frac{36 \times 210^\circ}{360^\circ}$ सेमी^{2}

$= 66$ सेमी^{2}

क्षेत्रफल के लिए, वैकल्पिक विधि

वृत्त की परिधि $= 2\pi r$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 6$ सेमी

तथा वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 6 \times 6$ सेमी^{2}

लंबाई $2 \times \frac{22}{7} \times 6$ सेमी के लिए क्षेत्रफल $= \frac{22}{7} \times 6 \times 6$ सेमी^{2}

अतः लंबाई 22 सेमी के लिए क्षेत्रफल $= \frac{22}{7} \times \frac{6 \times 6 \times 7 \times 22}{2 \times 22 \times 6}$ सेमी^{2}

$= 66$ सेमी^{2}

देखें आपने कितना सीखा 20.5

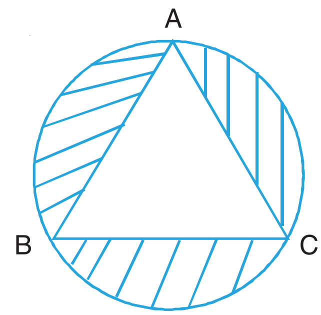
1. त्रिज्या 14 सेमी वाले एक वृत्त के एक त्रिज्यखंड का परिमाप और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्रीय कोण 30° है।

2. त्रिज्या 6 सेमी वाले एक वृत्त के उस त्रिज्यखंड का परिमाप और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके चाप की लंबाई 11 सेमी है।

20.6 वृत्तों से संबद्ध आकृतियों के संयोजनों के क्षेत्रफल

अभी तक हमने पृथक-पृथक रूप से आकृतियों के क्षेत्रफलों की चर्चा की है। अब हम कुछ समतल आकृतियों के संयोजनों के क्षेत्रफल परिकलित करने का प्रयास करेंगे। दैनिक जीवन में, हमें ऐसी आकृतियाँ विभिन्न डिजाइनों जैसे मेजपोश, फूलों की क्यारियाँ, खिड़कियों के डिज़ाइन, इत्यादि में मिलती हैं। आइए, कुछ उदाहरणों की सहायता से इनके क्षेत्रफल ज्ञात करने की प्रक्रिया को स्पष्ट करें।

उदाहरण 20.17: एक गोल मेजपोश में, बीच में एक समबाहु त्रिभुज ABC छोड़ते हुए एक डिजाइन बनाया गया है, जैसा कि आकृति 20.11 में दिखाया गया है। यदि इस मेजपोश की त्रिज्या 3.5 सेमी है, तो ₹ 0.50 प्रति सेमी^{2} की दर से इसमें डिजाइन बनाने का व्यय ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ और $\sqrt{3} = 1.7$ लीजिए)



आकृति 20.11

हल: मान लीजिए कि मेजपोश का केन्द्र O है।

$OP \perp BC$ खींचिए तथा OB और OC को मिलाइए (आकृति 20.12)।

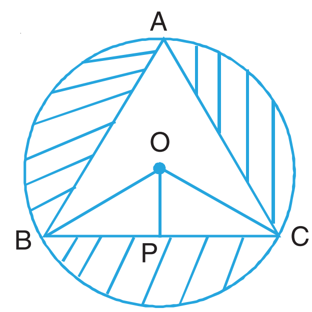
अब, $\angle BOC = 2\,\angle BAC = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$

साथ ही, $\angle BOP = \angle COP = \frac{1}{2}\,\angle BOC = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$

अब, $\frac{BP}{OB} = \sin\angle BOP = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

अर्थात, $\frac{BP}{3.5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (पाठ 22–23 देखिए)

अतः, $BC = 2 \times \frac{3.5\sqrt{3}}{2}$ सेमी $= 3.5\sqrt{3}$ सेमी



आकृति 20.12

इसलिए ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} BC^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3.5 \times 3.5 \times 3$ सेमी^{2}

अब डिजाइन का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल – ΔABC का क्षेत्रफल

$= (3.14 \times 3.5 \times 3.5 - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3.5 \times 3.5 \times 3)$ सेमी^{2}

$$= \left(3.14 \times 3.5 \times 3.5 - \frac{1.7 \times 3.5 \times 3.5 \times 3}{4}\right) \text{ सेमी}^2$$

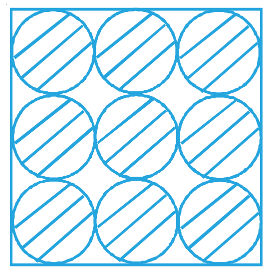
$$= 3.5 \times 3.5 \left(\frac{12.56 - 5.10}{4}\right) \text{ सेमी}^2$$

$$= 12.25 \left(\frac{7.46}{4}\right) \text{ सेमी}^2 = 12.25 \times 1.865 \text{ सेमी}^2$$

अतः ₹ 0.50 प्रति सेमी^{2} की दर से डिजाइन बनाने का व्यय

$$= ₹\ 12.25 \times 1.865 \times 0.50 = ₹\ 114.23 \text{ (लगभग)}$$

उदाहरण 20.18: एक वर्गाकार रुमाल पर, 9 वृत्ताकार डिजाइन बने हुए हैं, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 7 सेमी है, जैसा कि आकृति 20.13 में दर्शाया गया है। रुमाल के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 20.13

हल: क्योंकि प्रत्येक वृत्ताकार डिजाइन की त्रिज्या 7 सेमी है, इसलिए इनका व्यास = 2 × 7 सेमी = 14 सेमी

अतः वर्गाकार रुमाल की भुजा = 3 × 14 = 42 सेमी ...(1)

अतः, रुमाल का क्षेत्रफल = 42 × 42 सेमी^{2}

साथ ही, एक वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 7 \times 7$ सेमी^{2} = 154 सेमी^{2}

अतः, 9 वृत्तों का क्षेत्रफल = 9 × 154 सेमी^{2} ...(2)

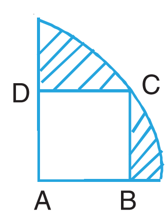
इसलिए (1) और (2) से, शेष भाग का क्षेत्रफल

$$= (42 \times 42 - 9 \times 154) \text{ सेमी}^2$$

$$= (1764 - 1386) \text{ सेमी}^2 = 378 \text{ सेमी}^2$$

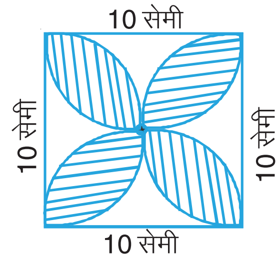
देखें आपने कितना सीखा 20.6

1. त्रिज्या 14 सेमी वाले वृत्त के एक चतुर्थांश में, भुजा 6 सेमी वाल एक वर्ग ABCD अंतर्गत खींचा गया है (देखिए आकृति 20.14)। आकृति के छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 20.14

2. भुजा 10 सेमी वाले एक वर्ग की भुजाओं पर अर्द्धवृत्तों को खींचकर एक छायांकित डिजाइन बनाया गया है जैसा आकृति 20.15 में दिखाया गया है। इस डिजाइन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 20.14

आइए दोहराएँ

- आयत का परिमाप = 2 (लंबाई + चौड़ाई)
- आयत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई
- वर्ग का परिमाप = 4 × भुजा
- वर्ग का क्षेत्रफल = (भुजा)^2
- समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × संगत शीर्षलंब
- त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ आधार × संगत शीर्षलंब तथा साथ ही $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,

  जहाँ a, b और c त्रिभुज की भुजाएँ हैं तथा $s = \frac{a+b+c}{2}$ है।
- समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × विकर्णों का गुणनफल
- समलंब का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (समांतर भुजाओं का योग) × उनके बीच की दूरी
- आयताकार पथ का क्षेत्रफल = बाहरी आयत का क्षेत्रफल − भीतरी आयत का क्षेत्रफल
- बीच में क्रॉस पथों का क्षेत्रफल = दोनों पथों के क्षेत्रफलों का योग–उभयनिष्ठ भाग का क्षेत्रफल
- त्रिज्या r वाले वृत्त की परिधि = 2 πr
- त्रिज्या r वाले वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2
- एक वृत्ताकार पथ का क्षेत्रफल = बाहरी वृत्त का क्षेत्रफल –भीतरी वृत्त का क्षेत्रफल
- त्रिज्या r वाले वृत्त के केन्द्रीय कोण θ वाले त्रिज्यखंड के चाप की लंबाई $l = \frac{\pi r\theta}{180^\circ}$

- त्रिज्या r वाले वृत्त के केन्द्रीय कोण θ वाले त्रिज्यखंड का परिमाप $= 2r + \dfrac{\pi r\theta}{180^{\circ}}$
- त्रिज्या r वाले वृत्त के केन्द्रीय कोण θ वाले त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \dfrac{\pi r^{2}\theta}{360^{\circ}}$
- अनेक सरल रेखीय आकृतियों के क्षेत्रफल उन्हें परिचित आकृतियों, जैसे वर्ग, आयत, त्रिभुज इत्यादि में विभाजित कर ज्ञात किया जा सकता है।
- वृत्तों से संबद्ध अनेक आकृतियों के संयोजनों और डिजाइनों के क्षेत्रफल भी ज्ञात सूत्रों का प्रयोग करके ज्ञात किए जा सकते हैं।

आइए अभ्यास करें

1. एक वर्गाकार पार्क की भुजा 37.5 मी है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. किसी वर्ग का परिमाप 480 सेमी है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. 40 000 मी^{2} क्षेत्रफल वाले एक वर्गाकार खेत की परिसीमा के अनुदिश किसी व्यक्ति द्वारा 4 किमी/घंटा की चाल से चलने में लिया गया समय ज्ञात कीजिए।
4. किसी कमरे की लंबाई उसकी चौड़ाई की तिगुनी है। यदि चौड़ाई 4.5 मी है, तो फर्श का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. किसी आयत की लंबाई और चौड़ाई का अनुपात 5 : 2 है तथा उसका परिमाप 980 सेमी है। आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
6. निम्न में से प्रत्येक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए:

   (i) एक भुजा 25 सेमी तथा संगत शीर्षलंब 12 सेमी

   (ii) दो आसन्न भुजाएं 13 सेमी और 14 सेमी तथा एक विकर्ण 15 सेमी
7. एक आयताकार खेत का क्षेत्रफल 27000 मी^{2} है तथा इसी लंबाई और चौड़ाई 6 : 5 के अनुपात में हैं। ₹ 7 प्रति 10 मीटर की दर से खेत के चारों ओर बाड़ लगाने के लिए काँटेदार तार के चार चक्कर लगवाने में लगे तार की लागत ज्ञात कीजिए।
8. निम्न में से प्रत्येक समलंब का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए:

क्र.सं.	समांतर भुजाओं की लंबाइयां	समांतर भुजाओं के बीच की दरूी
(i)	30 सेमी और 20 सेमी	15 सेमी
(ii)	15.5 सेमी और 10.5 सेमी	7.5 सेमी
(iii)	15 सेमी और 45 सेमी	14.6 सेमी
(iv)	40 सेमी और 22 सेमी	12 सेमी

9. उस भूखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जो एक चतुर्भुज के आकार का है, जिसके एक विकर्ण की लंबाई 20 मी है तथा उसके सम्मुख शीर्षों से उस डाले गए लंबों की लंबाइयाँ क्रमशः 12 मी और 18 मी हैं।

10. समलंब के आकार के एक खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी समांतर भुजाओं की लंबाइयाँ 48 मी और 160 मी हैं तथ असमांतर भुजाओं की लंबाइयाँ 50 मी और 78 मी हैं।

11. एक चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसमें AB = 8.5 सेमी, BC = 14.3 सेमी, CD = 16.5 सेमी, AD = 8.5 सेमी और BD = 15.4 सेमी है।

12. निम्न भुजाओं वाले त्रिभुजों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए:

(i) 2.5 सेमी, 6 सेमी और 6.5 सेमी

(ii) 6 सेमी, 11.1 सेमी और 15.3 सेमी

13. किसी त्रिभुज की भुजाएँ 51 सेमी, 52 सेमी और 53 सेमी हैं। ज्ञात कीजिए:

(i) त्रिभुज का क्षेत्रफल

(ii) 52 सेमी लंबी भुजा पर सम्मुख शीर्ष से डाले गए लंब की लंबाई

(iii) उपरोक्त (ii) के लंब द्वारा विभाजित त्रिभुज के दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल

14. एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी एक भुजा 5 मी है तथा एक विकर्ण 8 मी है।

15. क्षेत्रफल 312 सेमी^{2} वाले एक समलंब की समांतर भुजाओं का अंतर 8 सेमी है। यदि दोनों समांतर भुजाओं के बीच की दूरी 24 सेमी है, तो दोनों समांतर भुजाओं की लंबाइयाँ ज्ञात कीजिए।

16. 200 मी $\times$ 150 मी विमाओं वाले एक आयताकार पार्क के बीच में दो लांबिक पथ 10 मी चौड़ाई के बने हुए हैं, जिनमें एक लंबाई के समांतर तथा दूसरा चौड़ाई के समांतर है। ₹ 5 प्रति मी^{2} की दर से इन पथों को निर्मित करने का व्यय ज्ञात कीजिए।

17. विमाओं 65 मी $\times$ 40 मी वाले एक आयताकार लॉन के अंदर परिसीमा के अनुदिश 8 मी एक समान चौड़ाई वाला एक पथ बना हुआ है। ₹ 5.25 प्रति मी^{2} की दर से इस पथ पर लाल बजरी बिछाने का व्यय ज्ञात कीजिए।

18. एक आयताकार पार्क की लंबाई 30 मी और चौड़ाई 20 मी है। इसके चारों ओर दो पथ हैं, जिनमें से प्रत्येक की चौड़ाई 2 मी है (एक पथ के बाहर की ओर और दूसरा पथ के अंदर की ओर)। इन पथों का कुल क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

19. किसी वृत्त की परिधि और व्यास का अंतर 30 सेमी है। उसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

20. 9 मी त्रिज्या वाले एक वृत्ताकार पार्क के चारों ओर बाहर की ओर 3 मी चौड़ा एक पथ बना हुआ है। इस पथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

21. त्रिज्या 15 मी वाले एक वृत्ताकार पार्क की परिसीमा के अनुदिश अंदर की ओर 2 मी चौड़ी एक सड़क बनी हुई है। इस सड़क का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

22. त्रिज्या 1.47 मी वाले एक वृत्ताकार गत्ते में से 60° कोण वाला एक त्रिज्यखंड काट लिया गया है। शेष गत्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

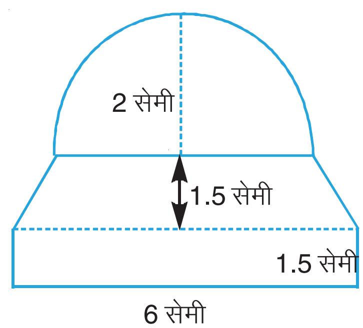
23. उस वर्गाकार खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी भुजा की लंबाई 360 मी है।

24. एक त्रिभुज कार खेत का क्षेत्रफल 2.5 हेक्टेयर है। यदि इसकी एक भुजा 250 मी है, तो संगत शीर्षलंब ज्ञात कीजिए।

25. एक समलंब के आकार के खेत की समांतर भुजाएँ 11 मी और 25 मी हैं तथा इनकी असमांतर भुजाएँ 15 मी और 13 मी हैं। 5 पैसे प्रति 500 सेमी^{2} की दर से इस खेत में पानी देने का व्यय ज्ञात कीजिए।

26. 8 सेमी व्यास की एक वृत्ताकार चकती में से 1.5 सेमी भुजा वाला एक वर्ग काटकर निकाल लिया जाता है। चकती के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

27. संलग्न आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसके मापन आकृति में दिए गए हैं। ($\pi = 3.14$ लीजिए)



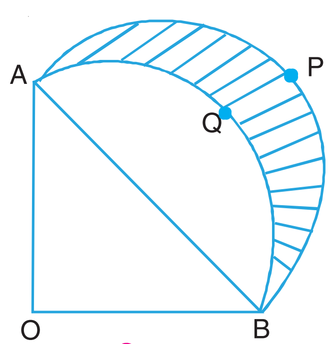
आकृति 20.16

28. एक किसान ₹ 700 प्रति मी^{2} की दर से एक वृत्ताकार खेत ₹ 316800 में खरीदता है। इस खेत का परिमाप ज्ञात कीजिए।

29. एक घोड़े को 12 मी भुजा वाले एक वर्गाकार मैदान के एक कोने पर एक खंबे से 3.5 मी लंबी रस्सी से बाँध दिया गया है। मैदान के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिससे वह घोड़ा घास चर सकता है।

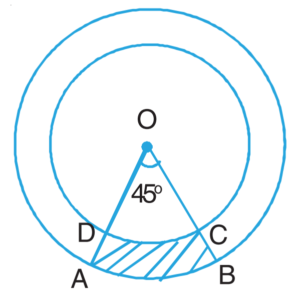
30. उस वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि 44 सेमी है।

31. आकृति 20.17 में, OAQB त्रिज्या 7 सेमी वाले वृत्त का एक चतुर्थांश है तथा APB एक अर्द्धवृत्त है। छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



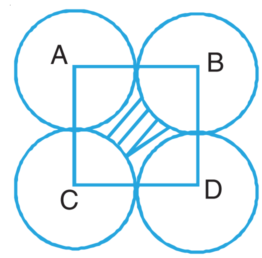
आकृति 20.17

32. आकृति 20.18 में, दोनों संकेन्द्री वृत्तों की त्रिज्याएँ 7 सेमी और 14 सेमी हैं तथा $\angle AOB = 45^\circ$ है। छायांकित भाग ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



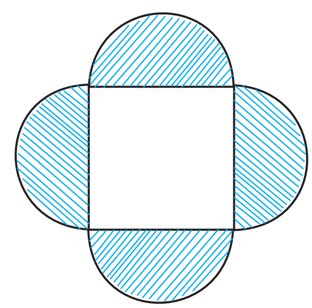
आकृति 20.18

33. आकृति 20.19 में, त्रिज्याओं 7 सेमी वाले चार सर्वांगसम वृत्त एक दूसरे को स्पर्श करते हैं तथा उनके केन्द्र A, B, C, और D हैं। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



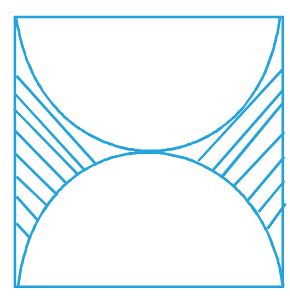
आकृति 20.19

34. आकृति 20.20 में दी फूलों की क्यारी का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसके सिरे अर्द्धवृत्ताकार हैं, यदि इन सिरों के व्यास क्रमशः 14 सेमी, 28 सेमी, 14 सेमी और 28 सेमी हैं।



आकृति 20.20

35. आकृति 20.21 में, एक वर्ग ABCD के अंदर, जिसकी भुजा 14 सेमी है, दो अर्द्धवृत्त खींचे गए हैं। छायांकित भाग का क्षेत्रफल तथा साथ ही अछायांकित भाग का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।



आकृति 20.21

प्रश्नों 36 से 42 में से प्रत्येक में, दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए:

36. भुजा a वाले वर्ग का परिमाप है

(A) a^2 (B) $4a$ (C) $2a$ (D) $\sqrt{2}\,a$

37. किसी त्रिभुज की भुजाएँ 15 सेमी, 20 सेमी और 25 सेमी हैं। इसका क्षेत्रफल है:

(A) 30 सेमी^{2} (B) 150 सेमी^{2} (C) 187.5 सेमी^{2} (D) 300 सेमी^{2}

38. किसी समद्विबाहु त्रिभुज का आधार 8 सेमी है और उसकी बराबर भुजाओं में से एक भुजा 5 सेमी है। इस त्रिभुज की संगत ऊँचाई है:

(A) 5 सेमी (B) 4 सेमी (C) 3 सेमी (D) 2 सेमी

39. यदि किसी समबाहु त्रिभुज की भुजा a है, तो इसका शीर्षलंब है

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2a^2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2a}$

40. किसी समांतर चतुर्भुज की एक भुजा 15 सेमी तथा संगत शीर्षलंब 5 सेमी है। इस समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल है:

(A) 75 सेमी^{2} (B) 37.5 सेमी^{2} (C) 20 सेमी^{2} (D) 3 सेमी^{2}

41. किसी समचतुर्भुज का क्षेत्रफल 156 सेमी^{2} है तथा इसका एक विकर्ण 13 सेमी है। अन्य विकर्ण है:

(A) 12 सेमी (B) 24 सेमी (C) 36 सेमी (D) 48 सेमी

42. किसी समलंब का क्षेत्रफल 180 सेमी^{2} है तथा इसकी समांतर भुजाएँ 28 सेमी और 12 सेमी हैं। दोनों समांतर भुजाओं के बीच की दूरी है:

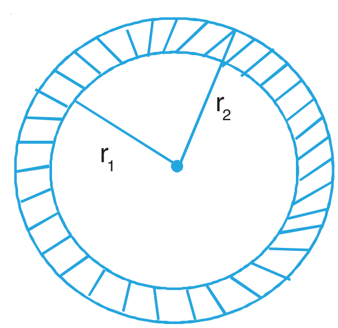
(A) 9 सेमी (B) 12 सेमी (C) 15 सेमी (D) 18 सेमी

43. निम्न में से कौन से कथन सत्य हैं और कौन से असत्य?

(i) एक आयत का परिमाप लम्बाई + चौड़ाई के बराबर होता है।

(ii) त्रिज्या r वाले वृत्त का क्षेत्रफल πr^2 होता है।

(iii) संलग्न आकृति में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल $\pi r_1^2 - \pi r_2^2$ है।



(iv) भुजाओं a, b और c वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ होता है जहाँ s त्रिभुज का अर्ध परिमाप है।

(v) त्रिज्या r वाले वृत्त के उस वृत्तखंड का क्षेत्रफल, जिसका केन्द्रीय कोण 60° है, $\frac{\pi r^2}{6}$ है।

(vi) त्रिज्या 5 सेमी वाले वृत्त के केन्द्रीय कोण 120° वाले त्रिज्यखंड का परिमाप 5 सेमी + $\frac{10\pi}{3}$ सेमी है।

44. रिक्त स्थानों को भरिए:

(i) समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ उसके ____________________ का गुणनफल

(ii) समलंब का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (उसकी ________ का योग) × ______ बीच की दूरी

(iii) त्रिज्याओं 4 सेमी और 8 सेमी वाले वृत्तों के क्रमशः 100° और 50° केन्द्रीय कोण वाले त्रिज्यखंडों के क्षेत्रफलों का अनुपात ___________ है।

(iv) त्रिज्याओं 10 सेमी और 5 सेमी वाले वृत्तों के क्रमशः केन्द्रीय कोण 75° और 150° वाले त्रिज्यखंडों के संगत चापों की लंबाइयों का अनुपात ______________ है।

(v) विकर्णों 16 सेमी और 12 सेमी वाले एक समचतुर्भुज का परिमाप ___________ है।

देखें आपने कितना सीखा के उत्तर

20.1

1. 60 मी
2. $15\sqrt{2}$ मी
3. (i) 281.25 मी^{2} (ii) 70 मी
4. 110 मी [संकेत $3x \times 2x = 726 \Rightarrow x = 11$ मी]
5. 240 सेमी^{2}
6. 80 सेमी
7. 190 सेमी^{2}
8. 55 सेमी, 1320 सेमी^{2}

20.2

1. $24\sqrt{21}$ सेमी^{2}
2. $36\sqrt{3}$ सेमी^{2}; $6\sqrt{3}$ सेमी

20.3

1. 648 मी^{2}
2. 276 मी^{2}
3. 7225 मी^{2}
4. $\left(27+\frac{5}{4}\sqrt{11}\right)$ सेमी^{2}

20.4

1. 15 सेमी
2. 8750
3. 10.78 मी^{2}

20.5

1. परिमाप $= 35\frac{1}{2}$ सेमी; क्षेत्रफल $= \frac{154}{3}$ सेमी^{2}
2. परिमाप = 23 सेमी, क्षेत्रफल = 33 सेमी^{2}

20.6

1. 118 सेमी^{2}
2. $(4\times\frac{1}{2}\pi\times5^2 - 10\times10)$ सेमी^{2}

   $= (50\pi - 100)$ सेमी^{2}

आइए अभ्यास करें के उत्तर

1. 1406.25 मी^{2}	2. 14400 सेमी^{2}	3. 12 मिनट	
4. 60.75 मी^{2}	5. 49000 सेमी^{2}	6. (i) 300 सेमी^{2}	(ii) 168 सेमी^{2}
7. ₹ 1848			
8. (i) 375 सेमी^{2}	(ii) 97.5 सेमी^{2}	(iii) 438 मी^{2}	(iv) 372 सेमी^{2}
9. 300 मी^{2}	10. 3120 मी^{2}	11. 129.36 सेमी^{2}	
12. (i) 7.5 सेमी^{2}	(ii) 27.54 सेमी^{2}		
13. (i) 1170 सेमी^{2}	(ii) 45 सेमी	(iii) 540 सेमी^{2}, 630 सेमी^{2}	

14. 24 मी^{2}	15. 17 सेमी और 9 सेमी	16. ₹ 17000
17. ₹ 7476	18. 400 मी^{2}	19. 7 सेमी
20. 198 मी^{2}	21. 176 m^2	22. 1.1319 m^2
23. 12.96 हेक्टेयर	24. 200 मी	25. ₹ 216
26. 47.99 सेमी^{2}	27. 22.78 सेमी^{2}	28. $75\frac{3}{7}$ मी
29. $\frac{77}{8}$ मी^{2}	30. $\frac{77}{2}$ सेमी^{2}	31. $\frac{49}{2}$ सेमी^{2}
32. $\frac{231}{4}$ सेमी^{2}	33. 42 सेमी^{2}	34. 1162 सेमी^{2}
35. 42 सेमी^{2}, 154 सेमी^{2}	36. (B)	37. (B)
38. (C)	39. (C)	40. (A)
41. (B)	42. (A)	
43. (i) असत्य	(ii) सत्य	(iii) असत्य
(iv) असत्य	(v) सत्य	(vi) असत्य
44. (i) विकर्णों	(ii) समांतर भुजाओं, उनके	(iii) 1 : 2
(iv) 1 : 1	(v) 40 सेमी	