23

कुछ विशेष कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

पिछले पाठ में, हमने समकोण त्रिभुज में न्यून कोणों के लिए त्रिकोणमितीय अनुपातों की परिभाषा दी और उनके बीच कुछ सम्बन्ध स्थापित किये। इस पाठ में, हम अपनी ज्यामितीय जानकारी का प्रयोग कर $30^\circ, 45^\circ$ और 60° के कोणों के लिए त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान प्राप्त करेंगे। हम 0° तथा 90° के भी त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान लिखेंगे। हम यह भी देखेंगे कि 0° तथा 90° के कुछ त्रिकोणमितीय अनुपात परिभाषित नहीं हैं। हम इस त्रिकोणमिति की जानकारी का प्रयोग, अपने दैनिक जीवन से ली गई ऊँचाइयों और दूरियों की साधारण समस्याओं को भी हल करने में करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ का अध्ययन करने के बाद आप समर्थ हो जाएँगे कि:

- 30°, 45° तथा 60° के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात कर सकें;
- 0° तथा 90° के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान लिख सकें;
- यह बता सकें कि 0° तथा 90° के कौन से त्रिकोणमितीय अनुपात परिभाषित नहीं हैं;
- ऊँचाई तथा दूरी की दैनिक जीवन से संबंधित समस्याएँ हल कर सकें।

अपेक्षित पूर्व ज्ञान

- समकोण ΔABC, जिसमें कोण $B = 90^\circ$ है, के लिए पाइथागोरस प्रमेय सूत्र $AC^2 = AB^2 + BC^2$
- शीर्ष B पर समकोणिक त्रिभुज ABC में,

$$\sin C = \frac{\angle C \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}}, \quad \operatorname{cosec} C = \frac{\text{कर्ण}}{\angle C \text{ की सम्मुख भुजा}}$$

$$\cos C = \frac{\angle C \text{ की संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}}, \quad \sec C = \frac{\text{कर्ण}}{\angle C \text{ की संलग्न भुजा}}$$

$$\tan C = \frac{\angle C \text{ की सम्मुख भुजा}}{\angle C \text{ की संलग्न भुजा}} \text{ तथा } \cot C = \frac{\angle C \text{ की संलग्न भुजा}}{\angle C \text{ की सम्मुख भुजा}}$$

$$\text{cosec } C = \frac{1}{\sin C}, \quad \sec C = \frac{1}{\cos C} \text{ तथा } \cot C = \frac{1}{\tan C}$$

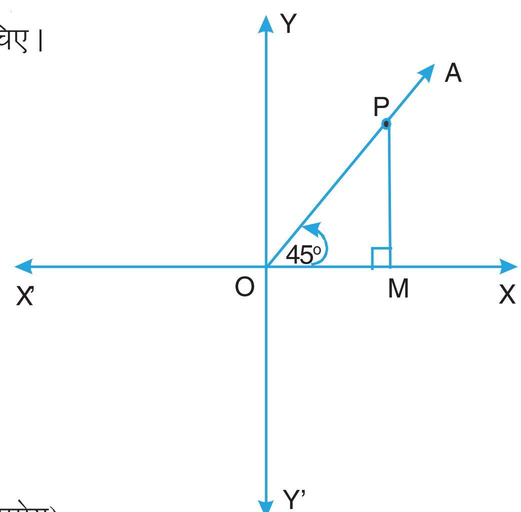
- $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta, \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$

  $\tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta, \cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta$

- $\sec(90^\circ - \theta) = \text{cosec }\theta$ तथा $\text{cosec }(90^\circ - \theta) = \sec\theta$

23.1 45^0 के कोण के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात

माना एक किरण OA, घड़ी की सुई की विपरीत दिशा में, किसी भी समय के अंतराल के बाद घूमती है और x-अक्ष के साथ 45° का कोण बनाती है, जैसा कि आकृति 23.1 में दर्शाया गया है।



आकृति 23.1

OA पर कोई बिन्दु P लीजिए। $PM \perp OX$ खींचिए।

अब समकोण ΔPMO में,

$$\angle POM + \angle OPM + \angle PMO = 180^\circ$$

या $\quad 45^\circ + \angle OPM + 90^\circ = 180^\circ$

या $\quad \angle OPM = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

$\therefore$ ΔPMO में, $\angle OPM = \angle POM = 45^\circ$

$$\therefore \quad OM = PM$$

माना $OM = a$ इकाई, तब $PM = a$ इकाई

समकोण त्रिभुज PMO में,

$$OP^2 = OM^2 + PM^2 \text{ (पाइथागोरस प्रमेय)}$$

$$= a^2 + a^2$$

$$= 2a^2$$

$\therefore$ $OP = \sqrt{2}\, a$ इकाई

अब $\quad \sin 45^\circ = \dfrac{PM}{OP} = \dfrac{a}{\sqrt{2}a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\cos 45^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^o = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\operatorname{cosec} 45^o = \frac{1}{\sin 45^o} = \frac{1}{1/\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\sec 45^o = \frac{1}{\cos 45^o} = \frac{1}{1/\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

तथा $$\cot 45^o = \frac{1}{\tan 45^o} = \frac{1}{1} = 1$$

23.2 30^0 के कोण के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात

माना एक किरण OA, घड़ी की सुई की विपरीत दिशा में घूमती है और x-अक्ष के साथ 30^o का कोण बनाती है, जैसा कि आकृति 23.2 में दर्शाया गया है।

OA पर कोई बिन्दु P लीजिए। $PM \perp OX$ खींचिए।

तथा PM को P′ तक बढ़ाइए जिससे PM = P′M.

OP′ को मिलाइए।

अब ΔPMO तथा $\Delta P'MO$ में,

OM = OM ...(उभयनिष्ठ)

$\angle PMO = \angle P'MO$ ...(प्रत्येक $= 90^o$)

तथा PM = P′M ...(रचना)

$\therefore$ $\Delta PMO \cong \Delta P'MO$

$\therefore$ $\angle OPM = \angle OP'M = 60^o$

$\therefore$ OPP′ एक समबाहु त्रिभुज है।

$\therefore$ OP = OP′

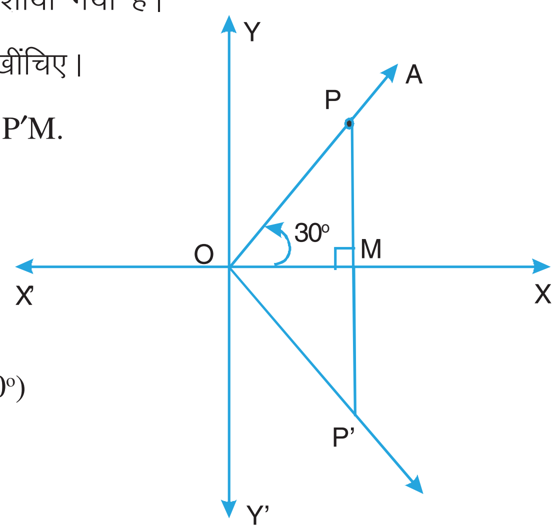
माना PM = a इकाई

PP′ = PM + MP′

= $(a + a)$ इकाई ...($\because$ MP′ = MP)

= $2a$ इकाई

$\therefore$ OP = OP′ = PP′ = $2a$ इकाई



आकृति 23.2

अब समकोण ΔPMO में,

$OP^2 = PM^2 + OM^2$ ...(पाइथागोरस प्रमेय)

या $(2a)^2 = a^2 + OM^2$

$\therefore$ $OM^2 = 3a^2$

या $OM = \sqrt{3}\ a$ इकाई

$$\therefore \quad \sin 30^o = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^o = \frac{OM}{OP} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^o = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{cosec } 30^o = \frac{1}{\sin 30^o} = \frac{1}{1/2} = 2$$

$$\sec 30^o = \frac{1}{\cos 30^o} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

तथा $$\cot 30^o = \frac{1}{\tan 30^o} = \frac{1}{1/\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

23.3 60^0 के कोण के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात

माना एक किरण OA घड़ी की सुई की विपरीत दिशा में घूमती है और x-अक्ष के साथ 60^o का कोण बनाती है।

OA पर कोई बिन्दु P लीजिए। $PM \perp OX$ खींचिए।

OM′ को M′ तब बढ़ाइए जिससे OM = MM′ हो।

PM′ को मिलाइए।

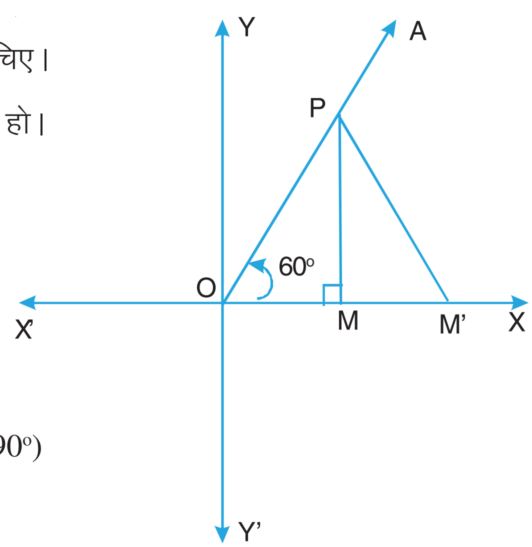
माना $OM = a$ इकाई

ΔPMO तथा $\Delta PMM'$ में,

PM = PM ...(उभयनिष्ट)

$\angle PMO = \angle PMM'$ ...(प्रत्येक $= 90^o$)

OM = MM′ ...(रचना)



आकृति 23.3

$\therefore$ $\Delta PMO \cong \Delta PMM'$

$\therefore$ $\angle POM = \angle PM'M = 60^o$

$\therefore$ $\Delta POM'$ एक समबाहु त्रिभुज है।

$\therefore$ $OP = PM' = OM' = 2a$ इकाई

समकोण ΔPMO में,

$OP^2 = PM^2 + OM^2$ ...(पाइथागोरस प्रमेय)

$\therefore$ $(2a)^2 = PM^2 + a^2$

या $PM^2 = 3a^2$

$\therefore$ $PM = \sqrt{3}\,a$ इकाई

$$\therefore \quad \sin 60^o = \frac{PM}{OP} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^o = \frac{OM}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^o = \frac{PM}{OM} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{cosec} 60^o = \frac{1}{\sin 60^o} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 60^o = \frac{1}{\cos 60^o} = \frac{1}{1/2} = 2$$

तथा $$\cot 60^o = \frac{1}{\tan 60^0} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

23.4 0^0 तथा 90^0 के कोणों के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात

खण्डों 23.1, 23.2 तथा 23.3 में हमने 45^o, 30^o तथा 60^o के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों को परिभाषित किया है। 0^o तथा 90^o के कोणों के लिए हम निम्नलिखित परिणामों को मान लेंगे और उनको तर्क द्वारा सिद्ध करने की चर्चा नहीं करेंगे।

(i) $\sin 0^\circ = 0$ तथा इसलिए $\text{cosec } 0^\circ$ परिभाषित नहीं है।

(ii) $\cos 0^\circ = 1$ तथा इसलिए $\sec 0^\circ = 1$

(iii) $\tan 0^\circ = 0$ तथा इसलिए $\cot 0^\circ$ परिभाषित नहीं है।

(iv) $\sin 90^\circ = 1$ तथा इसलिए $\text{cosec } 90^\circ = 1$

(v) $\cos 90^\circ = 0$ तथा इसलिए $\sec 90^\circ$ परिभाषित नहीं है।

(vi) $\cot 90^\circ = 0$ तथा इसलिए $\tan 90^\circ$ परिभाषित नहीं है।

$0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ तथा 90° के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों को सारणीबद्ध किया जा सकता है, जिससे उनका प्रयोग सरल हो जाता है। निम्न सारणी इन मानों को याद रखने में सहायता करती है।

θ / त्रिकोणमितीय अनुपात	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	$\sqrt{\frac{0}{4}}=0$	$\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{\frac{4}{4}}=1$
$\cos\theta$	$\sqrt{\frac{4}{4}}=1$	$\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{0}{4}}=0$
$\tan\theta$	$\sqrt{\frac{0}{4-0}}=0$	$\sqrt{\frac{1}{4-1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{4-2}}=1$	$\sqrt{\frac{3}{4-3}}=\sqrt{3}$	परिभाषित नहीं
$\cot\theta$	परिभाषित नहीं	$\sqrt{\frac{3}{4-3}}=\sqrt{3}$	$\sqrt{\frac{2}{4-2}}=1$	$\sqrt{\frac{1}{4-1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{0}{4-0}}=0$
$\text{cosec}\,\theta$	परिभाषित नहीं	$\sqrt{\frac{4}{1}}=2$	$\sqrt{\frac{4}{2}}=\sqrt{2}$	$\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{4}{4}}=1$
$\sec\theta$	$\sqrt{\frac{4}{4}}=1$	$\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{4}{2}}=\sqrt{2}$	$\sqrt{\frac{4}{1}}=2$	परिभाषित नहीं

आइए हम कुछ प्रश्न लें जो इन मानों के प्रयोग को दर्शाएँगे।

उदाहरण 23.1: $\tan^2 60^\circ - \sin^2 30^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ तथा $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$$\therefore \quad \tan^2 60^\circ - \sin^2 30^\circ = \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$$

उदाहरण 23.2: $\cot^2 30^\circ \sec^2 45^\circ + \text{cosec}^2 45^\circ \cos 60^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि

$$\cot 30^\circ = \sqrt{3},\ \sec 45^\circ = \sqrt{2},\ \text{cosec}\ 45^\circ = \sqrt{2} \text{ तथा } \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \cot^2 30^\circ \sec^2 45^\circ + \text{cosec}^2 45^\circ \cos 60^\circ$$

$$= \left(\sqrt{3}\right)^2 \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 . \frac{1}{2}$$

$$= 3 \times 2 + 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= 6 + 1$$

$$= 7$$

उदाहरण 23.3: मान ज्ञात कीजिए: $2(\cos^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ) - 6(\sin^2 45^\circ - \tan^2 30^\circ)$

हल: $2(\cos^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ) - 6(\sin^2 45^\circ - \tan^2 30^\circ)$

$$= 2\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2\right] - 6\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + 3\right) - 6\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 1 + 6 - 3 + 2$$

$$= 6$$

उदाहरण 23.4: सत्यापित कीजिए कि

$$\frac{\tan 45^\circ}{\text{cosec}\ 30^\circ} + \frac{\sec 60^\circ}{\cot 45^\circ} - \frac{5 \sin 90^\circ}{2 \cos 0^\circ} = 0$$

हल: बायां पक्ष $= \dfrac{\tan 45^\circ}{\text{cosec}\ 30^\circ} + \dfrac{\sec 60^\circ}{\cot 45^\circ} - \dfrac{5 \sin 90^\circ}{2 \cos 0^\circ}$

$$= \frac{1}{2}+\frac{2}{1}-\frac{5\times 1}{2\times 1}$$

$$= \frac{1}{2}+2-\frac{5}{2} = 0 = \text{दायां पक्ष}$$

अतः, $\dfrac{\tan 45^\circ}{\operatorname{cosec} 30^\circ}+\dfrac{\sec 60^\circ}{\cot 45^\circ}-\dfrac{5\sin 90^\circ}{2\cos 0^\circ}=0$

उदाहरण 23.5: दर्शाइए कि

$$\frac{4}{3}\cot^2 30^\circ + 3\sin^2 60^\circ - 2\operatorname{cosec}^2 60^\circ - \frac{3}{4}\tan^2 30^\circ = \frac{10}{3}$$

हल: बायां पक्ष $= \dfrac{4}{3}\cot^2 30^\circ + 3\sin^2 60^\circ - 2\operatorname{cosec}^2 60^\circ - \dfrac{3}{4}\tan^2 30^\circ$

$$= \frac{4}{3}\times\left(\sqrt{3}\right)^2 + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= \frac{4}{3}\times 3+3\times\frac{3}{4}-2\times\frac{4}{3}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}$$

$$= 4+\frac{9}{4}-\frac{8}{3}-\frac{1}{4}$$

$$= \frac{48+27-32-3}{12}$$

$$= \frac{40}{12}=\frac{10}{3}$$

= दायां पक्ष

अतः, $\dfrac{4}{3}\cot^2 30^\circ + 3\sin^2 60^\circ - 2\operatorname{cosec}^2 60^\circ - \dfrac{3}{4}\tan^2 30^\circ = \dfrac{10}{3}$

उदाहरण 23.6 : सत्यापित कीजिए कि

$$\frac{4\cot^2 60^\circ + \sec^2 30^\circ - 2\sin^2 45^\circ}{\cos^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ} = \frac{4}{3}$$

हल: बायां पक्ष $= \dfrac{4\cot^2 60^\circ + \sec^2 30^\circ - 2\sin^2 45^\circ}{\cos^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ}$

$$= \frac{4.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{4\times\frac{1}{3}+\frac{4}{3}-2\times\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{8}{3}-1}{\frac{5}{4}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{4}}$$

$$= \frac{5}{3}\times\frac{4}{5} = \frac{4}{3}$$

= दायां पक्ष

अतः, $$\frac{4\cot^2 60^o + \sec^2 30^o - 2\sin^2 45^o}{\cos^2 30^o + \cos^2 45^o} = \frac{4}{3}$$

उदाहरण 23.7: यदि $\theta = 30^o$ हो, तो सत्यापित कीजिए

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

हल: $\theta = 30^o$ के लिए,

बायां पक्ष $= \tan 2\theta$

$= \tan(2\times 30^o)$

$= \tan 60^o$

$= \sqrt{3}$

और दायां पक्ष $= \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$= \dfrac{2\tan 30^o}{1-\tan^2 30^o}$

$$= \frac{2.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} = \sqrt{3}$$

$\therefore$ बायां पक्ष = दायां पक्ष

अतः, $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

उदाहरण 23.8: माना $A = 30^\circ$. सत्यापित कीजिए

$$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$$

हल: $A = 30^\circ$ के लिए,

बायां पक्ष $= \sin 3A$

$= \sin(3 \times 30^\circ)$

$= \sin 90^\circ$

$= 1$

तथा दायां पक्ष $= 3\sin A - 4\sin^3 A$

$= 3\sin 30^\circ - 4\sin^3 30^\circ$

$$= 3\times\frac{1}{2} - 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{4}{8}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$$

$= 1$

$\therefore$ बायां पक्ष = दायां पक्ष

अतः, $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$

उदाहरण 23.9: सूत्र $\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ का प्रयोग करके $\sin 15^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है $\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ ...(i)

मान लीजिए $A = 45^\circ$ और $B = 30^\circ$ है।

$\therefore$ (i) से,

$$\sin (45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

या
$$\sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

अतः, $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$ है।

टिप्पणी: उपरोक्त उदाहरण में, हम $A = 60^\circ$ तथा $B = 45^\circ$ भी ले सकते हैं।

उदाहरण 23.10: यदि $\sin (A + B) = 1$ तथा $\cos (A - B) = 1$, $0^\circ < A + B \le 90^\circ$, $A \ge B$ हो, तो A तथा B के मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\because$ $\sin (A + B) = 1 = \sin 90^\circ$

$\therefore$ $A + B = 90^\circ$ ...(i)

पुनः $\cos (A - B) = 1 = \cos 0^\circ$

$\therefore$ $A - B = 0^\circ$ ...(ii)

(i) तथा (ii) को जोड़ने पर,

$$2A = 90^\circ \text{ or } A = 45^\circ$$

(ii) से,

$$B = A = 45^\circ$$

अतः, $A = 45^\circ$ तथा $B = 45^\circ$

उदाहरण 23.11: यदि $\cos(20^\circ + x) = \sin 30^\circ$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\cos(20^\circ + x) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$ $\quad \ldots\left(\because \cos 60^\circ = \frac{1}{2}\right)$

$\therefore\ 20^\circ + x = 60^\circ$

या $\quad x = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$

अतः, $\quad x = 40^\circ$

उदाहरण 23.12: ΔABC, शीर्ष B पर समकोणिक है। यदि $BC = 5$ सेमी, $\angle BAC = 30^\circ$ हो, तो भुजाओं AB तथा AC की लम्बाइयाँ ज्ञात कीजिए।

हल: हमें दिया गया है: $\angle BAC = 30^\circ$ i.e., $\angle A = 30^\circ$

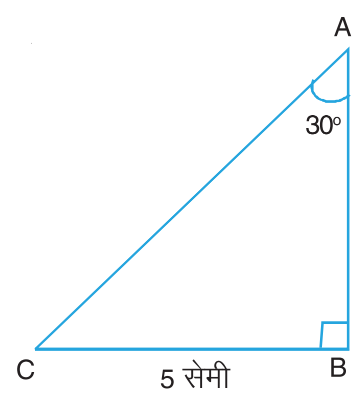
तथा $BC = 5$ सेमी

अब $\quad \sin A = \frac{BC}{AC}$

या $\quad \sin 30^\circ = \frac{5}{AC}$

या $\quad \frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$

$\therefore\ AC = 2 \times 5$ या 10 सेमी



आकृति 23.4

पाइथागोरस प्रमेय द्वारा,

$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$

$= \sqrt{(10)^2 - 5^2}$ सेमी

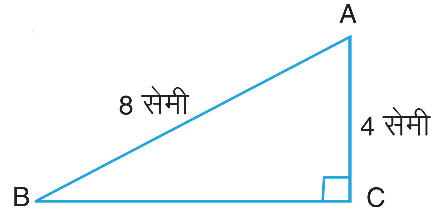
$= \sqrt{75}$ सेमी

$= 5\sqrt{3}$ सेमी

अतः, $AC = 10$ सेमी तथा $AB = 5\sqrt{3}$ सेमी है।

उदाहरण 23.13: ΔABC में, कोण C एक समकोण है, $AC = 4$ सेमी तथा $AB = 8$ सेमी है। $\angle A$ तथा $\angle B$ ज्ञात कीजिए।

हल: हमें दिया गया है: $AC = 4$ सेमी तथा $AB = 8$ सेमी



आकृति 23.5

अब $\sin B = \dfrac{AC}{AB}$

$= \dfrac{4}{8}$ अथवा $\dfrac{1}{2}$

$\therefore \angle B = 30^o$ $\quad \ldots\left[\because \sin 30^o = \dfrac{1}{2}\right]$

अब $\angle A = 90^o - \angle B$ $\quad \ldots.[\because \angle A + \angle B = 90^o]$

$= 90^o - 30^o$

$= 60^o$

अतः, $\angle A = 60^o$ तथा $\angle B = 30^o$

उदाहरण 23.14: शीर्ष B पर ΔABC समकोण त्रिभुज है। यदि $\angle A = \angle C$ हो, तो निम्न के मान ज्ञात कीजिएः

(i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$

(ii) $\sin A \sin B + \cos A \cos B$

हल: हमें दिया गया है कि ΔABC में,

$\angle B = 90^o$

$\therefore \quad \angle A + \angle C = 180^o - 90^o$ $\quad \ldots(\because \angle A + \angle B + \angle C = 180^o)$

$= 90^o$

तथा हमें यह भी दिया गया है कि $\angle A = \angle C$

$\therefore \quad \angle A = \angle C = 45^o$

(i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$

$= \sin 45^o \cos 45^o + \cos 45^o \sin 45^o$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$

(ii) $\sin A \sin B + \cos A \cos B$

$= \sin 45^o \sin 90^o + \cos 45^o \cos 90^o$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

उदाहरण 23.15: यदि $\tan 2x - \sqrt{3} = 0$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल: हमें दिया गया है कि

$$\tan 2x - \sqrt{3} = 0$$

या $\quad \tan 2x = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$

$$\therefore\ 2x = 60^\circ$$

या $x = 30^\circ$

अतः x का मान 30° है।

देखें आपने कितना सीखा 23.1

1. निम्नलिखित में प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए:

   (i) $\sin^2 60^\circ + \cos^2 45^\circ$

   (ii) $2\sin^2 30^\circ - 2\cos^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ$

   (iii) $4\sin^2 60^\circ + 3\tan^2 30^\circ - 8\sin^2 45^\circ \cos 45^\circ$

   (iv) $4(\sin^4 30^\circ + \cos^4 60^\circ) - 3(\cos^2 45^\circ - 2\sin^2 45^\circ)$

   (v) $\dfrac{\tan 45^\circ}{\operatorname{cosec} 30^\circ} + \dfrac{\sec 60^\circ}{\cot 45^\circ} - \dfrac{5\sin 90^\circ}{2\cos 0^\circ}$

   (vi) $\dfrac{5\cos^2 60^\circ + 4\sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$

2. निम्नलिखित में प्रत्येक को सत्यापित कीजिए:

   (i) $\operatorname{cosec}^3 30^\circ \times \cos 60^\circ \times \tan^3 45^\circ \times \sin^2 90^\circ \times \sec^2 45^\circ \times \cot 30^\circ = 8\sqrt{3}$

   (ii) $\tan^2 30^\circ + \dfrac{1}{2}\sin^2 45^\circ + \dfrac{1}{3}\cos^2 30^\circ + \cot^2 60^\circ = \dfrac{7}{6}$

(iii) $\cos^2 60^o - \sin^2 60^o = -\cos 60^o$

(iv) $4(\sin^4 30^o + \cos^4 60^o) - 3(\cos^2 45^o - \sin^2 90^o) = 2$

(v) $\dfrac{\tan 60^o - \tan 30^o}{1 + \tan 60^o \tan 30^o} = \tan 30^o$

3. यदि $\angle A = 30^o$ हो, तो निम्नलिखित में से प्रत्येक को सत्यापित कीजिए:

(i) $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$

(ii) $\cos 2A = \dfrac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$

(iii) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

4. यदि $A = 60^o$ तथा $B = 30^o$ हो, तो निम्नलिखित में से प्रत्येक को सत्यापित कीजिए:

(i) $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

(ii) $\tan(A - B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

5. $2A = 60^o$ लेकर, $\sin 30^o$ तथा $\cos 30^o$ के मान ज्ञात कीजिए, जबकि दिया गया है $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ ।

6. सूत्र $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ लेकर $\cos 75^o$ का मान ज्ञात कीजिए।

7. यदि $\sin(A - B) = \dfrac{1}{2}$, $\cos(A + B) = \dfrac{1}{2}$, $0^o < A + B < 90^o$, $A > B$ हो, तो A तथा B ज्ञात कीजिए।

8. यदि $\sin(A + 2B) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ तथा $\cos(A + 4B) = 0$ हो, तो A तथा B ज्ञात कीजिए।

9. शीर्ष Q पर समकोणिक त्रिभुज ΔPQR में, $PQ = 5$ सेमी तथा $\angle R = 30^o$ है। QR तथा PR ज्ञात कीजिए।

10. ΔABC में, $\angle B = 90^o$, $AB = 6$ सेमी तथा $AC = 12$ सेमी है। $\angle A$ तथा $\angle C$ ज्ञात कीजिए।

11. ΔABC में, $\angle B = 90^o$ है। यदि $A = 30^o$ हो, तो $\sin A \cos B + \cos A \sin B$ का मान ज्ञात कीजिए।

12. यदि $\cos(40^o + 2x) = \sin 30^o$ हो, तो x ज्ञात कीजिए।

टिप्पणी

निम्नलिखित में प्रत्येक के लिए सही विकल्प चुनिये (13-15):

13. sec 30^o का मान है

(A) 2 (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{2}$

14. यदि $\sin 2A = 2 \sin A$ है, तब A का मान है

(A) 30^o (B) 0^o (C) 60^o (D) 90^o

15. $\frac{2 \tan 60^o}{1 + \tan^2 60^o}$ बराबर है

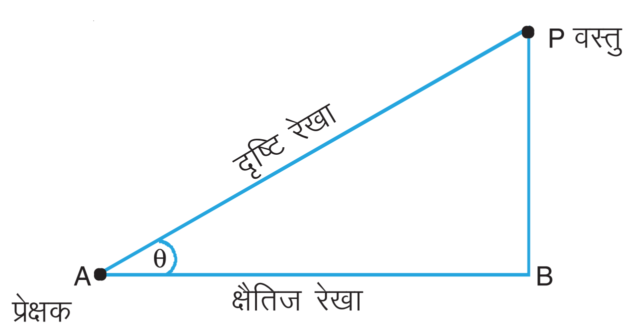
(A) $\sin 60^o$ (B) $\sin 30^o$ (C) $\cos 60^o$ (D) $\tan 60^o$

23.5 त्रिकोणमिति के अनुप्रयोग

अब तक हमने एक कोण के त्रिकोणमितीय अनुपातों को परिभाषित करना सीखा है। हमने 30^o, 45^o तथा 60^o के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों का मान ज्ञात करना भी सीखा है। हम 0^o तथा 90^o के कोणों के उन त्रिकोणमितीय अनुपातों को भी जानते हैं जो अच्छी प्रकार से परिभाषित हैं। इस खण्ड में हम त्रिकोणमिति का प्रयोग दो वस्तुओं के बीच की दूरी या वस्तुओं की ऊँचाई ज्ञात करने में, करना सीखेंगे। हम दैनिक दिनचर्या से प्रश्न लेंगे। सबसे पहले हम कुछ विशेष शब्दों को परिभाषित करेगे जिनकी हमें ऊँचाइयों और दूरियों के अध्ययन करने के लिए आवश्यकता पड़ेगी।

23.5.1 उन्नयन कोण

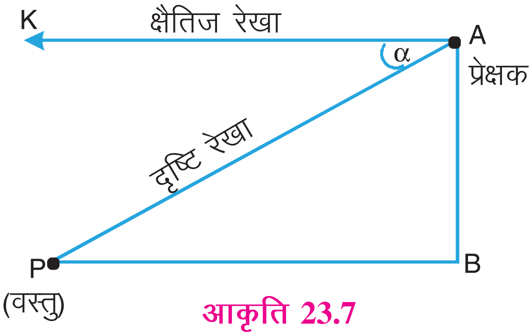
यदि प्रेक्षक, एक वस्तु P जो प्रेक्षक A से अधिक ऊँचाई पर है, को देखता है, तो उस वस्तु को देखने के लिए अपनी आंखों को ऊपर उठाना होगा तथा प्रेक्षक की आँख को वस्तु से मिलाने वाली दृष्टि रेखा (line of sight) तथा क्षैतिज रेखा के बीच जो कोण बनता है, उन्नयन कोण कहलाता है। आकृति 23.6 में, A प्रेक्षक है, P वस्तु है, AP दृष्टि रेखा तथा AB क्षैतिज रेखा है। $\angle\theta$ उन्नयन कोण है।



आकृति 23.6

23.5.2 अवनमन कोण

जब प्रेक्षक A जो अधिक ऊँचाई पर है, वस्तु P (जो कम ऊँचाई पर है) को देखता है तो दृष्टि रेखा और क्षैतिज रेखा के बीच बनने वाला कोण अवनमन कोण कहलाता है। आकृति 23.7 में, AP दृष्टि रेखा तथा AK क्षैतिज रेखा है। यहाँ α अवनमन कोण है।



आकृति 23.7

उदाहरण 23.16: एक सीढ़ी एक मकान की खिड़की पर लगी हुई है तथा यह भूमि के साथ 60° का कोण बनाती है। यदि सीढ़ी की लम्बाई 6 मीटर हो, तो सीढ़ी के पाद की दीवार से दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: माना AC सीढ़ी है, जो दीवार AB के साथ लगी है। यह समतल भूमि BC के साथ 60° का कोण बनाती है।

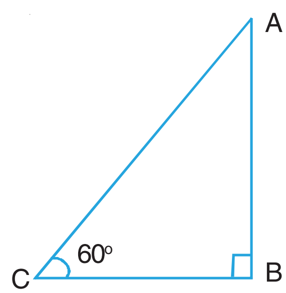
यहाँ AC = 6 मी ...(दिया है)

अब, समकोण ΔABC में,

$$\frac{BC}{AC} = \cos 60^\circ$$

या $$\frac{BC}{6} = \frac{1}{2}$$

या $$BC = \frac{1}{2} \times 6 \text{ या } 3 \text{ मी}$$



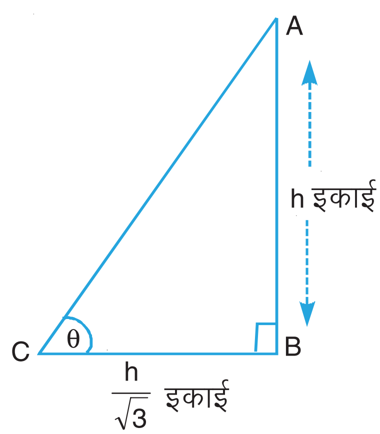
आकृति 23.8

अतः सीढ़ी का पाद, दीवार से 3 मीटर की दूरी पर है।

उदाहरण 23.17: एक उर्ध्वाधर खंभे की छाया इसकी ऊँचाई की $\frac{1}{\sqrt{3}}$ है। सूर्य का उन्नतांश ज्ञात कीजिए।

हल: माना AB एक ऊर्ध्वाधर खंभा है जिसकी ऊँचाई h इकाई तथा इसकी छाया BC है।

तब, $BC = h \times \frac{1}{\sqrt{3}}$ इकाई



आकृति 23.9

माना सूर्य का उन्नतांश θ है।

तब समकोण ΔABC में,

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{h}{h/\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

या $\tan\theta = \tan 60^\circ$

∴ $\theta = 60^\circ$

अतः सूर्य का उन्नतांश 60° है।

उदाहरण 23.18: एक मीनार भूमि पर सीधी खड़ी है। मीनार के पाद से 30 मीटर की दूरी पर स्थित एक बिंदु से मीनार का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। ($\sqrt{3}$ = 1.73 लीजिए।)

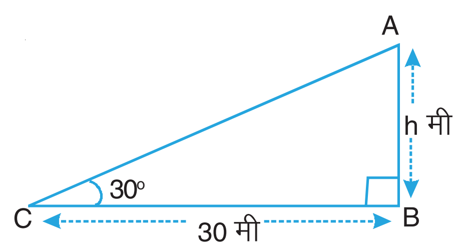
हल: माना मीनार AB की ऊँचाई h मीटर है।

माना भूमि पर बिन्दु C मीनार के पाद B से 30 मीटर की दूरी पर है।

∴ BC = 30 मी

प्रश्न द्वारा, $\angle ACB = 30^\circ$

समकोण ΔABC में,



आकृति 23.10

$$\frac{AB}{BC} = \tan 30^\circ$$

या $$\frac{h}{30} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

∴ $$h = \frac{30}{\sqrt{3}} \text{ मी}$$

$$= \frac{30}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \text{ मी}$$

$$= 10\sqrt{3} \text{ मी}$$

$$= 10 \times 1.73 \text{ मी}$$

$$= 17.3 \text{ मी}$$

अतः मीनार की ऊँचाई 17.3 मीटर है।

उदाहरण 23.19: एक गुब्बारा मौसम विभाग के भूतल स्टेशन से एक केबल द्वारा जुड़ा हुआ है। केबल की लम्बाई 100 मीटर है तथा यह क्षैतिज के साथ 60^o पर झुका हुआ है। जमीन से गुब्बारे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना A गुब्बारे की स्थिति है जो 100 मीटर लम्बे केबल AC से बंधा है। AC भूमितल BC के साथ 60^o का कोण बनाता है।

माना गुब्बारे की ऊँचाई AB = h मी

समकोण ΔABC में,

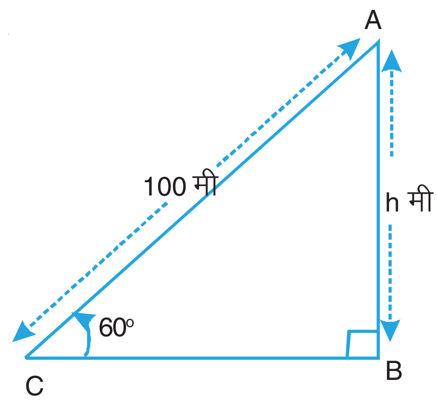
$$\frac{AB}{AC} = \sin 60^o$$

या $$\frac{h}{100} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

या $$h = 50\sqrt{3}$$

$$= 50 \times 1.732$$

$$= 86.6$$



आकृति 23.11

अतः गुब्बारे की ऊँचाई = 86.6 मीटर

उदाहरण 23.20: आँधी द्वारा, दो भागों में टूटे हुए पेड़ का ऊपरी भाग भूमि से 30^o का कोण बनाता है। पेड़ का ऊपरी छोर, जिस जगह पर भूमि को छूता है वह जगह पेड़ के पाद से 10 मीटर की दूरी पर है। पेड़ की कुल ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना AB पेड़ है जो C पर आँधी से टूट गया है तथा शिखर A भूमि पर बिन्दु D पर स्पर्श करता है तथा BD के साथ 30^o का कोण बनाता है तथा BD= 10 मी है।

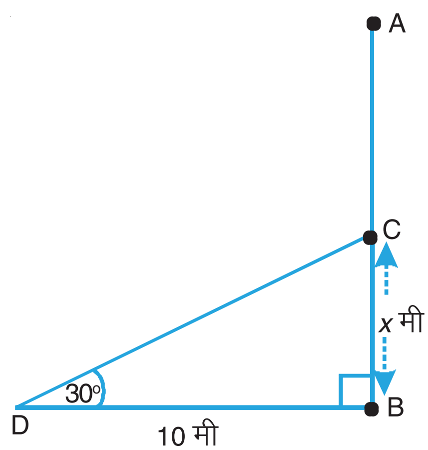
माना BC = x मी

समकोण ΔCBD में,

$$\frac{BC}{BD} = \tan 30^o$$

या $$\frac{x}{10} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

या $$x = \frac{10}{\sqrt{3}} \text{ मी} \qquad ...(i)$$



आकृति 23.12

टिप्पणी

पुनः समकोण ΔCBD में,

$$\frac{BC}{DC} = \sin 30^o$$

या $$\frac{x}{DC} = \frac{1}{2}$$

या $DC = 2x$

$$= \frac{20}{\sqrt{3}} \text{ मी} \qquad \text{...[(i) से]}$$

$$\therefore \quad AC = DC = \frac{20}{\sqrt{3}} \qquad \text{...(ii)}$$

अब, पेड़ की ऊँचाई $= BC + AC$

$$= \left(\frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{20}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{30}{\sqrt{3}} \text{ या } 10\sqrt{3} \text{ मी}$$

$= 17.32$ मी

अतः, पेड़ की ऊँचाई $= 17.32$ मी है।

उदाहरण 23.21: सूर्य का उन्नयन कोण 60^o से 45^o होने पर एक मीनार की छाया 10 मीटर बढ़ जाती है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना मीनार AB की ऊँचाई h मीटर है तथा C और D वह दो बिन्दु हैं, जहाँ पर उन्नयन कोण क्रमशः 45^o और 60^o हैं।

तब $CD = 10$ मी, $\angle ACB = 45^o$ और $\angle ADB = 60^o$

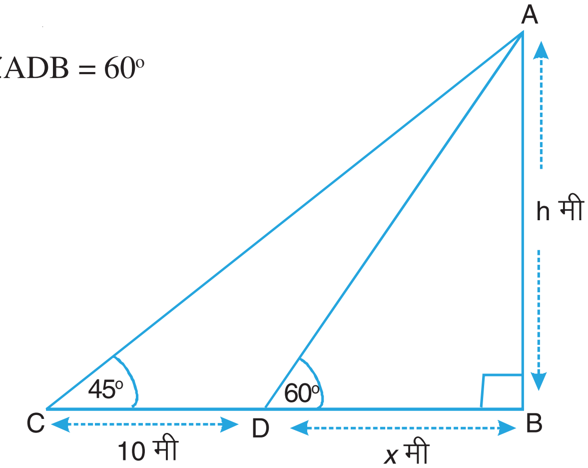
माना $BD = x$ मी

तब $BC = BD + CD = (x + 10)$ मी

अब समकोण ΔABC में,

$$\frac{AB}{BC} = \tan 45^o$$

या $$\frac{h}{x+10} = 1$$



आकृति 23.13

$\therefore \quad x = (h - 10)$ मी ...(i)

पुनः समकोण ΔABD में,

$$\frac{AB}{BD} = \tan 60^\circ$$

या $\quad \dfrac{h}{x} = \sqrt{3}$

या $\quad h = \sqrt{3}\, x \qquad$ ...(ii)

(i) और (ii) से,

$$h = \sqrt{3}\,(h - 10)$$

या $\quad h = \sqrt{3}\, h - 10\sqrt{3}$

या $\quad (\sqrt{3} - 1)h = 10\sqrt{3}$

$\therefore \quad h = \dfrac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$

$$= \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \times \frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)} = \frac{10\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$= 5\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) = 15 + 5 \times 1.732 = 15 + 8.66 = 23.66$$

अतः मीनार की ऊँचाई 23.66 मीटर है।

उदाहरण 23.22: एक वायुयान जब 3000 मीटर की ऊँचाई पर होता है तो वह एक अन्य वायुयान के ऊपर से गुजरता है तथा उस समय वे भूमि के एक बिंदु से 60° तथा 45° के कोण बनाते हैं। दोनों वायुयानों के बीच की लंबवत दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: माना O प्रेक्षण बिन्दु है।

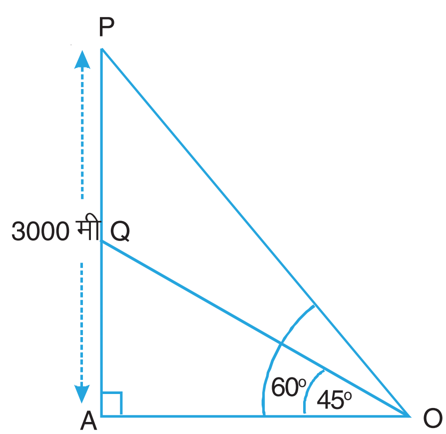
माना P और Q दोनों वायुयान हैं।

तब $\quad AP = 3000$ मी और $\angle AOQ = 45^\circ$

और $\angle AOP = 60^\circ$

समकोण ΔQAO में,

$$\frac{AQ}{AO} = \tan 45^\circ = 1$$



आकृति 23.14

या $\quad AQ = AO \quad$ ...(i)

पुनः समकोण ΔPAO में,

$$\frac{PA}{AO} = \tan 60^{o} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \frac{3000}{AO} = \sqrt{3} \text{ or } AO = \frac{3000}{\sqrt{3}} \quad \text{...(ii)}$$

(i) और (ii) से,

$$AQ = \frac{3000}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1000\sqrt{3} = 1732 \text{ मी}$$

$\therefore \quad PQ = AP - AQ = (3000 - 1732)$ मी $= 1268$ मी

अतः, अभीष्ट दूरी = 1268 मी है।

उदाहरण 23.23: एक मीनार के पाद से एक भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30^0 है तथा भवन के पाद से मीनार के शिखन का उन्नयन कोण 60^0 है। यदि मीनार की ऊँचाई 50 मीटर हो, तो भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

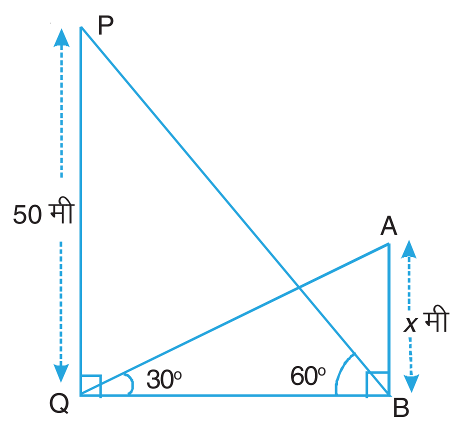
हल: माना मीनार PQ की ऊँचाई 50 मी है तथा भवन AB की ऊँचाई x मीटर है।

तब $\angle AQB = 30^{o}$ तथा $\angle PBQ = 60^{o}$

समकोण ΔABQ में, $\frac{x}{BQ} = \tan 30^{o}$ ...(i)

तथा समकोण ΔPQB में, $\frac{PQ}{BQ} = \tan 60^{o}$

या $\quad \frac{50}{BQ} = \tan 60^{o}$ ...(ii)



आकृति 23.15

(i) को (ii) से भाग देने पर,

$$\frac{x}{50} = \frac{\tan 30^{o}}{\tan 60^{o}} = \frac{1}{3}$$

या $\quad x = \frac{50}{3} = 16.67$

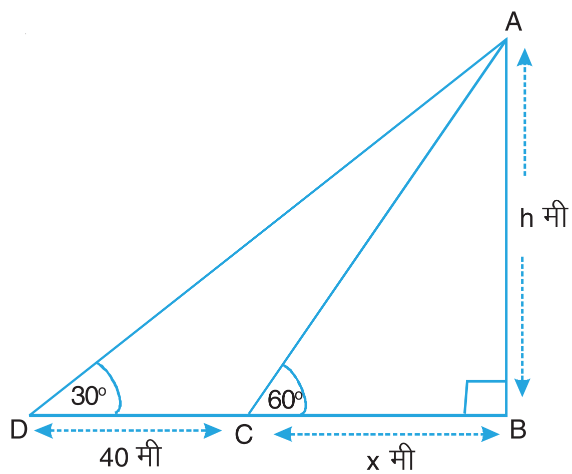
अतः भवन की ऊँचाई = 16.67 मीटर

उदाहरण 23.24: एक व्यक्ति नदी के एक किनारे पर खड़ा होकर दूसरे किनारे पर लगे पेड़ के शिखर का उन्नयन कोण 60° पाता है। जब वह 40 मीटर पीछे हट जाता है, तो कोण 30° हो जाता है। पेड़ की ऊँचाई और नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना पेड़ AB की ऊँचाई h मीटर है।

माना BC = x मी, नदी की चौड़ाई को दर्शाता है।

मान C तथा D वह बिन्दु हैं जहाँ पर उन्नयन कोण क्रमशः 60° तथा 30° हैं।



आकृति 23.16

समकोण ΔABC में,

$$\frac{AB}{BC} = \tan 60^\circ$$

या $$\frac{h}{x} = \sqrt{3}$$

या $$h = \sqrt{3}\,x \quad \text{...(i)}$$

पुनः समकोण ΔABD में,

$$\frac{AB}{BD} = \tan 30^\circ$$

या $$\frac{h}{x+40} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{...(ii)}$$

(i) तथा (ii) से

$$\frac{\sqrt{3}x}{x+40} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

या $3x = x + 40$

या $2x = 40$

$\therefore$ $x = 20$

$\therefore$ (i) से,

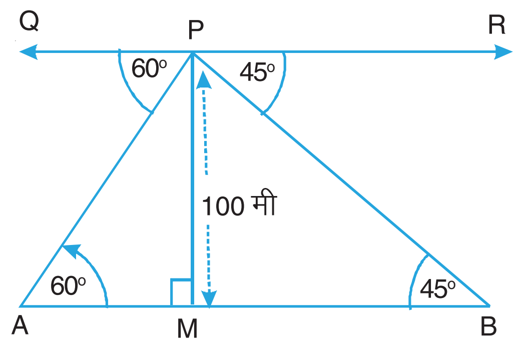
$$h = \sqrt{3} \times 20 = 20 \times 1.732$$

$$= 34.64$$

अतः, नदी की चौड़ाई = 20 मी तथा पेड़ की ऊँचाई = 34.64 मी

उदाहरण 23.25: 100 मीटर ऊँची मीनार के ऊपर खड़ी होकर स्वाति, मीनार की विपरीत दिशाओं में खड़ी दो कारों को देखती है। यदि उनके अवनमन कोण 45^0 तथा 60^0 हों, तो कारों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: माना मीनार PM की ऊचाई 100 मी है। माना A तथा B दोनों कारों की स्थितियाँ हैं। माना कार A के लिए अवनमन कोण 60^o तथा कार B के लिए 45^o है।



आकृति 23.17

अब $\angle QPA = 60^o = \angle PAB$

तथा $\angle RPB = 45^o = \angle PBA$

समकोण ΔPMB में,

$$\frac{PM}{MB} = \tan 45^o$$

या $$\frac{100}{MB} = 1$$

या $MB = 100$ मी ...(i)

पुनः समकोण ΔPMA में,

$$\frac{PM}{MA} = \tan 60^o$$

या $$\frac{100}{MA} = \sqrt{3}$$

$\therefore$ $$MA = \frac{100}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{100\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{100 \times 1.732}{3}$$

$$= 57.74$$

$\therefore$ $MA = 57.74$ मी ...(ii)

अतः दोनों कारों की बीच की दूरी $= MA + MB$

$= (57.74 + 100)$ मी [(i) और (ii) से]

$= 157.74$ मी

उदाहरण 23.26: समान ऊँचाई के दो स्तंभ 100 मीटर चौड़ी सड़क के दोनो ओर लगे हैं। सड़क पर स्तभों के बीच स्थित एक बिन्दु से दोनों स्तम्भों के उन्नयन कोण क्रमशः 60^0 तथा 30^0 हैं। स्तंभों के बीच बिंदु की स्थिति तथा प्रत्येक स्तंभ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

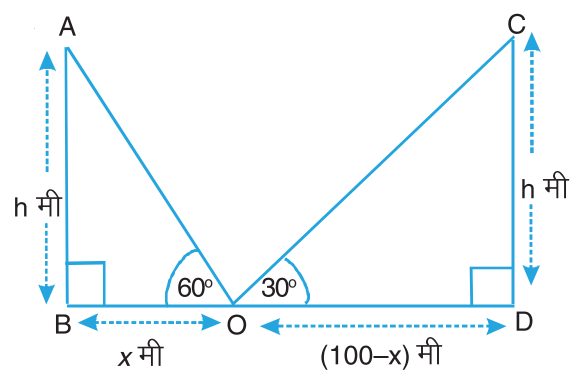
हल: माना AB और CD दो स्तम्भ हैं तथा प्रत्येक की ऊँचाई h मीटर है। माना सड़क पर कोई बिन्दु O है।

माना BO = x मी है। तब,

$$OD = (100 - x) \text{ मी}$$

प्रश्न द्वारा, $\angle AOB = 60^o$ और $\angle COD = 30^o$

समकोण ΔABO में,



आकृति 23.18

$$\frac{AB}{BO} = \tan 60^o$$

या $$\frac{h}{x} = \sqrt{3}$$

या $$h = \sqrt{3}\, x \qquad ...(i)$$

समकोण ΔCDO में,

$$\frac{CD}{OD} = \tan 30^o$$

या $$\frac{h}{100 - x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad ...(ii)$$

(i) तथा (ii) से,

$$\frac{\sqrt{3}x}{100 - x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

या $$3x = 100 - x$$

या $$4x = 100$$

$\therefore$ $$x = 25$$

$\therefore$ (i) से, $h = \sqrt{3} \times 25 = 1.732 \times 25$ या 43.3

$\therefore$ अभीष्ट बिन्दु एक स्तम्भ से 25 मीटर तथा दूसरे से 75 मी की दूरी पर है।

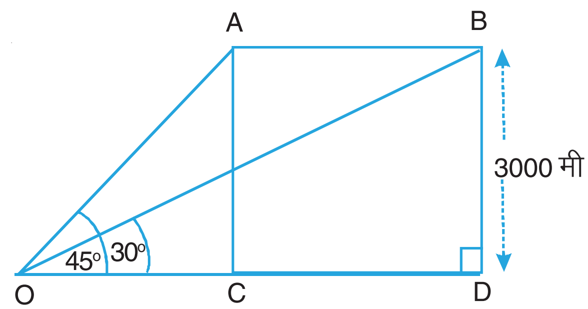
प्रत्येक स्तंभ की ऊँचाई 43.3 मी है।

उदाहरण 23.27: भूमि के किसी बिन्दु से एक वायुयान का उन्नयन कोण 45^0 है। 15 सेकन्ड की उड़ान के बाद उन्नयन कोण 30^0 हो जाता है। यदि वायुयान 3000 मीटर की अचर ऊँचाई पर उड़ रहा हो, तो वायुयान की चाल ज्ञात कीजिए।

हल: माना वायुयान की दोनों स्थितियां A और B हैं तथा O प्रेक्षण बिन्दु है। माना OCD क्षैतिज रेखा है।

तब $\angle AOC = 45^o$ तथा $\angle BOD = 30^o$

प्रश्न द्वारा, AC = BD = 3000 मी



आकृति 23.19

समकोण ΔACO में,

$$\frac{AC}{OC} = \tan 45^o$$

या $$\frac{3000}{OC} = 1$$

या OC = 3000 मी ...(i)

समकोण ΔBDO में,

$$\frac{BD}{OD} = \tan 30^o$$

या $$\frac{3000}{OC + CD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

या $3000\sqrt{3} = 3000 + CD$ ...[(i) से]

या CD $= 3000(\sqrt{3} - 1)$

$= 3000 \times 0.732$

$= 2196$ मी

$\therefore$ 15 सेकण्ड में वायुयान द्वारा तय की गयी दूरी = AB = CD = 2196 m

$\therefore$ वायुयान की चाल $= \left(\frac{2196}{15} \times \frac{60 \times 60}{1000}\right)$ किमी / घन्टा

$= 527.04$ किमी / घन्टा

उदाहरण 23.28: किसी मीनार के आधार से a और b की दूरियों पर एक ही रेखा में क्रमशः स्थित दो बिंदुओं P तथा Q से देखने पर मीनार के ऊपरी सिरे के उन्नयन कोण पूरक पाए जाते हैं। सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई $\sqrt{ab}$ है।

हल: माना मीनार AB की ऊँचाई h है। P और Q दिए हुए बिन्दु हैं। साथ ही, PB = a तथा QB = b है।

माना $\angle APB = \alpha$ तथा $\angle AQB = 90^\circ - \alpha$

समकोण ΔABQ में,

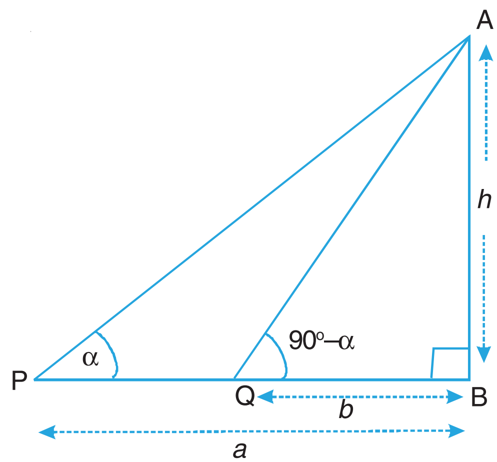
$$\frac{AB}{QB} = \tan(90^\circ - \alpha)$$

या $$\frac{h}{b} = \cot\alpha \qquad \text{...(i)}$$

समकोण ΔABP में,

$$\frac{AB}{PB} = \tan\alpha$$

या $$\frac{h}{a} = \tan\alpha \qquad \text{...(ii)}$$



आकृति 23.20

(i) और (ii) को गुणा करने पर,

$$\frac{h}{b} \times \frac{h}{a} = \cot\alpha \,.\, \tan\alpha = 1$$

या $h^2 = ab$

या $h = \sqrt{ab}$

अतः, मीनार की ऊँचाई = $\sqrt{ab}$ है।

देखें आपने कितना सीखा 23.2

1. एक लम्बवत दीवार पर झुकी हुई सीढ़ी भूमि के साथ 60^0 का कोण बनाती है। सीढ़ी का पाद बिन्दु दीवार से 3 मीटर की दूरी पर है। सीढ़ी की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

2. एक मीनार के आधार से 50 मी की दूरी के एक बिन्दु से, एक व्यक्ति मीनार के शीर्ष बिन्दु का उन्नयन कोण 60^0 मापता है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

3. एक मीनार के आधार से 150 मी की दूरी पर स्थित एक बिन्दु से, मीनार के शीर्ष बिन्दु का उन्नयन कोण 30^0 है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

4. एक पतंग से बंधा हुआ धागा 100 मीटर लम्बा है। यह क्षैतिज तल के साथ 60^0 का कोण बनाता है। यह मानते हुए कि धागे में कोई ढील नहीं है, पतंग की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

5. एक पतंग क्षैतिज तल से 100 मीटर ऊँचाई पर उड़ रही है। यदि क्षैतिज तल के किसी बिन्दु पर पतंग का धागा 60^0 का कोण बनाता है, तो यह मानते हुए कि धागे में कोई ढील नहीं है, धागे की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

6. एक मीनार के पाद से 100 मीटर की दूरी पर भूमि तल पर स्थित एक बिन्दु से मीनार की चोटी का उन्नयन कोण ज्ञात कीजिए, जबकि मीनार की ऊँचाई $100\sqrt{3}$ मीटर है।

7. एक उर्ध्वाधर पेड़ 12 मीटर ऊँचा है। यह हवा के झोंके से टूट गया है। इसका ऊपरी सिरा जमीन को छूते हुए 60^0 का कोण बनाता है। जहाँ से पेड़ टूटा है, उस स्थान की भूमि से ऊँचाई क्या है?

8. एक वृक्ष हवा से इस प्रकार टूटता है कि वह भूमि को अपने पाद से 10 मीटर की दूरी पर स्पर्श करता है तथा भूमि के साथ 45^0 का कोण बनाता है। वृक्ष की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

9. किसी एक बिन्दु पर एक मीनार का उन्नयन कोण 45^0 है। मीनार के पाद बिन्दु की ओर 40 मीटर जाने पर उन्नयन कोण 60^0 हो जाता है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

10. दो व्यक्ति एक 80 मीटर ऊँची चट्टान के दोनों ओर खड़े होकर, चट्टान के शिखर के उन्नयन कोण 30^0 और 60^0 के पाते हैं। दोनों व्यक्तियों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

11. 60 मीटर ऊँचे एक भवन के शीर्ष बिन्दु से, एक मीनार के शीर्ष एवं पाद बिन्दु के अवनमन कोण क्रमशः 45^0 तथा 60^0 हैं। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

12. एक 4 मीटर लम्बी सीढ़ी क्षैतिज तल से 30^0 का कोण बनाती है जब यह एक कमरे की खिड़की से लगी हुई है। सीढ़ी का पाद बिन्दु, क्षैतिज तल के उसी बिन्दु पर स्थिर रखा जाता है तथा सीढ़ी के विपरीत दिशा में स्थित कमरे की खिड़की से लगाने पर, यह भूमि तल के साथ 60^0 का कोण बनाती है। कमरों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

13. एक भवन की पहली मंजिल के ऊपरी सिरे का उसके पाद से 15 मीटर की दूरी पर स्थित एक बिंदु से उन्नयन कोण 30^0 है। यदि उसी बिन्दु से दूसरी मंजिल के ऊपरी सिरे का उन्नयन कोण 45^0 हो, तो दूसरी मंजिल की ऊँचाई क्या होगी?

14. एक वायुयान भूमि से 1 किलोमीटर की ऊँचाई पर उड़ रहा है और प्रेक्षक के साथ 60^0 का कोण बनाता है। 10 सेकन्ड के बाद प्रेक्षक के साथ यह कोण 30^0 हो जाता है। वायुयान की चाल किमी/घंटा में ज्ञात कीजिए।

15. एक मीनार के पाद से एक भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30^0 है तथा भवन के पाद से

मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60^0 हैं। यदि मीनार की ऊँचाई 50 मीटर हो, तो भवन की ऊचाई ज्ञात कीजिए।

आइए दोहराएँ

- त्रिकोणमितीय अनुपातों के मानों की सारणी

θ / त्रिकोणमितीय अनुपात	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	परिभाषित नहीं
$\cot\theta$	परिभाषित नहीं	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{cosec}\theta$	परिभाषित नहीं	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	परिभाषित नहीं

सहायक वेबसाइट:

- http://www.wikipedia.org
- http://mathworld:wolfram.com

आइए अभ्यास करें

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए:

   (i) $4\cos^2 60^o + 4\sin^2 45^o - \sin^2 30^o$

(ii) $\sin^2 45^\circ - \tan^2 45^\circ + 3(\sin^2 90^\circ + \tan^2 30^\circ)$

(iii) $\dfrac{5\sin^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ - 4\tan^2 30^\circ}{2\sin^2 30^\circ \cos^2 30^\circ + \tan 45^\circ}$

(iv) $\dfrac{\cot 45^\circ}{\sec 30^\circ + \text{cosec}\, 30^\circ}$

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक को सिद्ध कीजिए:

(i) $2\cot^2 30^\circ - 2\cos^2 60^\circ - \dfrac{3}{4}\sin^2 45^\circ - 4\sec^2 30^\circ = -\dfrac{5}{24}$

(ii) $2\sin^2 30^\circ + 2\tan^2 60^\circ - 5\cos^2 45^\circ = 4$

(iii) $\cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

(iv) $\dfrac{\cot 30^\circ \cot 60^\circ - 1}{\cot 30^\circ + \cot 60^\circ} = \cot 90^\circ$

3. यदि $\theta = 30^\circ$ हो, तो सत्यापित कीजिए:

(i) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

(ii) $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

(iii) $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

4. यदि $A = 60^\circ$ तथा $B = 30^\circ$ हो, तो सत्यापित कीजिए:

(i) $\sin(A+B) \neq \sin A + \sin B$

(ii) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

(iii) $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

(iv) $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

(v) $\tan A = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A}$

5. सूत्र $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$ का प्रयोग करके $\cos 15^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. यदि $\sin(A+B) = 1$ तथा $\cos(A-B) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $0^\circ < A+B \le 90^\circ$, $A > B$ हो, तो A तथा B ज्ञात कीजिए।

7. एक प्रेक्षक एक भवन से 40 मीटर की दूरी पर खड़ा यह देखता है कि एक झंडे के, जो कि भवन पर लगा हुआ है, शीर्ष और पाद बिन्दुओं के उन्नयन कोण क्रमशः 60° तथा 45° हैं। भवन की ऊँचाई और झंडे की लंबाई ज्ञात कीजिए।

8. एक पहाड़ी की चोटी से, पूर्व दिशा की ओर लगे हुए दो क्रमिक किलोमीटर के पत्थरों के अवनमन कोण क्रमशः 60° तथा 30° हैं। पहाड़ी की ऊचाई ज्ञात कीजिए।

9. 7 मीटर ऊँचे एक भवन के शिखर पर एक केबल मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60^0 तथा इसके पाद का अवनमन कोण 45^0 है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

10. समुद्र तट पर स्थित एक मीनार के शिखर पर एक व्यक्ति देखता है कि एक नाव, जो उसकी ओर आ रही है, का अवनमन कोण 30^0 से 60^0 होने में 10 मिनट का समय लगता है। नाव समुद्र तट पर कितनी देर में आ जाएगी?

11. दो नावें एक प्रकाश स्तम्भ की ओर विपरीत दिशाओं से आ रही हैं। नावों से प्रकाश स्तम्भ का उन्नयन कोण क्रमशः 30° तथा 45° हैं। यदि इन नावों के बीच 10 मीटर की दूरी हो, तो प्रकाश स्तम्भ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

12. सूर्य का उन्नतांश 60^0 से 30^0 होने पर समतल जमीन पर खड़ी एक मीनार की छाया $45\sqrt{3}$ मीटर अधिक लम्बी पाई गयी। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

13. दो मीनारों के बीच क्षैतिज दूरी 80 मीटर है। दूसरी मीनार के शिखर से पहली मीनार के शिखर का अवनमन कोण 30^0 है। यदि दूसरी मीनार की ऊँचाई 160 मीटर हो, तो पहली मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

14. गली के एक मकान की खिड़की, जिसकी ऊँचाई भूमि तल से 10 मीटर है, से गली की विपरीत दिशा में सामने बने मकान के शीर्ष व पाद के उन्नयन तथा अवनमन कोण क्रमशः 60^0 तथा 45^0 हैं। विपरीत दिशा में बने मकान की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। ($\sqrt{3}=1.73$ लीजिए)

15. एक चौकी पर 1.6 मीटर लंबी प्रतिमा लगी है। भूमि के एक बिन्दु पर प्रतिमा के शिखर का उन्नयन कोा 60^0 है। भूमि के एक बिन्दु पर चौकी के शिखर का उन्नयन कोण 45^0 है। चौकी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

देखें आपने कितना सीखा के उत्तर

23.1

1. (i) $\frac{5}{4}$ (ii) $\frac{5}{2}$ (iii) 0 (iv) 2 (v) 0 (vi) $\frac{67}{12}$

5. $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

6. $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

7. $A = 45^\circ$ तथा $B = 15^\circ$

8. $A = 30^\circ$ तथा $B = 15^\circ$

9. $QR = 5\sqrt{3}$ तथा $PR = 10$ सेमी

10. $\angle A = 60^\circ$ तथा $\angle C = 30^\circ$

11. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. $x = 10^\circ$

13. C

14. B

15. A

23.2

1. 6 मी	2. 86.6 मी	3. 86.6 मी
4. 86.6 मी	5. 115.46 मी	6. 60°
7. 5.57 मी	8. 24.14 मी	9. 94.64 मी
10. 184.75 मी	11. 25.35 मी	12. 5.46 मी
13. 6.34 मी	14. 415.66 किमी/घंटा	15. 16.67 मी

आइए अभ्यास करें के उत्तर

1. (i) $\frac{11}{4}$ (ii) $\frac{7}{2}$ (iii) $\frac{40}{121}$ (iv) $\frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}$

5. $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	6. $A = 60^\circ$ तथा $B = 30^\circ$	7. 40 मी , 29.28 मी
8. 433 मी	9. 19.124 मी	10. 5 मिनट
11. 36.6 मी	12. 67.5 मी	13. 113.8 मी
14. 27.3 मी	15. 2.18656 मी	

माध्यमिक पाठ्यक्रम
गणित

अभ्यास कार्य–त्रिकोणमिति

अधिकतम अंक: 25 **समय : 45 मिनट**

अनुदेश

1. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर पुस्तिका के अलग–अलग पृष्ठ पर दीजिए।
2. निम्न सूचना अपनी उत्तर पुस्तिका में दीजिए।

   नाम

   नामांकन संख्या

   विषय

   अभ्यास कार्य का प्रकरण (Topic)

   पता
3. आप अपने अभ्यास कार्य की जांच अध्ययन केन्द्र पर अपने विषय अध्यापक से कराईए जिससे आपके कार्य का उचित परिष्करण मिल सके।

अपना अभ्यास कार्य राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान को मत भेजिए।

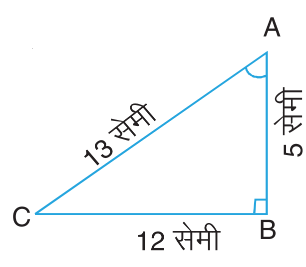
1. संलग्न आकृति में, sin A का मान है: 1

(A) $\frac{5}{13}$

(B) $\frac{12}{13}$

(C) $\frac{5}{12}$

(D) $\frac{13}{12}$



2. यदि $4 \cot A = 3$ है, तो $\dfrac{\sin A - \cos A}{\sin A + \cos A}$ का मान है 1

(A) $\dfrac{1}{7}$ (B) $\dfrac{6}{7}$

(C) $\dfrac{5}{6}$ (D) $\dfrac{3}{4}$

3. $\sec 30^\circ$ का मान है: 1

(A) 2 (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{2}$

4. B पर समकोणीय ΔABC में, यदि $AB = 6$ सेमी तथा $AC = 12$ सेमी है, तो $\angle A$ का मान है 1

(A) 60°

(B) 30°

(C) 45°

(D) 15°

5. $\dfrac{\sin 36^\circ}{2 \cos 54^\circ} - \dfrac{2 \sec 41^\circ}{3 \operatorname{cosec} 49^\circ}$ का मान है

(A) -1

(B) $\dfrac{1}{6}$

(C) $-\dfrac{1}{6}$

(D) 1

6. यदि $\sin A = \dfrac{1}{2}$ है, तो दर्शाइए कि 2

$3 \cos A - 4 \cos^3 A = 0$

7. सूत्र $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ के प्रयोग से $\sin 15°$ का मान ज्ञात कीजिए 2

8. $\tan 15° \tan 25° \tan 60° \tan 65° \tan 75°$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

9. दर्शाइए कि $\sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$ 2

10. यदि $\sin^2\theta + \sin\theta = 1$ है, तो दर्शाइए कि 2

$\cos^2\theta + \cos^4\theta = 1$

11. सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{\cot A + \operatorname{cosec} A - 1}{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1} = \dfrac{1+\cos A}{\sin A}$ 4

12. एक प्रेक्षक एक भवन से 40 मीटर की दूरी पर खड़ा यह देखता है कि एक ध्वजदंड, जोकि भवन पर लगा हुआ है, के शिखर और पाद बिंदुओं के उन्नयन कोण क्रमशः 60° और 45° है। भवन की ऊँचाई और ध्वजदंड की लंबाई ज्ञात कीजिए। 6