

मॉड्यूल 6

सांख्यिकी

आधुनिक समाज आवश्यक रूप से आंकड़ों पर निर्भर करता है। यह कल्पना करना भी कठिन है कि हमारे जीवन का कोई भी क्षेत्र समाचार पत्रों, विज्ञापनों, पत्रिकाओं, पाक्षिकों या प्रसार माध्यमों जैसे टेलीविजन या रेडियो प्रसारण से अनछुआ रहा जाए। ये आंकड़े, निर्वाह खर्च, जन्म मृत्यु दर, साक्षरता दर, क्रिकेट में औसत, विभिन्न शहरों में वर्षा, विभिन्न शहरों में तापक्रम, पंचवर्षीय योजना में विभिन्न क्षेत्रों में व्यय से संबंधित हो सकते हैं। इसलिए यह जानना आवश्यक है कि ऐसे आंकड़ों से अर्थपूर्ण सूचनाएँ कैसे प्राप्त की जाएँ। गणित की उस शाखा को, जिसमें आंकड़ों से अर्थपूर्ण सूचनाएँ ज्ञात करने का अध्ययन किया जाता है, सांख्यिकी कहते हैं।

'आंकड़े एवं उनका निरूपण' पाठ में विद्यार्थी आंकड़ों के विभिन्न प्रकार, आंकड़ों का संकलन, आंकड़ों का बारंबारता वितरण, संचयी बारंबारता वितरण तालिका में प्रस्तुतीकरण तथा दंड आलेख, आयत चित्र व बारंबारता बहुभुज के रूप में आलेखीय निरूपण से परिचित होंगे।

हमें आंकड़ों को अंकगणितीय रूप में भी बताना होता है, जैसे एक कक्षा के विद्यार्थियों की माध्य आयु, विद्यार्थियों के समूह की माध्य ऊँचाई, एक समूह के जूतों की मानक माप या माध्यक। इस प्रकार हमें कुछ ऐसी मापों की आवश्यकता होती है जो आंकड़ों के मुख्य गुणों को निरूपित करते हैं। पाठ 'केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप' में विद्यार्थी केन्द्रीय प्रवृत्ति की कुछ मापों जैसे अवर्गीकृत आंकड़ों के माध्य, माध्यक व बहुलक तथा वर्गीकृत आंकड़ों के माध्य से परिचित होंगे।

'प्रायिकता से परिचय' पाठ में विद्यार्थी सैद्धांतिक प्रायिकता की संकल्पना को अनिश्चितता की माप के रूप में खेलों में संयोग द्वारा जैसे सिक्के को उछालना, पासे को फेंकना आदि के द्वारा सीखेंगे।



24

आँकड़े और उनका निरूपण

साँख्यिकी गणित की एक विशेष महत्वपूर्ण शाखा है, जिसमें मुख्यतः आँकड़ों ओर उनके निरूपण की चर्चा की जाती है। इस पाठ में, हम गणित की इस शाखा के अध्ययन का आँकड़ों के संग्रह, वर्गीकरण, प्रस्तुतीकरण और विश्लेषण के साथ आरंभ करेंगे। हम अध्ययन करेंगे कि दिए हुए आँकड़ों को किस प्रकार अवर्गीकृत और वर्गीकृत बारंबारताओं बंटनों में वर्गीकृत करते हैं। हम एक वर्ग की संचयी बारंबारता और संचयी बारंबारता सारणी के बारे में भी सीखेंगे।

साथ ही, हम दंड चार्टों, आयतचित्रों तथा बारंबारता बहुभुजों के रूप में आँकड़ों का आलेखीय निरूपण करना भी सीखेंगे।



उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन करने के बाद आप समर्थ हो जाएंगे कि:

- एकवचन और बहुवचन के रूपों में साँख्यिकी के अर्थ जान सकें;
- प्राथमिक और गौण आँकणों में अंतर बता सकें;
- उदाहरणों की सहायता से एक वर्ग, वर्ग चिन्ह, वर्ग सीमाएँ, असतत और सतत आँकड़े, एक वर्ग की बारंबारता, वर्ग माप या वर्ग चौड़ाई के अर्थों को समझ सकें;
- आँकड़ों को एक बारंबारता सारणी के रूप में संघनित और निरूपित कर सकें;
- एक दिए हुए बारंबारता बंटन को एक संचयी बारंबारता सारणी के रूप में बना सकें;
- एक दिए हुए बारंबारता बंटन के लिए एक दंड चार्ट या दंड आलेख खींच सकें;
- दिए हुए आँकड़ों के लिए एक दंड चार्ट या दंड आलेख खींच सकें;
- दिए हुए सतत आँकड़ों के लिए आयतचित्र और बारंबारता बहुभुज खींच सकें;
- दिए हुए दंड आलेखों और आयतचित्रों को पढ़ सकें और उनकी व्याख्या कर सकें।



अपेक्षित पूर्वज्ञान

- संख्याओं को आरोही/अवरोही क्रम में लिखना
- दो संख्याओं का औसत ज्ञात करना
- दो लांबिक रेखाओं के संदर्भ में तल में बिंदुओं को आलेखित करना
- अनुपात और समानुपात की धारणा

24.1 साँख्यिकी और साँख्यिकीय आँकड़े

अपने दैनिक जीवन में, हमें निम्न प्रकार के कथनों का सामना करना पड़ता है।

1. इस वर्ष स्कूल का परिणाम बेहतर रहेगा
2. अगले मास पेट्रोल/डीजल के मूल्य में वृद्धि हो सकती है
3. शाम को भारी वर्षा होने की संभावना है
4. बीमारी से रोगी में शीघ्र ही सुधार हो सकता है, इत्यादि

उपरोक्त कथनों पर ध्यान केन्द्रित कीजिए:

- पहला कथन किसी स्कूल के शिक्षक या उसके प्रधानाचार्य का हो सकता है। यह दर्शाता है कि उसने विद्यार्थियों के वर्तमान बैच और पिछले बैच के प्रदर्शनों को देखा है।
- दूसरा कथन किसी ऐसे व्यक्ति द्वारा हो सकता है, जिसने समाचार पत्रों में तेल के मूल्य की वृद्धि की प्रवृत्ति को देखा है।
- तीसरा कथन उस व्यक्ति द्वारा दिया हो सकता है, जिसने मौसम विभाग द्वारा दी गई मौसम संबंधी रिपोर्टों को देखा है। यदि ऐसा है, इसकी अपेक्षा की जा सकती है कि यह मौसम रिपोर्टों के ठोस प्रेक्षणों और विश्लेषणों पर आधारित है।
- अंतिम कथन किसी डॉक्टर द्वारा दिया हो सकता है जो उसके प्रेक्षणों और विश्लेषणों पर आधारित है।

उपरोक्त प्रकार के कथनों की विश्वसनीयता व्यक्ति विशेष की किन्हीं संख्यात्मक आँकड़ों पर आधारित प्रेक्षण और विश्लेषण करने की क्षमता पर निर्भर करती है। **साँख्यिकी वह विज्ञान है, जो संख्यात्मक आँकड़ों के संग्रह, संगठन, विश्लेषण और निर्वचन (व्याख्या) के साथ कार्य करती है।**

संख्यात्मक आँकड़ों का संग्रह और विश्लेषण अनेक समस्याओं, जैसे कि देश के आर्थिक विकास, शैक्षणिक विकास, स्वास्थ्य और जनसंख्या, कृषि विकास, इत्यादि से संबंधित समस्याओं के अध्ययन के लिए आवश्यक है।



शब्द 'साँख्यकी' के विभिन्न संदर्भों में विभिन्न अर्थ हैं। निम्न वाक्यों को देखिए:

1. क्या मैं भारत की 'शैक्षणिक साँख्यकी' की नवीनतम प्रति प्राप्त कर सकता हूँ?
2. मैं साँख्यकी का अध्ययन करना चाहता हूँ। यह एक रोचक विषय है।

पहले वाक्य में, साँख्यकी 'बहुवचन' के अर्थ में हुआ है जिसका अर्थ संख्यात्मक आँकड़े है। इनमें भारत के स्कूलों, कालेजों, संस्थानों, इत्यादि की संख्या, राज्यों में साक्षरता दर, इत्यादि सम्मिलित हो सकते हैं।

दूसरे वाक्य में, शब्द साँख्यकी **एकवचन** संज्ञा के रूप में हुई है, जिसका अर्थ एक विषय है, जो आँकड़ों के वर्गीकरण, सारणीकरण, संगठन और विश्लेषण तथा साथ ही आँकड़ों से अर्थपूर्ण निष्कर्ष निकालने से संबंधित है।

24.2 आँकड़ों का संग्रह

खोज के किसी भी क्षेत्र में, पहला चरण होता है आँकड़ों का संग्रह। इन्हीं आँकड़ों का अन्वेषक या साँख्यकीविद् द्वारा विश्लेषण किया जाएगा और उनसे निष्कर्ष निकाले जाएँगे। इसीलिए, यह अति महत्वपूर्ण है कि ये आँकड़े विश्वसनीय और सुसंगत हों तथा ये पहले से निश्चित एक योजना या डिजाइन के अनुसार संग्रहित किए गए हों।

आँकड़े प्राथमिक कहलाते हैं, यदि वे अन्वेषक द्वारा स्वयं ही संग्रहित किए गए हों। प्राथमिक आँकड़ों के कुछ उदाहरण हैं: मतदाताओं की सूचियाँ, जनसंख्या-प्रश्नावलियों से एकत्रित किए गए आँकड़े, इत्यादि। अन्वेषक के लिए स्वयं आँकड़े एकत्रित करना कुछ कारणों जैसे समय और संसाधनों की कमी से सदैव संभव नहीं हो पाता। इस स्थिति में, वह अन्य सरकारी या प्राइवेट एजेन्सी द्वारा एकत्रित किए गए आँकड़ों का प्रयोग कर सकता है, जो प्रकाशित रिपोर्टों के रूप में हो सकते हैं। इनको **गौण आँकड़े** भी कहा जाता है। एक व्यक्ति या एजेन्सी के लिए आँकड़े प्राथमिक हो सकते हैं, परंतु अन्य व्यक्ति या एजेन्सी द्वारा प्रयोग किए जाने पर वे गौण बन जाते हैं। क्योंकि ये आँकड़े अन्य व्यक्ति द्वारा एक विशेष उद्देश्य से एकत्रित किए जाते हैं, जो प्रारंभिक अन्वेषक के उद्देश्य से भिन्न हो सकते हैं, इसलिए प्रयोग करने वाले के लिए इसमें विवरण विस्तृत नहीं होगा तथा हो सकता है कि वे उसके अनुकूल न हों। अतः ऐसे आँकड़ों का प्रयोग सावधानीपूर्वक किया जाना चाहिए।



देखें आपने कितना सीखा 24.1

1. उपयुक्त शब्द/(शब्दों) से रिक्त स्थानों को भरिए, ताकि निम्न वाक्यों का कोई अर्थ हो।
 - (a) एकवचन के अर्थ में साँख्यकी का अर्थ एक विषय है, जिसमें आँकड़ों के _____, _____, विश्लेषण की चर्चा की जाती है तथा साथ ही आँकड़ों से अर्थपूर्ण _____ निकाले जाते हैं।



- (b) बहुवचन के अर्थ में साँख्यिकी के प्रयोग का अर्थ _____ है।
- (c) आँकड़े _____ कहलाते हैं, यदि वे स्वयं अन्वेषक द्वारा एकत्रित किए जाते हैं।
- (d) प्रकाशित रिपोर्टों के रूप में सरकारी या प्राइवेट एजेन्सियों से लिए गए आँकड़े _____ आँकड़े कहलाते हैं।
- (e) साँख्यिकी वह विज्ञान है जो _____ के संग्रह, संगठन, विश्लेषण और निर्वचन के साथ कार्य करती है।
2. जावेद किसी मोहल्ले में जूतों के उस माप के बारे में जानकारी प्राप्त करना चाहता है जो अधिकतम व्यक्तियों द्वारा प्रयोग किया जाता है। अतः वह वहाँ प्रत्येक घर में जाकर इस सूचना को एक कागज पर लिखता है। इस प्रकार संग्रहित किए गए आँकड़े _____ आँकड़ों के उदाहरण हैं।
3. कक्षाओं I से XII में से प्रत्येक कक्षा में प्रत्येक दिन में अनुपस्थित व्यक्तियों की संख्या ज्ञात करने के लिए आप स्कूल के रिकार्ड से सूचना एकत्रित करते हैं। इस प्रकार एकत्रित आँकड़े _____ आँकड़ों के उदाहरण हैं।

24.3 आँकड़ों का प्रस्तुतीकरण

जब आँकड़ों के संग्रह का कार्य समाप्त हो जाता है, तब अन्वेषक का अगला चरण होता है कि इन आँकड़ों को संगठित और संगठित करने की विधियाँ ज्ञात करना होता है। ताकि इनके मुख्य अभिलक्षणों का अध्ययन किया जा सके। आँकड़ों की यह व्यवस्था **आँकड़ों का प्रस्तुतीकरण** कहलाता है।

मान लीजिए कि किसी कक्षा में 20 विद्यार्थी हैं। एक गणित टेस्ट में विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए अंक (100 में से) निम्न हैं:

45, 56, 61, 56, 31, 33, 70, 61, 76, 56,

36, 59, 64, 56, 88, 28, 56, 70, 64, 74

इस रूप में प्राप्त आँकड़े **यथाप्राप्त आँकड़े** कहलाते हैं। प्रत्येक प्रविष्टि जैसे 45, 56 इत्यादि एक **मान** या **प्रेक्षण** कहलाती है। इस रूप में लिखे रहने पर, क्या आप इनके उच्चतम और निम्नतम अंक ज्ञात कर सकते हैं? इनसे आपको क्या सूचना प्राप्त होती है?

आइए इन संख्याओं को आरोही क्रम में व्यवस्थित करें।

28, 31, 33, 36, 45, 56, 56, 56, 56, 56,

59, 61, 61, 64, 64, 70, 70, 74, 76, 88

...(1)



अब आपको निम्न सूचना प्राप्त हो सकती है:

- (a) प्राप्त किए गए उच्चतम अंक 88 हैं।
- (b) प्राप्त किए गए निम्नतम अंक 28 हैं।
- (c) 56 अंक 5 विद्यार्थियों ने प्राप्त किए हैं।
- (d) 60 से अधिक अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या 9 है।
- (1) के रूप में व्यवस्थित ऑकड़े एरेड (arrayed) या पंक्तिबद्ध ऑकड़े कहलाते हैं

ऑकड़ों के इस प्रकार के प्रस्तुतीकरण में अधिक समय लगता है, विशेष रूप से तब जब प्रेक्षणों की संख्या बहुत अधिक हो। ऑकड़ों से और अधिक सूचना प्राप्त करने के लिए, हम इन्हें नीचे दर्शाए अनुसार सारणीबद्ध रूप में लिखते हैं।

20 विद्यार्थियों द्वारा गणित में प्राप्त किए गए अंक

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
28	1
31	1
33	1
36	1
45	1
56	5
59	1
61	2
64	2
70	2
74	1
76	1
88	1
योग	20

सारणी के रूप में ऑकड़ों का उपरोक्त प्रस्तुतीकरण संख्याओं (अंकों) को पंक्तियों में लिखने की व्यवस्था में एक सुधार है, क्योंकि यह ऑकड़ों के बारे में एक स्पष्ट विचार प्रकट करता है। इस सारणी से, हम तुरंत देख सकते हैं कि 1 विद्यार्थी ने 28 अंक, 5 विद्यार्थियों ने 56 अंक, 2 विद्यार्थियों ने 70 अंक प्राप्त किए हैं, इत्यादि। संख्याएं 1, 1, 1, 1, 1, 5, 2, क्रमशः प्रेक्षणों (जिसे विचर या चर भी कहते हैं) 28, 31, 33, 36, 45, 56, 70, ...की बारंबारताएँ कहलाती हैं।



इस प्रकार की सारणी एक बारंबारता बंटन सारणी (frequency distribution table) या केवल अवर्गीकृत बारंबारता सारणी (ungrouped frequency table) कहलाती है।

टिप्पणी: जब प्रेक्षणों की संख्या बहुत बड़ी हो जाए तो साधारण गिनती करने से बारंबारताएँ ज्ञात करना सुविधाजनक नहीं रहता है। ऐसी स्थितियों में, हम दंडों (|) का प्रयोग करते हैं, जिन्हें **मिलान चिन्ह (tally marks)** कहा जाता है, जिनसे बारंबारताएँ ज्ञात करने में बहुत सहायता मिलती है।

आँकड़ों को और अधिक संघनित रूप में प्राप्त करने के लिए (जब प्रेक्षणों की संख्या बहुत अधिक हो) हम आँकड़ों को समूहों या वर्गों (classes) (या वर्ग अंतरालों) में वर्गीकृत करते हैं जैसा नीचे दर्शाया गया है:

चरण 1: हम यथाप्राप्त आँकड़ों का **परिसर (range)** अर्थात् अधिकतम और न्यूनतम प्रेक्षणों (मानों) का अंतर ज्ञात करते हैं। उपरोक्त उदाहरण में परिसर $88 - 28 = 60$ है।

चरण 2: हम उन समूहों या वर्गों के बारे में निर्णय लेते हैं, जिनमें यथाप्राप्त आँकड़ों को वर्गीकृत करना है। वर्गों की संख्या निर्धारित करने के लिए कोई पक्का नियम नहीं है, परंतु सामान्य रूप से 5 से कम और 15 से अधिक वर्ग नहीं होने चाहिए।

चरण 3: हम परिसर (यहाँ 60 है) को वर्गों की वाँछित संख्या से भाग देते हैं, जिससे वर्ग अंतरालों की लगभग माप (size) या चौड़ाई (width) निर्धारित हो जाए। उपरोक्त उदाहरण में, मान लीजिए कि हम 9 वर्ग रखना चाहते हैं। इस प्रकार प्रत्येक वर्ग की माप (साइज) $\frac{60}{9} \approx 7$ है।

चरण 4: आगे, हम वर्ग अंतराल की चरण 3 में तय की गई माप के आधार पर वर्ग सीमाएँ (class limits) स्थापित करते हैं। हम यह ध्यान रखेंगे कि न्यूनतम और अधिकतम मानों के लिए एक-एक वर्ग अवश्य हो। वर्गों में कोई अनातिव्याप्तता (overlapping) नहीं होनी चाहिए, उनके बीच में कोई रिक्तता नहीं होनी चाहिए तथा वर्ग समान मापों के हों।

चरण 5: हम आँकड़ों में से प्रत्येक वस्तु (प्रेक्षण) को एक बार में एक, लेते हैं तथा उस वर्ग के सामने एक मिलान चिन्ह (|) लगाते हैं, जिसमें वह आता है। सुविधा की दृष्टि से, हम मिलान चिन्हों को पाँच पाँच के झुंडों में लगाते हैं, जिनमें पाँचवा चिन्ह अन्य चार को विकर्णतः काटता है, जैसा |||| से दर्शाया गया है।

चरण 6: प्रत्येक वर्ग के मिलान चिन्हों के गिनने से हमें उस वर्ग की बारंबारता ज्ञात हो जाती है। (स्पष्टतः सभी वर्गों की बारंबारताओं का योग आँकड़ों में कुल प्रेक्षणों के बराबर होना चाहिए)।

चरण 7: बारंबारता सारणी को उचित 'शीर्षक' प्रदान किया जाना चाहिए, जिससे पता चल जाए कि यह सारणी किसके बारे में है।

उपरोक्त चरणों का प्रयोग करते हुए, हम 20 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए अंकों की निम्न सारणी प्राप्त करते हैं।



टिप्पणी

20 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए अंकों की बारंबारता सारणी

वर्ग अंतराल (100 में से प्राप्त अंक)	मिलान चिन्ह	बारंबारता
28-34		3
35-41		1
42-48		1
49-55	—	0
56-62		8
63-69		2
70-76		4
77-83	—	0
84-90		1
योग		20

उपरोक्त सारणी वर्गीकृत आँकड़ों के लिए **बारंबारता बंटन सारणी** अथवा एक वर्गीकृत **बारंबारता बंटन सारणी** कहलाती है। इस रूप में व्यक्त किए गए आँकड़े **वर्गीकृत आँकड़े** कहलाते हैं।

उपरोक्त सारणी के वर्ग 28-34 में, प्रेक्षण 28, 29, 30, 31, 32, 33 और 34 हो सकते हैं, वर्ग 35-41 में प्रेक्षण 35, 36, 37, 38, 39, 40 और 41 हो सकते हैं, इत्यादि। अतः यहाँ कोई अतिव्याप्तता (overlapping) नहीं है।

वर्ग 28-34 के लिए, 28 **निम्न वर्ग सीमा** और 34 **उपरिवर्ग सीमा** है, इत्यादि।

इस प्रकार के प्रस्तुतिकरण से, हम आँकड़ों के बारे में, बेहतर निष्कर्ष निकाल सकते हैं। इनमें से कुछ निम्न हैं:

- 28 से 34 तक अंक पाने वाले विद्यार्थियों की संख्या 3 है।
 - वर्ग 49-55 में किसी विद्यार्थी को अंक नहीं मिले हैं, अर्थात् किसी विद्यार्थी को 49, 50, 51, 52, 53, 54 और 55 अंक प्राप्त नहीं हुए।
 - 56 से 62 तक अंक अधिकतम विद्यार्थियों ने प्राप्त किए हैं, इत्यादि।
- इन्हीं 20 प्रेक्षणों को हम 9 समूह 28-35, 35-42, 42-49, 49-56, 56-63, 63-70, 70-77, 77-84, 84-91 में वर्गीकृत कर सकते हैं, जैसा नीचे दी गई सारणी में दर्शाया गया है।

वर्ग 28-35 और 35-42 से ऐसा प्रतीत होता है कि 35 इन दोनों वर्गों में सम्मिलित हो सकता है। परंतु जैसा कि आप जानते हैं कि कोई भी प्रेक्षण एक साथ दो वर्गों में नहीं आ सकता है। इससे बचने के लिए, हम यह परिपाटी मान लेते हैं कि उभयनिष्ठ प्रेक्षण 35 उच्चतर वर्ग, अर्थात्



35-42 में सम्मिलित है। (तथा 28-35 में नहीं)। इस प्रकार, 42 वर्ग 42-49 में सम्मिलित है, इत्यादि। इस प्रकार वर्ग 28-35 में 28 या 28 से बड़े परंतु 35 से छोटे सभी प्रेक्षण सम्मिलित हैं, इत्यादि।

किसी गणित टेस्ट में 20 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए अंकों की बारंबारता सारणी

वर्ग अंतराल (100 में से प्राप्त अंक)	मिलान चिन्ह	बारंबारता
28-35		3
35-42		1
42-49		1
49-56	—	0
56-63	 	8
63-70		2
70-77		4
77-84	—	0
84-91		1
योग		20

हम ऐसी बारंबारता बंटन सारणी क्यों बनाते हैं, यह अगले उदाहरण से स्पष्ट हो जाएगा।

आइए अब निम्न बारंबारता बंटन सारणी पर विचार करें, जो किसी कक्षा के 50 विद्यार्थियों के भारों को दर्शाती है।

भार (कि.ग्रा. में)	विद्यार्थियों की संख्या
31-35	10
36-40	7
41-45	15
46-50	4
51-55	2
56-60	3
61-65	4
66-70	3
71-75	2
योग	50

मान लीजिए कि 35.5 कि.ग्रा. और 50.54 कि.ग्रा. भारों वाले दो विद्यार्थी कक्षा में भर्ती किए जाते हैं। उनको हम किस वर्ग (अंतराल) में सम्मिलित करेंगे? क्या हम 35.5 को वर्ग 31-35 में या वर्ग 36-40 में सम्मिलित कर सकते हैं?



टिप्पणी

नहीं! वर्ग 31-35 में 35 तक की संख्याएँ सम्मिलित हैं तथा वर्ग 36-40 में 36 से आगे की संख्याएँ सम्मिलित हैं। अतः दो क्रमागत वर्गों की उपरि और निम्न वर्ग सीमाओं के बीच में रिक्तता है। इस कठिनाई को दूर करने के लिए, हम अंतरालों को इस प्रकार बनाते हैं कि दो क्रमागत वर्गों की उपरि और निम्न वर्ग सीमाएँ एक ही रहें। इसके लिए, हम एक वर्ग की उपरि सीमा तथा उसके अगले वर्ग की निम्न सीमा के बीच अंतर ज्ञात करते हैं। फिर हम इस अंतर के आधे को प्रत्येक उपरि सीमा में जोड़ देते हैं तथा इसे प्रत्येक निम्न सीमा में से घटा देते हैं। उदाहरणार्थ, वर्गों 31-35 और 36-40 को लीजिए 36-40 की निम्न सीमा 36 है तथा 31-35 की उपरि सीमा 35 है। इनका अंतर = $36 - 35 = 1$ है

अतः, अंतर का आधा = $\frac{1}{2} = 0.5$

इसलिए, 31-35 से बना नया वर्ग अंतराल $(31 - 0.5) - (35 + 0.5)$, अर्थात् $30.5 - 35.5$ है। इसी प्रकार वर्ग 36-40, $(36 - 0.5) - (40 + 0.5)$, अर्थात् $35.5 - 40.5$ होगा इत्यादि।

इस प्रकार, नये वर्ग होंगे: 30.5-35.5, 35.5-40.5, 40.5-45.5, 45.5-50.5, 50.5-55.5, 55.5-60.5, 60.5-65.5, 65.5-70.5 और 70.5-75.5. ये अब सतत वर्ग हैं।

ध्यान दीजिए कि वर्ग माप या चौड़ाई अभी भी वही, अर्थात् 5 है। बदली हुई ये सीमाएँ सत्य वर्ग सीमाएँ कहलाती हैं। इस प्रकार, वर्ग 30.5-35.5 के लिए, 30.5 सत्य निम्न सीमा है तथा 35.5 उपरि वर्ग सीमा है।

क्या अब हम नए विद्यार्थियों के भारों को सम्मिलित कर सकते हैं? यदि हाँ, तो किस वर्ग में? स्पष्टतः 35.5 को वर्ग 35.5-40.5 में सम्मिलित किया जाएगा और 50.54 को 50.5-55.5 में सम्मिलित किया जाएगा। (क्या आप स्पष्ट कर सकते हैं कि क्यों?).

अतः, नई बारंबारता सारणी निम्न प्रकार की होगी:

भार (कि.ग्रा. में)	विद्यार्थियों की संख्या
30.5-35.5	10
35.5-40.5	8
40.5-45.5	15
45.5-50.5	4
50.5-55.5	3
55.5-60.5	3
60.5-65.5	4
65.5-70.5	3
70.5-75.5	2
योग	52

← वर्ग में 35.5 सम्मिलित है।

← वर्ग में 50.54 सम्मिलित है।



टिप्पणी

टिप्पणी: इस स्थिति में हम वर्गों को 30-35, 35-40, 40-45, ..., 65-70 और 70-75 भी ले सकते हैं

उदाहरण 24.1: निम्न आँकड़ों के लिए, जो 32 व्यक्तियों की दैनिक मजदूरी (रुपयों में) प्रदर्शित करते हैं, एक बारंबारता सारणी की रचना कीजिए। माप 10 के वर्ग अंतरालों का प्रयोग कीजिए।

110	184	129	141	105	134	136	176	155
145	150	160	160	152	201	159	203	146
177	139	105	140	190	158	203	108	129
118	112	169	140	185				

हल: आँकड़ों का परिसर = $203 - 105 = 98$

अतः यह सुविधाजनक है कि माप 10 के 10 वर्ग लिए जाएँ।

दिए हुए आँकड़ों की बारंबारता बंटन सारणी नीचे दी है:

32 व्यक्तियों की दैनिक मजदूरी दर्शाने वाली बारंबारता सारणी

दैनिक मजदूरी (₹ में)	मिलान चिन्ह	व्यक्तियों की संख्या या बारंबारता
105-115	IX	5
115-125	I	1
125-135	III	3
135-145	IX	5
145-155	IIII	4
155-165	IX	5
165-175	I	1
175-185	III	3
185-195	II	2
195-205	III	3
योग		32

उदाहरण 24.2: 30 विद्यार्थियों की ऊँचाइयाँ (सेन्टीमीटरों में) नीचे दी गई हैं

161	151	153	165	167	154
162	163	170	165	157	156
153	160	160	170	161	167
154	151	152	156	157	160
161	160	163	167	168	158



- (i) वर्गों 161-165, 166-170, इत्यादि लेते हुए, उपरोक्त आँकड़ों को एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी से निरूपित कीजिए।
- (ii) इस सारणी से उनकी ऊँचाइयों के बारे में आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

हल:

- (i) 30 विद्यार्थियों को दर्शाने वाली बारंबारता सारणी

ऊँचाई (सेमी में)	मिलान चिन्ह	बारंबारता
151-155		7
156-160		9
161-165		8
166-170		6
योग		30

- (ii) उपरोक्त सारणी से हम एक निष्कर्ष यह निकाल सकते हैं कि 50% से अधिक विद्यार्थी (16 विद्यार्थी) 160 सेमी से कम ऊँचाई के हैं।



देखें आपने कितना सीखा 24.2

- यथा प्राप्त आँकड़ों और पँक्तिबद्ध आँकड़ों के एक-एक उदाहरण दीजिए।
- कक्षा IX की 30 लड़कियों की ऊँचाइयाँ नीचे दी गई हैं:
140 140 160 139 153 146 151 150 150 154
148 158 151 160 150 149 148 140 148 153
140 139 150 152 149 142 152 140 146 148
इन आँकड़ों का परिसर ज्ञात कीजिए।
- प्राथमिक आँकड़ों और गौण आँकड़ों में अंतर बनाइए।
- कक्षा IX के 30 विद्यार्थी गणित ओलेम्पिड की परीक्षा में बैठते हैं। उनके द्वारा प्राप्त किए गए अंक नीचे दिए हैं:

46	31	74	68	42	54	14	93	72	53
59	38	16	88	27	44	63	43	81	64
77	62	53	40	71	60	8	68	50	58

वर्गों 0-9, 10-19 इत्यादि का प्रयोग करते हुए, इन आँकड़ों के लिए एक वर्गीकृत बारंबारता सारणी की रचना कीजिए। साथ ही, उन विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए जिन्होंने 49 से अधिक अंक प्राप्त किए हैं।



टिप्पणी

5. बराबर मापों के वर्ग अंतरालों का प्रयोग करते हुए, एक बारंबारता सारणी नीचे दिए आँकड़ों के लिए बनाइए, जिनमें एक अंतराल 250-270 (270 सम्मिलित नहीं है) हो

268	230	368	248	242	310	272	342
310	300	300	320	315	304	402	316
406	292	355	248	210	240	330	316
406	215	262	238				

6. किसी स्कूल के 40 शिक्षकों की आयु (वर्षों में) का बारंबारता बंटन निम्न है:

आयु (वर्षों में)	शिक्षकों की संख्या
25-31	12
31-37	15
37-43	7
43-49	5
49-55	1
योग	40

- (i) वर्ग माप क्या है?
(ii) वर्ग 37-43 की उपरि वर्ग सीमा क्या है?
(iii) वर्ग 49-55 की निम्न वर्ग सीमा क्या है?

24.4 संचयी बारंबारता सारणी

निम्न बारंबारता सारणी पर विचार कीजिए:

भार (कि.ग्रा. में)	विद्यार्थियों की संख्या
30-35	10
35-40	7
40-45	15
45-50	4
50-55	2
55-60	3
60-65	4
65-70	3
70-75	2
योग	50

अब नीचे दिए प्रश्नों के उत्तर देने का प्रयास कीजिए:

- (i) कितने विद्यार्थियों का भार 35 कि.ग्रा. से कम है?
(ii) कितने विद्यार्थियों का भार 50 कि.ग्रा. से कम है?



टिप्पणी

(iii) कितने विद्यार्थियों का भार 60 कि.ग्रा. से कम है?

(iv) कितने विद्यार्थियों का भार 70 कि.ग्रा. से कम है?

आइए उत्तरों को इस प्रकार रखें

विद्यार्थियों की संख्या जिनका भार

35 कि.ग्रा. से कम है: 10

40 कि.ग्रा. से कम है: $(10) + 7 = 17$

45 कि.ग्रा. से कम है: $(10 + 7) + 15 = 32$

50 कि.ग्रा. से कम है: $(10 + 7 + 15) + 4 = 36$

55 कि.ग्रा. से कम है: $(10 + 7 + 15 + 4) + 2 = 38$

60 कि.ग्रा. से कम है: $(10 + 7 + 15 + 4 + 2) + 3 = 41$

65 कि.ग्रा. से कम है: $(10 + 7 + 15 + 4 + 2 + 3) + 4 = 45$

70 कि.ग्रा. से कम है: $(10 + 7 + 15 + 4 + 2 + 3 + 4) + 3 = 48$

75 कि.ग्रा. से कम है: $(10 + 7 + 15 + 4 + 2 + 3 + 4 + 3) + 2 = 50$

उपरोक्त से, यह सरलता से देखा जा सकता है कि प्रश्नों (i), (ii), (iii) तथा (iv) के उत्तर क्रमशः 10, 36, 41 और 48 हैं।

बारंबारताएँ 10, 17, 32, 36, 38, 41, 48, 50 संगत वर्गों की **संचयी बारंबारताएँ** कहलाती हैं। स्पष्ट है कि अंतिम वर्ग 70-75 की संचयी बारंबारता 50 है, जो प्रेक्षणों की कुल संख्या के बराबर है। यहाँ यह विद्यार्थियों की कुल संख्या है।

यदि इस विचाराधीन सारणी में, हम एक स्तंभ संचयी बारंबारताओं को दर्शाने वाला जोड़ दें, तो इस प्रकार प्राप्त सारणी इन आँकड़ों की **संचयी बारंबारता सारणी** या केवल **संचयी बारंबारता** कहलाती है। इस सारणी को नीचे दर्शाया जा रहा है।

संचयी बारंबारता बंटन सारणी

भार (कि.ग्रा. में)	विद्यार्थियों की संख्या (बारंबारता)	संचयी बारंबारता
0-35	10	10
35-40	7	17
40-45	15	32
45-50	4	36
50-55	2	38
55-60	3	41
60-65	4	45
65-70	3	48
70-75	2	50
योग	50	



टिप्पणी

उदाहरण 24.3: निम्न सारणी किसी मोहल्ले के कर्मचारियों की आय के समूहों के बंटन को दर्शाती है:

साप्ताहिक आय (₹ में)	कर्मचारियों की संख्या
0-1000	12
1000-2000	35
2000-3000	75
3000-4000	225
4000-5000	295
5000-6000	163
6000-7000	140
7000-8000	55
योग	1000

उपरोक्त के लिए, एक संचयी बारंबारता सारणी बनाइए तथा निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

कितने कर्मचारियों की साप्ताहिक आय निम्न से कम है?

- (i) ₹ 2000? (ii) ₹ 5000? (iii) ₹ 8000 (per week)?

हल: संचयी बारंबारता सारणी नीचे दी गई है।

संचयी बारंबारता सारणी

साप्ताहिक आय (₹ में)	कर्मचारियों की संख्या (बारंबारता)	संचयी बारंबारता
0-1000	12	12
1000-2000	35	47
2000-3000	75	122
3000-4000	225	347
4000-5000	295	642
5000-6000	163	805
6000-7000	140	945
7000-8000	55	1000
योग	1000	



सारणी से हम देखते हैं कि

- (i) ₹ 2000 से कम साप्ताहिक आय वाले कर्मचारियों की संख्या = 47
- (ii) ₹ 5000 से कम साप्ताहिक आय वाले कर्मचारियों की संख्या = 642
- (iii) ₹ 8000 से कम साप्ताहिक आय वाले कर्मचारियों की संख्या = 1000



देखें आपने कितना सीखा 24.3

1. निम्न बंटनों के लिए, संचयी बारंबारता बंटनों की रचना कीजिए:

(i)

वर्ग	बारंबारता
1-5	4
6-10	6
11-15	10
16-20	13
21-25	6
26-30	2

(ii)

वर्ग	बारंबारता
0-10	3
10-20	10
20-30	24
30-40	32
40-50	9
50-60	7

2. निम्न आंकड़ों से एक संचयी बारंबारता बंटन की रचना कीजिए:

ऊँचाई (सेमी में)	110-120	120-130	130-140	140-150	150-160	योग
विद्यार्थियों की संख्या	14	30	60	42	14	160

कितने विद्यार्थियों की ऊँचाई 150 सेमी से कम है?

24.5 आँकड़ों का आलेखीय निरूपण

24.5.1 दंडचार्ट (आलेख)

अभी तक हमने आँकड़ों को सारणियों द्वारा प्रस्तुत किया है। आँकड़ों को प्रस्तुत करने की एक अन्य विधि है, जिसे आँकड़ों का आलेखीय निरूपण कहते हैं, जो व्यक्तिगत वस्तुओं की तुलना के अभिप्राय से पहली विधि से अधिक सुविधाजनक है। संख्यात्मक आँकड़ों के आलेखीय निरूपणों में से एक दंड चार्ट (आलेख) है। उदाहरणार्थ, आकृति 24.1 रक्त समूह से संबंधित नीचे दी गई सारणी को निरूपित करती है।

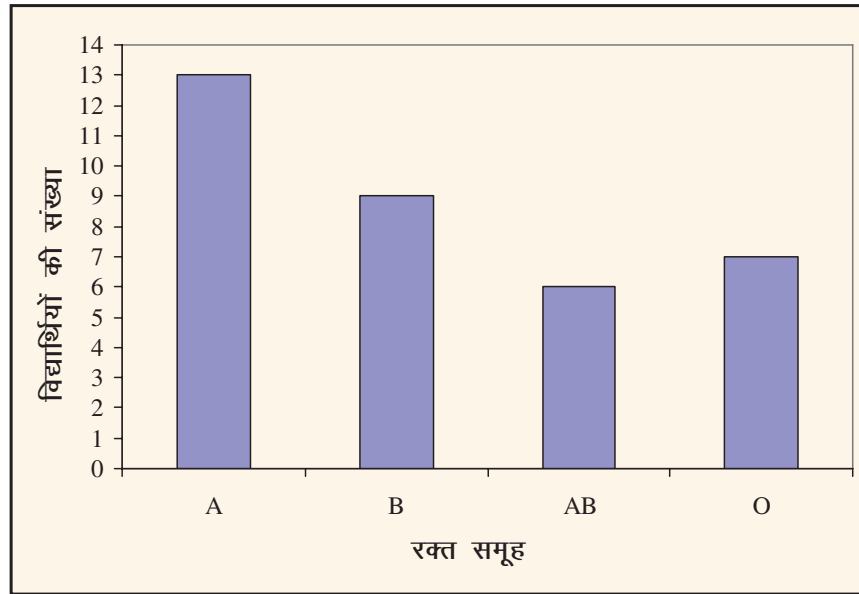


टिप्पणी

किसी कक्षा के 35 विद्यार्थियों के रक्त समूह

रक्त समूह	विद्यार्थियों की संख्या
A	13
B	9
AB	6
O	7
योग	35

हम इसे निम्न आकृति 24.1 द्वारा निरूपित कर सकते हैं:



आकृति 24.1

इसे दंड चार्ट या दंड आलेख कहते हैं।

इसमें क्षैतिज अक्ष जिसे x-अक्ष भी कहते हैं, पर एकसमान (बराबर) चौड़ाई के दंड (आयत) इस प्रकार खींचे जाते हैं कि इनके बीच में बराबर दूरी छूटी रहे। आयतों की ऊँचाइयों को ऊर्ध्वाधर अक्ष, जिसे y-अक्ष भी कहते हैं, अनुदिश दर्शाया जाता है और ये बारंबारताओं (विद्यार्थियों की संख्या) के समानुपाती होती हैं। आयत की चौड़ाइयों का कोई विशेष अर्थ नहीं होता, केवल कि यह चित्रिय रूप में अधिक आकर्षक लगने लगता है। यदि आपको आकृति 24.1 का दंड चार्ट दिया हो, तो आप इससे क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

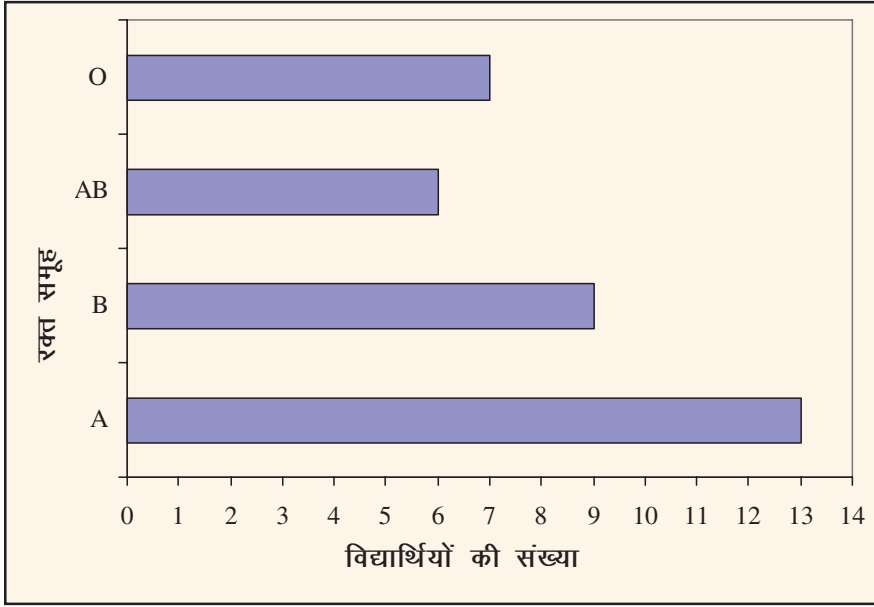
आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि

- कक्षा में रक्त समूह A वाले विद्यार्थियों की संख्या अधिकतम है।
- कक्षा में रक्त समूह AB वाले विद्यार्थियों की संख्या न्यूनतम है।



दंड आलेखों का उपयोग अर्थशास्त्रियों, व्यापारियों, मेडिकल जरनलों और सरकारी विभागों द्वारा आँकड़ों को निरूपित करने के लिए किया जाता है।

दंड आलेख को निरूपित करने की एक अन्य विधि आकृति 24.2 में दी है, जिसमें विद्यार्थियों के रक्त समूहों को y-अक्ष के अनुदिश लिया गया है और इनकी संगत बारंबारताओं को x-अक्ष के अनुदिश लिया गया है।



आकृति 24.2

आकृति 24.1 और आकृति 24.2 के दंड आलेखों में कोई विशेष अंतर नहीं है, केवल यह कि यह व्यक्ति विशेष की इच्छा पर निर्भर करता है कि वह किस वस्तु को किस अक्ष के अनुदिश रखना चाहता है। सामान्य रूप से ऊर्ध्वाधर दंड आलेखों को प्राथमिकता दी जाती है।

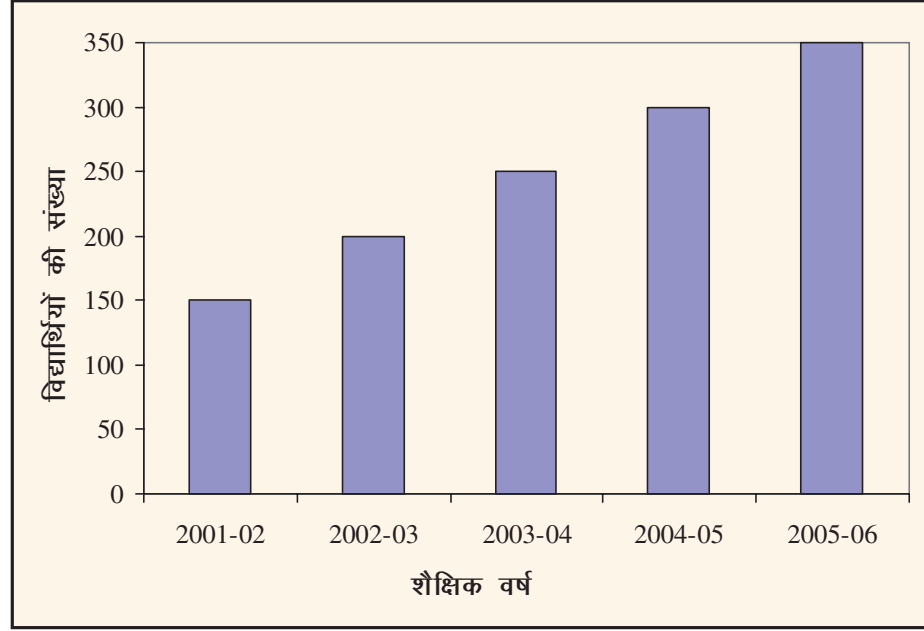
उदाहरण 24.4: नीचे (आकृति 24.3) एक दंड आलेख दिया है, जो शैक्षिक वर्षों 2001-02 से 2005-06 में कक्षा IX के विद्यार्थियों की संख्या को निरूपित करता है। इस दंड आलेख को पढ़िए और आगे दिए प्रश्नों का उत्तर दीजिए।

- इस दंड आलेख में क्या सूचना दी गई है?
- किस वर्ष में, कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या 250 थी?
- बताइए सत्य है या असत्य:

2002-03 में विद्यार्थियों की संख्या 2001-02 की संख्या की दुगुनी थी।



टिप्पणी



आकृति 24.3

हल:

- दंड आलेख किसी स्कूल की कक्षा IX में शैक्षिक वर्षों 2001-02 से 2005-06 के विद्यार्थियों की संख्या को निरूपित करता है।
- 2003-04 में विद्यार्थियों की संख्या 250 थी।
- 2002-03 में विद्यार्थियों की संख्या = 200
2001-02 में विद्यार्थियों की संख्या = 150

$$\frac{200}{150} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} < 2$$

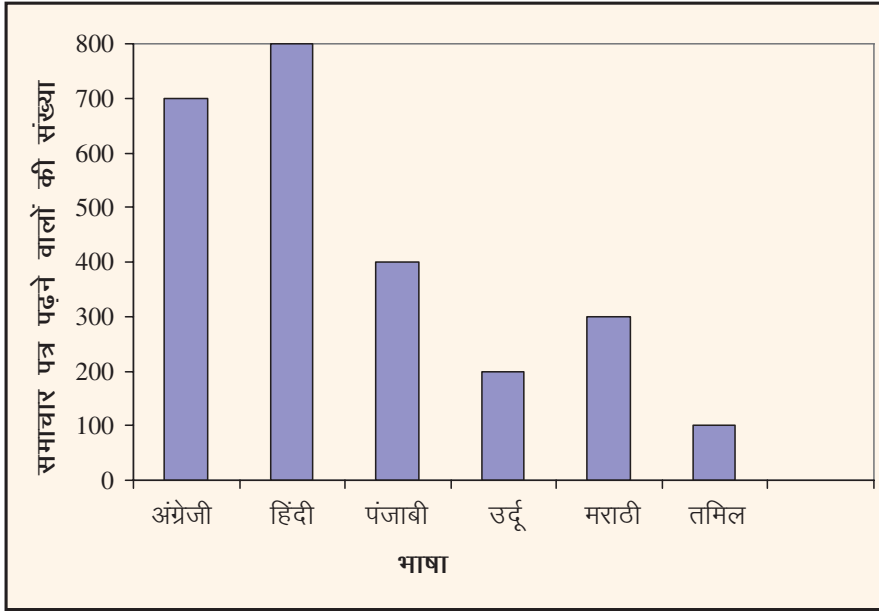
अतः दिया हुआ कथन असत्य है।

उदाहरण 24.5: आकृति 24.4 में दिया गया दंड आलेख किसी शहर में छः भाषाओं में समाचार पत्रों को पढ़ने वाले व्यक्तियों की संख्या को निरूपित करता है। ये संख्याएँ सौ में हैं। इसे पढ़िए तथा निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

- हिंदी, अंग्रेजी और पंजाबी में पढ़े जाने वाले समाचार पत्रों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।
- ज्ञात कीजिए कि उर्दू, मराठी, और तमिल भाषाओं के समाचार पत्रों को पढ़ने वालों की कुल संख्या से हिन्दी के समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या कितनी अधिक है।
- किस भाषा में समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या न्यूनतम है?
- विभिन्न भाषाओं में समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्याओं को बढ़ते हुए क्रम में लिखिए।



टिप्पणी



आकृति 24.4

हल:

(i) हिन्दी अंग्रेजी और पंजाबी में पढ़े जाने वाले पत्रों की संख्या (सौ में)

$$= 800 + 700 + 400 = 1900$$

(ii) हिन्दी में पढ़े जाने वाले समाचार पत्रों की संख्या (सौ में) = 800

उर्दू, मराठी और तमिल में पढ़े जाने वाले समाचार पत्रों की संख्या (सौ में)

$$= 200 + 300 + 100 = 600$$

अतः, अंतर = $800 - 600 = 200$

(iii) तमिल में समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या न्यूनतम है।

(iv) तमिल, उर्दू, मराठी, पंजाबी, अंग्रेजी, हिन्दी।

दंड आलेखों की रचना

अब हम उदाहरणों की सहायता से दंड आलेखों की रचना करना स्पष्ट करेंगे:

उदाहरण 24.6: निम्न ऑकड़े किसी बैंक द्वारा वर्षों 2000 से 2004 तक में दिए गए ऋणों की धनराशि (करोड़ रुपयों में) को दर्शाती है:

वर्ष	ऋण (करोड़ रुपयों में)
2000	25
2001	30
2002	40
2003	55
2004	60

उपरोक्त सूचना को निरूपित करने के लिए एक दंड आलेख की रचना कीजिए।



टिप्पणी

हल:

- चरण 1:** एक आलेख कागज लीजिए और उस पर दो लांबिक रेखाएँ खींचिए तथा उन्हें क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर अक्ष कहिए (आकृति 24.5)
- चरण 2:** क्षैतिज अक्ष के अनुदिश सूचना 'वर्ष' को निरूपित कीजिए तथा ऊर्ध्वाधर अक्ष के अनुदिश संगत ऋणों (करोड़ रुपयों में) को निरूपित कीजिए।
- चरण 3:** क्षैतिज अक्ष के अनुदिश दंडों की एक एकसमान चौड़ाई चुनिए तथा उनके बीच में स्थान की उपलब्धता के आधार पर उचित बराबर रिक्तता चुनिए।
- चरण 4:** आँकड़ों को दृष्टिगत रखते हुए, ऊर्ध्वाधर अक्ष पर एक उचित स्केल चुनिए।

आइए स्केल चुनें:

आलेख कागज की 1 इकाई = प्रस्तुत आँकड़ों के लिए 10 करोड़ रुपए

- चरण 5:** विभिन्न वर्षों के लिए, दंडों की ऊँचाइयाँ परिकलित कीजिए, जैसा नीचे दिया गया है:

$$2000 : \frac{1}{10} \times 25 = 2.5 \text{ इकाई}$$

$$2001 : \frac{1}{10} \times 30 = 3 \text{ इकाई}$$

$$2002 : \frac{1}{10} \times 40 = 4 \text{ इकाई}$$

$$2003 : \frac{1}{10} \times 55 = 5.5 \text{ इकाई}$$

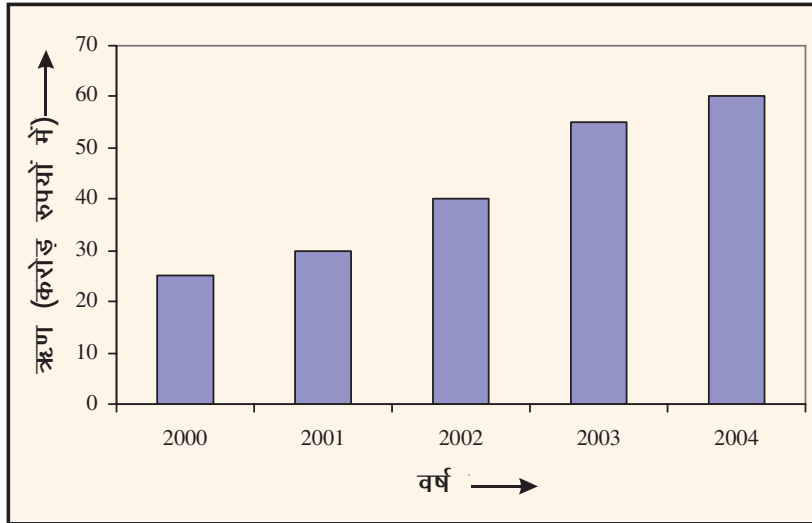
$$2004 : \frac{1}{10} \times 60 = 6 \text{ इकाई}$$

- चरण 6:** बराबर चौड़ाई तथा ऊपर चरण 5 में प्राप्त ऊँचाइयों के क्षैतिज अक्ष पर अंकित संगत वर्षों के साथ दंडों के बीच में बराबर रिक्तता छोड़ते हुए दंड खींचिए, जैसा कि आकृति 24.5 में दर्शाया गया है।



टिप्पणी

वर्षों 2000 से 2004 की अवधि में किसी बैंक द्वारा दिए गए ऋणों (करोड़ रुपयों में) को निरूपित करने वाला दंड आलेख



आकृति 24.5

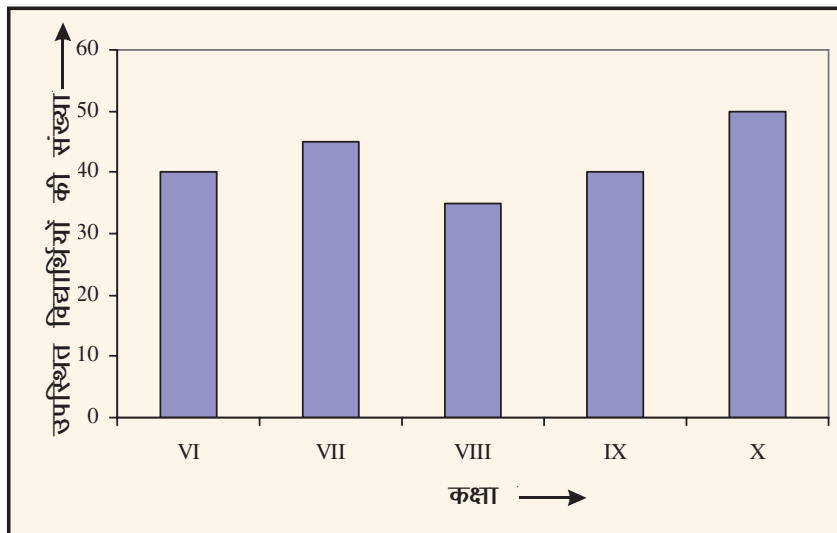
इस प्रकार, आकृति 24.5 वाँछित दंड आलेख प्रदान करता है।

उदाहरण 24.7: नीचे दिए हुए आँकड़ें किसी विशेष दिन विभिन्न कक्षाओं में उपस्थित विद्यार्थियों की संख्या को दर्शाते हैं:

कक्षा	VI	VII	VIII	IX	X
उपस्थित विद्यार्थियों की संख्या	40	45	35	40	50

उपरोक्त आँकड़ों को एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।

हल: उपरोक्त आंकड़ों के लिए, दंड आलेख आकृति 24.6 में दर्शाया गया है:



आकृति 24.6



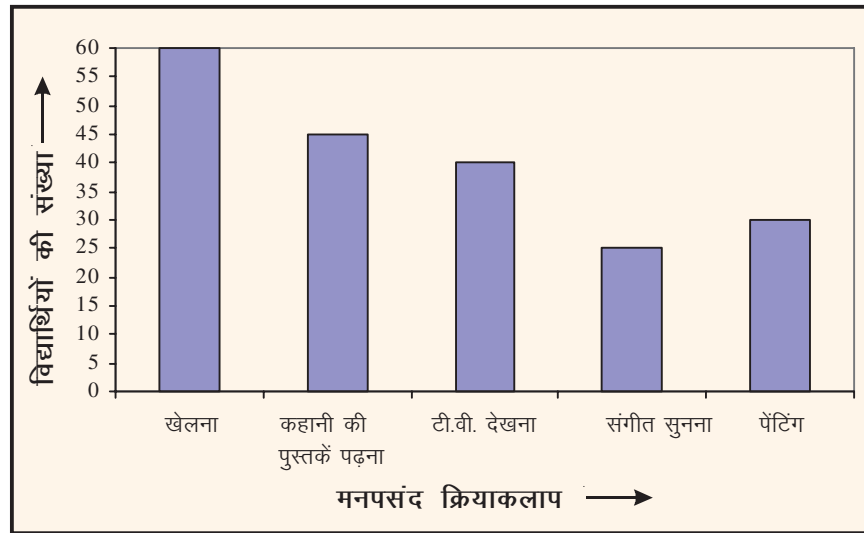
टिप्पणी

उदाहरण 24.8: किसी स्कूल के 200 विद्यार्थियों पर एक सर्वे यह जानने के लिए किया गया कि वे अपने खाली समय में क्या करना पसंद करते हैं तथा प्राप्त सूचना को निम्न रूप में रिकार्ड किया गया:

मनपसंद क्रियाकलाप	विद्यार्थियों की संख्या
खेलना	60
कहानी की पुस्तकें पढ़ना	45
TV देखना	40
संगीत सुनना	25
पेंटिंग	30

इन आँकड़ों के लिए एक दंड आलेख खींचिए।

हल: उपरोक्त आँकड़ों को दर्शाने वाला आलेख आकृति 24.7 में दिया गया है।



आकृति 24.7



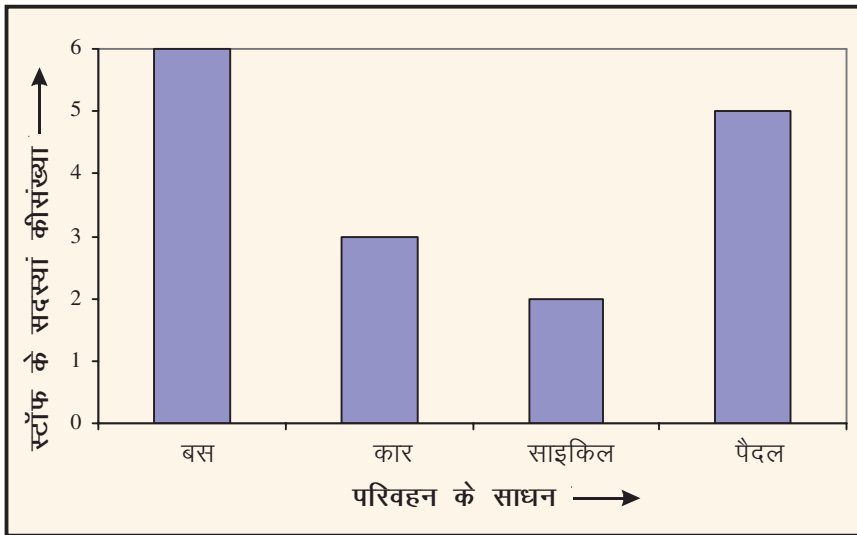
देखें आपने कितना सीखा 24.4

- रिक्त स्थानों को भरिए:
 - एक दंड आलेख संख्यात्मक आँकड़ों का ऐसा निरूपण है जिसमें समान चौड़ाई के _____ प्रयोग किया जाता है।
 - एक दंड आलेख दो क्रमागत दंडों के बीच में _____ स्थान छोड़े जाते हैं।
 - एक दंड आलेख में, दंडों की ऊँचाइयाँ उनकी संगत बारंबारताओं के _____ होती हैं।
- निम्न दंड आलेख यह दर्शाता है कि किसी स्कूल के स्टाफ के सदस्य किस साधन द्वारा स्कूल आते हैं:



टिप्पणी

स्कूल स्टाँफ के परिवहन के साधन

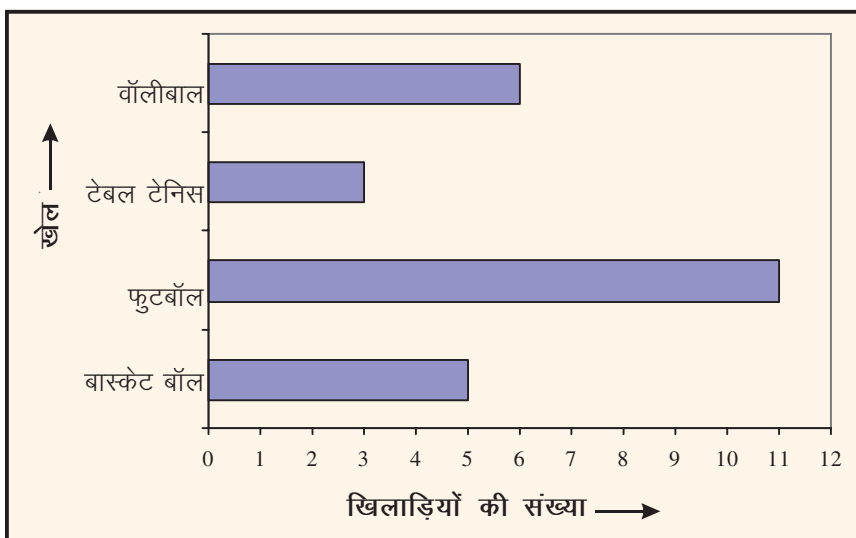


आकृति 24.8

इस दंड आलेख को पढ़िए तथा निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

- (i) स्टाफ के कितने सदस्य साइकिल पर स्कूल आते हैं?
- (ii) स्टाफ के कितने सदस्य बस से स्कूल आते हैं?
- (iii) स्टाफ के सदस्यों का स्कूल आने का सबसे अधिक परिवहन का साधन क्या है?

3. नीचे दिया हुआ दंड आलेख दिए हुए चार खेलों में खिलाड़ियों की संख्या दर्शाता है:



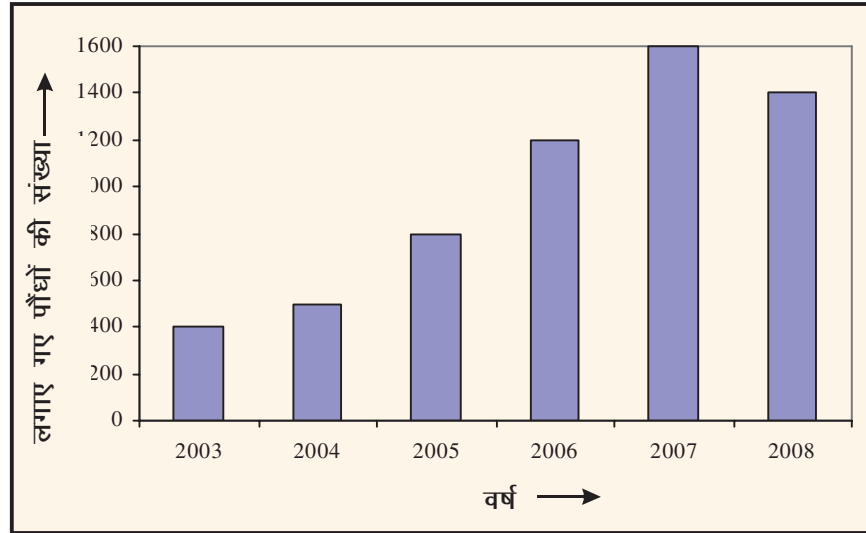
आकृति 24.9



टिप्पणी

दंड आलेख को पढ़िए तथा निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

- एक वालीबॉल टीम में कितने खिलाड़ी खेलते हैं?
 - कौन से खेल अधिकतम खिलाड़ियों द्वारा खेला जाता है?
 - कौन सा खेल अधिकतम तीन खिलाड़ियों द्वारा खेला जाता है?
4. नीचे दिया गया दंड आलेख विशेष ऐजेंसी द्वारा विभिन्न कार्यों में लगाए गए पौधों की संख्या को दर्शाता है:



आकृति 24. 10

उपरोक्त दंड आलेख को पढ़िए तथा निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

- 2003 से 2008 तक उस ऐजेंसी ने कुल कितने पौधे लगाए?
 - किस वर्ष में लगाए गए पौधों की संख्या अधिकतम थी?
 - किस वर्ष में लगाए गए पौधों की संख्या न्यूनतम थी?
 - किस वर्ष में लगाए गए पौधों की संख्या उससे पिछले वर्ष में लगाए गए पौधों की संख्या से कम थी?
5. किसी कंपनी द्वारा विभिन्न मदों पर किसी वर्ष में किया गया व्यय (लाख रुपयों में) निम्न है:

मद	व्यय (लाख रुपयों में)
कर्मचारियों का वेतन	200
यात्रा भत्ता	100
बिजली और पानी	50
किराया	125
अन्य	150

इन आँकड़ों को निरूपित करने के लिए एक दंड चार्ट खींचिए।



24.5.2 आयतचित्र तथा बारंबारता बहुभुज

पहले, हमने किसी दी हुई सूचना को दंड आलेख से निरूपित करना सीखा था। अब हम सीखेंगे कि एक सतत वर्गीकृत बारंबारता को आलेखीय रूप से किस प्रकार निरूपित करते हैं। एक सतत वर्गीकृत बारंबारता बंटन को आलेखीय रूप से एक आयतचित्र द्वारा निरूपित किया जा सकता है। एक आयतचित्र एक ऊर्ध्वाधर दंड आलेख होता है, जिसमें दंडों के बीच में कोई रिक्तता नहीं होती है। इसमें

- वर्गीकृत आँकड़ों के वर्गों को क्षैतिज अक्ष के अनुदिश लेते हैं।
- ऊर्ध्वाधर अक्ष पर, संगत बारंबारताएँ लेते हैं तथा उचित स्केल दोनों अक्षों पर लेते हैं।
- प्रत्येक वर्ग के लिए, एक आयत खींचा जाता है, जिसका आधार उस वर्ग की चौड़ाई होता है, तथा ऊँचाई वर्ग बारंबारता से निर्धारित की जाती है। आयतों के क्षेत्रफल उनकी संगत बारंबारताओं के समानुपाती होते हैं।

आइए इसे एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट करें।

उदाहरण 24.9: किसी कक्षा टेस्ट में 20 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए अंकों का बंटन निम्न है:

प्राप्त अंक	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
विद्यार्थियों की संख्या	1	3	1	6	4	5

इन आँकड़ों के लिए एक आयतचित्र खींचिए।

हल: हम आयतचित्र खींचने के लिए, निम्न चरणों का अनुसरण करते हैं:

चरण 1: एक आलेख कागज (ग्राफपेपर) पर दो लांबिक रेखाएँ खींचिए तथा उन्हें क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर अक्ष कहिए।

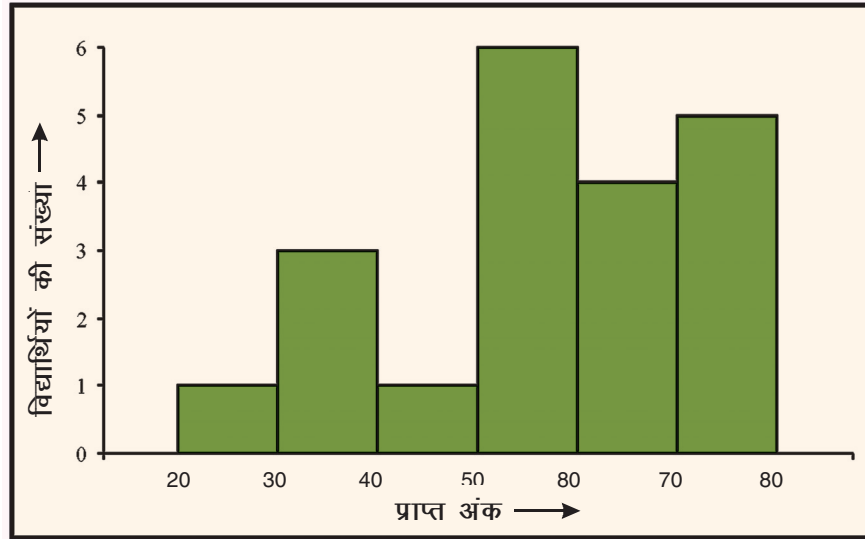
चरण 2: क्षैतिज अक्ष के अनुदिश, हम वर्ग (प्राप्त अंक) 20-30, 30-40, ... (यहाँ प्रत्येक की चौड़ाई 10 है) लेते हैं।

चरण 3: ऊर्ध्वाधर अक्ष पर संगत बारंबारताओं (विद्यार्थियों की संख्या) को निरूपित करने के लिए उपयुक्त स्केल चुनिए।

चरण 4: आकृति 24.11 में दर्शाएनुसार आयत खींचिए।



टिप्पणी



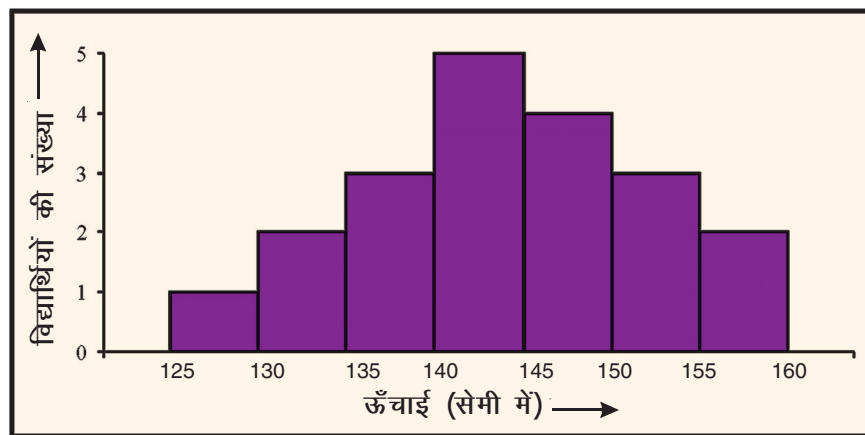
आकृति 24.11

आकृति 24.11 एक कक्षा टेस्ट में 20 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए अंकों का आयत चित्र दर्शाता है।

उदाहरण 24.10: निम्न आँकड़ों के लिए एक आयत चित्र खींचिए:

ऊँचाई (सेमी में)	125-130	130-135	135-140	140-145	145-150	150-155	155-160
विद्यार्थियों की संख्या	1	2	3	5	4	3	2

हल: उपरोक्त उदाहरण में सुझाए गए चरणों के आधार पर इस सारणी को निरूपित करने वाला आयतचित्र निम्न है।



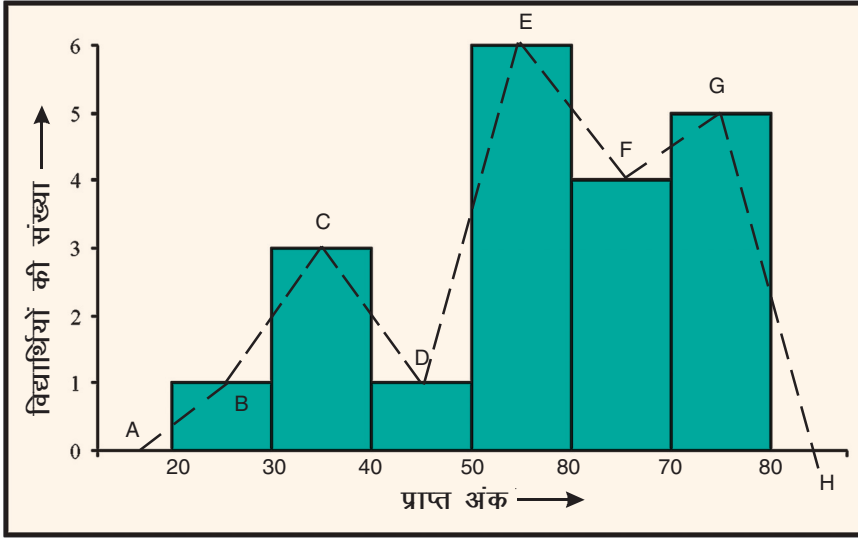
आकृति 24.12



टिप्पणी

बारंबारता बहुभुज

एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन को आलेखीय रूप से निरूपित करने की एक अन्य विधि भी है। इसे बारंबारता बहुभुज कहते हैं। यह देखने के लिए कि इसका क्या अर्थ है, आइए आकृति 24.13 पर विचार करें।



आकृति 24.13

मान लीजिए B, C, D, E, F तथा G आसन्न आयतों के शीर्षों के मध्य बिन्दु हैं (आकृति 24.13)। रेखाखंडों (बिन्दुंकित) द्वारा B से C, C से D, D से E, E से F और F से G को मिलाइए।

बहुभुज को पूरा करने के लिए, B को A (वर्ग 10–20 के मध्य बिन्दु) से तथा G को H (वर्ग 80–90 के मध्य बिन्दु) से मिलाइए।

इस प्रकार बहुभुज ABCDEFGH उदाहरण 24.9 में दिए आँकड़ों को निरूपित करने वाला एक बारंबारता बहुभुज है।

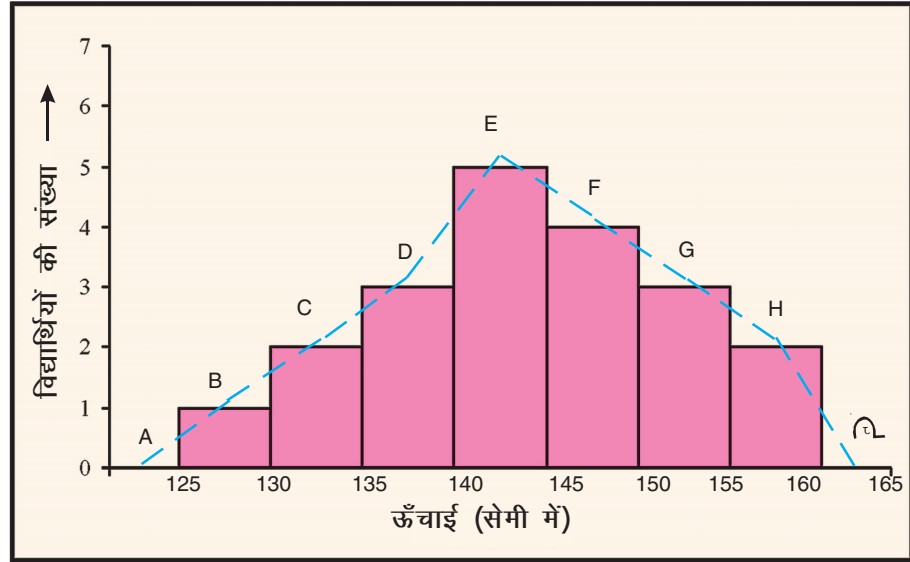
टिप्पणी: यद्यपि, सबसे पहले वर्ग के पहले कोई वर्ग नहीं है तथा सबसे आखिरी वर्ग के आगे कोई वर्ग नहीं है, फिर भी हम इन दोनों वर्गों को शून्य बारंबारताओं के साथ जोड़ देते हैं, ताकि हम बारंबारता बहुभुज का वही क्षेत्रफल बना लें, जो आयत चित्र का क्षेत्रफल है।

उदाहरण 24.11: उदाहरण 24.10 में दिए आँकड़ों के लिए एक बारंबारता बहुभुज खींचिए।

हल: इन आँकड़ों को निरूपित करने वाले आयतचित्र को आकृति 24.12 में दिखाया गया है। बारंबारता बहुभुज खींचने के लिए, हम ऊपर वर्णित विधि अपनाते हैं। इन आँकड़ों के लिए वाँछित बारंबारता बहुभुज ABCDEFGHI नीचे दिया गया है।



टिप्पणी



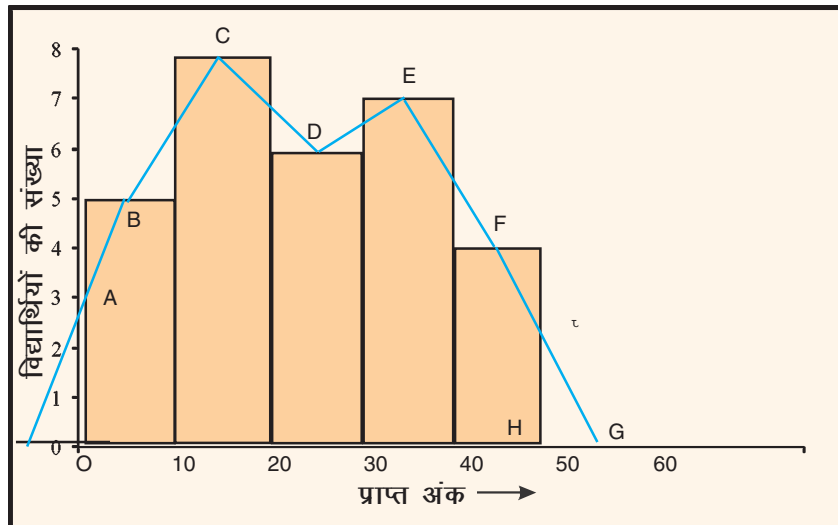
आकृति 24.14

उदाहरण 24.12: एक गणित परीक्षा में, कक्षा IX के 30 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए अंक निम्न सारणी में दिए हैं:

प्राप्त अंक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
विद्यार्थियों की संख्या	5	8	6	7	4

इन आँकड़ों के लिए एक बारंबारता बहुभुज खींचिए।

हल: आइए पहले इन आँकड़ों के लिए एक आयत चित्र खींचते हैं। जैसा आकृति 24.15 में दिखाया गया है। आकृति 24.15 में दर्शाए अनुसार, आयतों के शीर्षों के मध्य बिन्दुओं B, C, D, E और F को अंकित कीजिए। यहाँ पहला वर्ग 0-10 है। अतः, इससे पहले आने वाले वर्ग के लिए, हम क्षैतिज अक्ष को ऋणात्मक दिशा की ओर बढ़ा देते हैं तथा **काल्पनिक** वर्ग (-10)-0 का मध्य बिन्दु ज्ञात करते हैं।



आकृति 24.15



टिप्पणी

B को वर्ग $(-10)-0$ के मध्य बिन्दु से मिलाइए। मान लीजिए कि यह रेखाखंड ऊर्ध्वाधर अक्ष को बिंदु A पर प्रतिच्छेद करता है। मान लीजिए कि G वर्ग $50-60$ (अंतिम वर्ग के बाद वाला वर्ग) का मध्य बिंदु है। मान लीजिए कि FG अंतिम आयत की लंबाई को I पर प्रतिच्छेद करता है (आकृति 24.15)। तब OABCDERGIH दिए हुए आँकड़ों को निरूपित करने वाला बारंबारता बहुभुज है।

टिप्पणी: हमने O से पहले के बिंदु तथा G को बिन्दु क्यों नहीं लिया? यह इस कारण है कि विद्यार्थी द्वारा प्राप्त किए अंक O से कम नहीं हो सकते तथा अधिकतम अंक 50 से अधिक नहीं हो सकते। आकृति में, सिरों वाले रेखाखंडों को केवल आंशिक रूप से ऊर्ध्वाधर खींचा गया है, तथा ऊर्ध्वाधरतः 0 और 50 तक लाया गया है। बारंबारता बहुभुज को स्वतंत्र रूप से भी बिना आयतचित्र खींचे भी बनाया जा सकता है। हम निम्न उदाहरण द्वारा इसे स्पष्ट करेंगे:

उदाहरण 24.13: उदाहरण 24.9 में दिए आँकड़ों के लिए बिना आयतचित्र खींचे हुए, एक बारंबारता बहुभुज खींचिए।

हल: बिना आयतचित्र खींचे हुए, हम बारंबारता बहुभुज खींचने के लिए, निम्न चरणों का अनुसरण करते हैं।

चरण 1: दो परस्पर लंब रेखाएँ खींचते हैं।

चरण 2: वर्गों के वर्ग चिन्ह ज्ञात करते हैं।

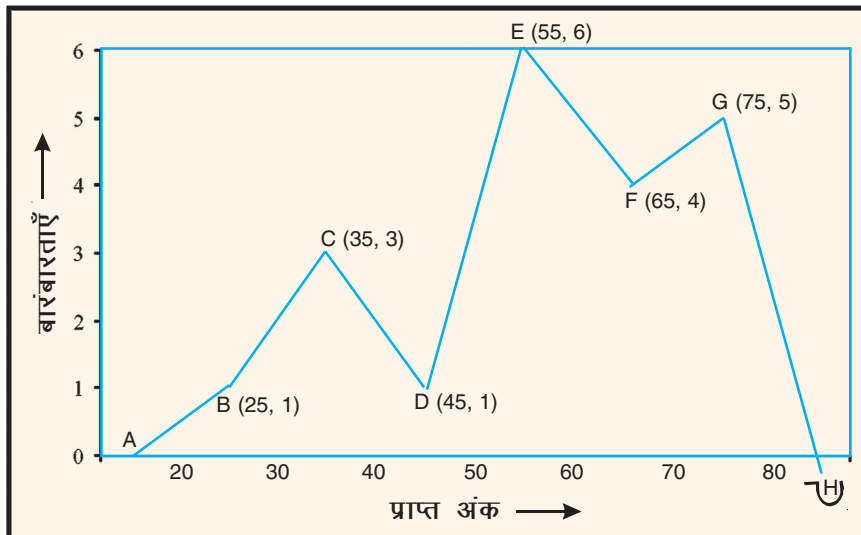
$$\text{यहाँ, ये : } \frac{20+30}{2}, \frac{30+40}{2}, \frac{40+50}{2}, \frac{50+60}{2}, \frac{60+70}{2} \text{ and } \frac{70+80}{2}$$

अर्थात् 25, 35, 45, 55, 65 और 75 हैं।

चरण 3: बिंदुओं B (25, 1), C(35, 3), D(45, 1), E(55, 6), F(65, 4) और G(75, 5), अर्थात् (वर्ग चिन्ह बारंबारता) को आलेखित करते हैं।

चरण 4: बिंदुओं B, C, D, E, F और G को रेखाखंडों द्वारा पहले स्पष्ट किया गया है।

वाँछित बारंबारता बहुभुज (ABCDEFGH) नीचे दिया गया है:



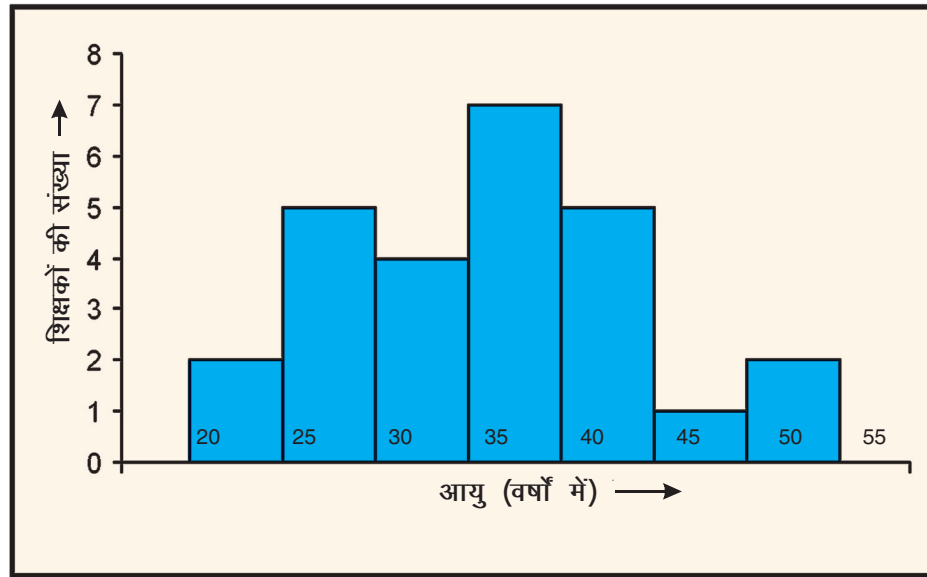
आकृति 24.16



एक आयत चित्र को पढ़ना

निम्न उदाहरण पर विचार कीजिए:

उदाहरण 24.14: नीचे दिए आयतचित्र का अध्ययन कीजिए तथा आगे दिए प्रश्नों के उत्तर दीजिए:



आकृति 24.17

- स्कूल में सबसे बड़े आयु समूह और सबसे छोटे आयु समूह वाले शिक्षकों की संख्याओं का योग क्या है?
- किस आयु समूह में शिक्षकों की संख्या अधिकतम है?
- किस आयु समूह में शिक्षकों की संख्या 4 है?
- किन दो आयु समूहों में शिक्षकों की संख्याएँ बराबर हैं?

हल:

- सबसे बड़े और सबसे छोटे आयु समूहों में शिक्षकों की संख्याओं का योग = $3 + 2 = 5$
- आयु समूह 30-35 में शिक्षकों की संख्या अधिकतम है।
- आयु समूह 30-35 में शिक्षकों की संख्या 4 है।
- आयु समूह 25-30 और 40-45 में शिक्षकों की संख्याएँ बराबर हैं। प्रत्येक समूह में 4 शिक्षक हैं। आयु समूह 20-25 और 50-55 में भी शिक्षकों की संख्याएँ बराबर हैं। प्रत्येक समूह में यह संख्या 2 है।



देखें आपने कितना सीखा 24.5



टिप्पणी

1. रिक्त स्थान भरिये:

- (i) एक आयतचित्र में, वर्ग अन्तरालों को सामान्यतः _____ के अनुदिश लिया जाता है।
- (ii) एक आयतचित्र में, वर्ग बारंबारताओं को सामान्यतः _____ के अनुदिश लिया जाता है।
- (iii) एक आयतचित्र में आयतों के क्षेत्रफल संगत वर्गों की _____ के समानुपाती होते हैं।
- (iv) एक आयतचित्र _____ का एक आलेखीय निरूपण होता है।

2. 26 श्रमिकों की दैनिक आय नीचे दी गई है:

दैनिक आय (₹ में)	150-200	200-250	250-300	300-350	350-400
श्रमिकों की संख्या	4	8	5	6	3

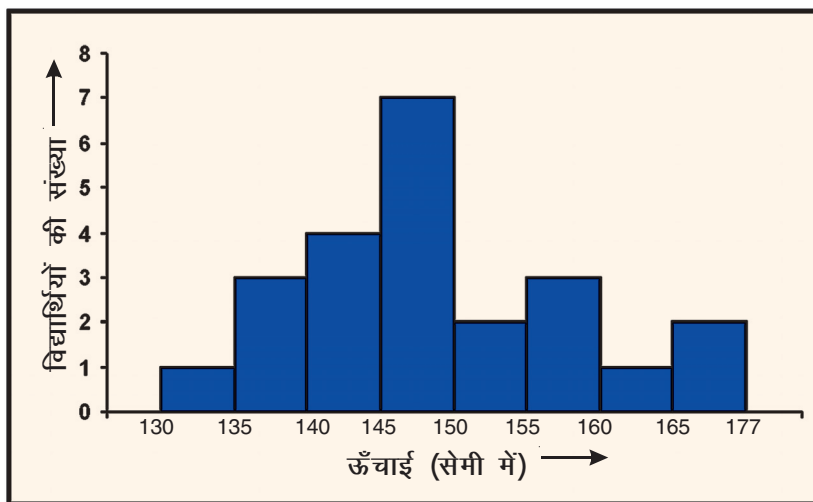
इन आँकड़ों को निरूपित करने के लिए, एक आयतचित्र खींचिए।

3. प्रश्न 2 में दिए गए आँकड़ों के लिए निम्नविधि से एक बारंबारता बहुभुज खींचिए:

- (i) एक आयत चित्र खींचकर
- (ii) बिना एक आयतचित्र खींचते हुए

4. नीचे आयतचित्र को देखिए तथा निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

- (i) इस आयतचित्र से क्या सूचना प्राप्ती होती है?
- (ii) किस वर्ग (समूह) में विद्यार्थियों की संख्या अधिकतम है?
- (iii) कितने विद्यार्थियों की ऊँचाई 145 सेमी या उससे अधिक है?
- (iv) कितने विद्यार्थियों की ऊँचाई 140 सेमी से कम है?
- (v) कितने विद्यार्थियों की ऊँचाई 140 सेमी या उससे अधिक है परंतु 145 सेमी से कम है?



आकृति 24.18



आइए दोहराएँ

- सँख्यकी गणित की वह शाखा है, जिसमें आँकड़ों के संग्रह, संगठन, विश्लेषण और निर्वचन (की व्याख्या) के साथ कार्य किया जाता है।
- शब्द सँख्यकी का प्रयोग एकवचन और बहुवचन दोनों अर्थों में किया जाता है।
- उत्तर देने वालों से जैसे के तैसे प्राप्त आँकड़े यथा प्राप्त आँकड़े कहलाते हैं।
- आँकड़े प्राथमिक कहलाते हैं, यदि अन्वेषक उन्हें स्वयं अपने डिजाइन किए गए साधनों से एकत्रित करता है।
- अन्य स्रोतों जैसे छपी हुई रिपोर्टें तथा प्रयोगकर्ताओं द्वारा स्वयं नहीं, एकत्रित किए गए आँकड़े गौण कहलाते हैं।
- आरोही क्रम या अवरोही क्रम में व्यवस्थित यथाप्राप्त आँकड़े पंक्तिबद्ध आँकड़े कहलाते हैं।
- जब पंक्तिबद्ध आँकड़ों को बारंबारताओं के साथ व्यवस्थित किया जाता है, तो कहा जाता है कि उनसे अवर्गीकृत आँकड़ों की एक बारंबारता सारणी बन गई है या एक अवर्गीकृत बारंबारता सारणी बन गई है।
- जब आँकड़ों को वर्गों/समूहों में बाँटा जाता है, तो वे वर्गीकृत आँकड़ें कहलाते हैं।
- आँकड़ों में सबसे बड़े और सबसे छोटे आँकड़ों का अंतर इन यथाप्राप्त आँकड़ों का परिसर कहलाता है।
- आँकड़ों के वर्गों की संख्या उनके परिसर और वर्गों की मापों के अनुसार निर्णय करने पर निर्भर करती है।
- किसी वर्ग मान लीजिए 10-15 में, 10 वर्ग की निम्न सीमा और 20 उपरि सीमा होती है।
- किसी विशेष वर्ग में, प्रेक्षणों की संख्या उसकी बारंबारता कहलाती है तथा बारंबारताओं के साथ वर्गों को दर्शाने वाली सारणी एक बारंबारता सारणी कहलाती है।
- कभी-कभी वर्गों को सतत बनाने के लिए, बदला जाता है। ऐसी स्थिति में वर्ग सीमाएँ सत्य वर्ग सीमाएँ कहलाती हैं।
- किसी वर्ग की बारंबारता और उस वर्ग से पहले आने वाली बारंबारताओं के योग को उस वर्ग की संचयी बारंबारता कहते हैं।
- संचयी बारंबारताएँ दर्शाने वाली सारणी एक संचयी बारंबारता सारणी कहलाती है।
- एक दंड आलेख संख्यात्मक आँकड़ों का एक ऐसा आलेखीय निरूपण होता है, जिसमें एक समान चौड़ाई के दंड (या आयत) क्षैतिजतः या ऊर्ध्वाधरतः ऐसे खींचे जाते हैं कि उनके बीच में समान रिक्तता हो।



टिप्पणी

- एक आयतचित्र सतत वर्गों वाले एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन का एक आलेखीय निरूपण होता है। एक आयतचित्र में, आयतों का क्षेत्रफल संगत बारंबारताओं के समानुपाती होता है।
- एक बारंबारता बहुभुज प्राप्त करने के लिए, पहले आसन्न आयतों के शीर्षों के मध्य बिंदुओं को रेखाखंडों द्वारा मिलाया जाता है तथा इसके बाद सबसे छोटे वर्ग वाले शीर्ष के मध्य बिंदु को उस वर्ग से पहले वाले वर्ग के मध्य बिंदु से और अंतिम वर्ग के शीर्ष के मध्य बिंदु को उससे अगले वर्ग के मध्य बिंदु से मिला देते हैं।
- एक बारंबारता बहुभुज को बिना आयतचित्र खींचे हुए ही, वर्गों के वर्गचिन्हों और उनकी संगत बारंबारताओं का प्रयोग करते हुए, खींच सकते हैं।



आइए अभ्यास करें

- रिक्त स्थानों को उपयुक्त शब्दों/वाक्यांशों से भरिए ताकि कथन सत्य हो जाएँ:
 - जब आँकड़ों को बारंबारताओं के साथ समान मापों के वर्गों में संघनित किया जाता है, तो वे _____ आकड़ें कहलाते हैं तथा यह सारणी _____ सारणी कहलाती है।
 - यदि वर्गों को सतत बनाने के लिए वर्ग सीमाओं को समायोजित किया जाता है, तो ये नई वर्ग सीमाएँ _____ कहलाती हैं।
 - किसी विशेष वर्ग में आने वाले प्रेक्षणों की संख्या उस वर्ग की _____ कहलाती है।
 - किसी वर्ग की उपरि सीमा और निम्न सीमा का अंतर उस वर्ग का _____ कहलाती है।
 - किसी वर्ग की बारंबारता तथा उस वर्ग से पहले आने वाले वर्गों की बारंबारताओं का योग उस वर्ग की _____ बारंबारता कहलाती है।
 - वर्गमाप = वर्ग की _____ और _____ का अंतर
 - आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित यथाप्राप्त आँकड़े _____ आँकड़े कहलाते हैं।
 - आँकड़ों में आने वाले अधिकतम ओर न्यूनतम प्रेक्षणों का अंतर यथाप्राप्त आँकड़ों का _____ कहलाता है।
- 30 परिवारों में से प्रत्येक में टीवी सेटों की संख्या निम्न है:

1, 2, 2, 4, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 1, 3

1, 2, 2, 1, 2, 0, 3, 3, 1, 2, 1, ,1 0, 1, 1

इन आँकड़ों को निरूपित करने वाली एक बारंबारता सारणी बनाइए।



टिप्पणी

3. 50 परिवारों में से प्रत्येक परिवार में वाहनों की संख्या निम्न है:

2, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 1,
2, 2, 1, 1, 3, 1, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 4, 1
3, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 3, 2, 1, 2

इन आँकड़ों के लिए एक बारंबारता सारणी बनाइए।

4. नए वर्ष के 40 कार्डों के भार (ग्राम में) निम्न प्राप्त किए जाते हैं:

10.4 6.3 8.7 7.3 8.8 9.1 6.7 11.1 14.0 12.2
11.3 9.4 8.6 7.1 8.4 10.0 9.1 8.8 10.3 10.2
7.3 8.6 9.7 10.9 13.6 9.8 8.9 9.2 10.8 9.4
6.2 8.8 9.4 9.9 10.1 11.4 11.8 11.2 10.1 8.3

वर्गों 5.5-7.5, 7.5-9.5 इत्यादि का प्रयोग करते हुए, एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन तैयार कीजिए।

5. 30 गाजरों की लंबाईयाँ सेंटीमटरों में (निकटतम सेमी तक) निम्न हैं:

15 21 20 10 18 18 16 18 20 20
18 16 13 15 15 16 13 14 14 16
12 15 17 12 14 15 13 11 14 17

बराबर मापों के अंतराल लेते हुए, जिनमें एक अंतराल 10-12 (12 सम्मिलित नहीं है) हो, एक बारंबारता सारणी बनाइए।

6. नीचे 40 व्यक्तियों के भार (किग्रा में) नीचे दिए हैं:

भार (किग्रा में)	व्यक्तियों की संख्या
40-45	4
45-50	5
50-55	10
55-60	7
60-65	6
65-70	8
योग	40

- (i) वर्गों 40-45, 45-50 इत्यादि के वर्ग चिन्ह ज्ञात कीजिए।
(ii) एक संचयी बारंबारता बंटनसारणी की रचना कीजिए।



7. किसी बंटन के वर्ग चिन्ह और संगत बारंबारताएँ नीचे सारणी में दी हैं:

वर्ग चिन्ह	5	15	25	35	45	55	65	75
बारंबारता	2	6	10	15	12	8	5	2

इनकी बारंबारता सारणी बनाइए।

8. नीचे दी हुई बारंबारता सारणी के लिए

वर्ग	बारंबारता
15-20	2
20-25	3
25-30	5
30-35	7
35-40	4
40-45	3
45-50	1
योग	25

(i) वर्ग 15-20 की निम्न सीमा लिखिए।

(ii) वर्ग 25-30 की वर्ग सीमाएँ लिखिए।

(iii) वर्ग 35-40 का वर्ग चिन्ह लिखिए।

(iv) वर्ग माप निर्धारित कीजिए।

(v) एक संचयी बारंबारता सारणी बनाइए।

9. नीचे एक संचयी बारंबारता सारणी दी है, जिसमें किसी कक्षा के 50 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक दर्शाए गए हैं:

प्राप्त अंक	विद्यार्थियों की संख्या
20 से कम	15
40 से कम	24
60 से कम	29
80 से कम	34
100 से कम	50

उपरोक्त आँकड़ों के लिए साधारण बारंबारता सारणी बनाइए।

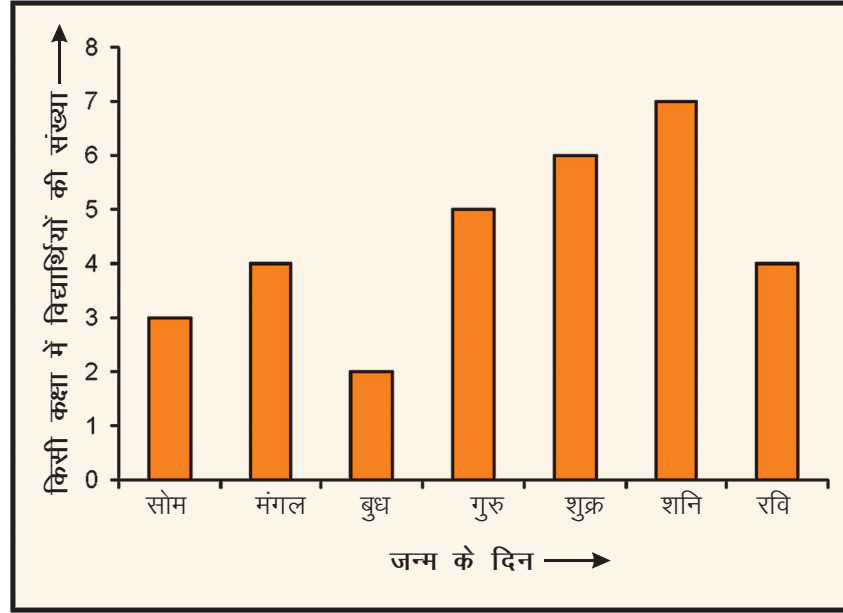


टिप्पणी

10. किसी दुकानदार की बिक्री के निम्न आँकड़ों के लिए एक दंड आलेख खींचिए:

दिन	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	गुरुवार	शुक्रवार	शनिवार
बिक्री (₹ में)	16000	18000	17500	9000	85000	16500

11. निम्न दंड आलेख का अध्ययन कीजिए और फिर आगे दिए प्रश्नों के उत्तर दीजिए:



आकृति 24.19

- (i) इस दंड आलेख से क्या सूचना मिलती है?
(ii) किस दिन अधिकतम विद्यार्थियों का जन्म हुआ?
(iii) गुरुवार के दिन मंगलवार की अपेक्षा कितने अधिक विद्यार्थियों का जन्म हुआ है?
(iv) कक्षा में विद्यार्थियों की कुल संख्या क्या है?
12. 50 प्रत्याशियों द्वारा एक प्रतियोगिता में क्रासवर्ड पहेली पूरी करने के लिए दिया गया समय (मिनटों में) नीचे सारणी में दिए गए हैं:

समय (मिनटों में)	प्रत्याशियों की संख्या
20-25	8
25-30	10
30-35	9
35-40	12
40-45	6
45-50	5



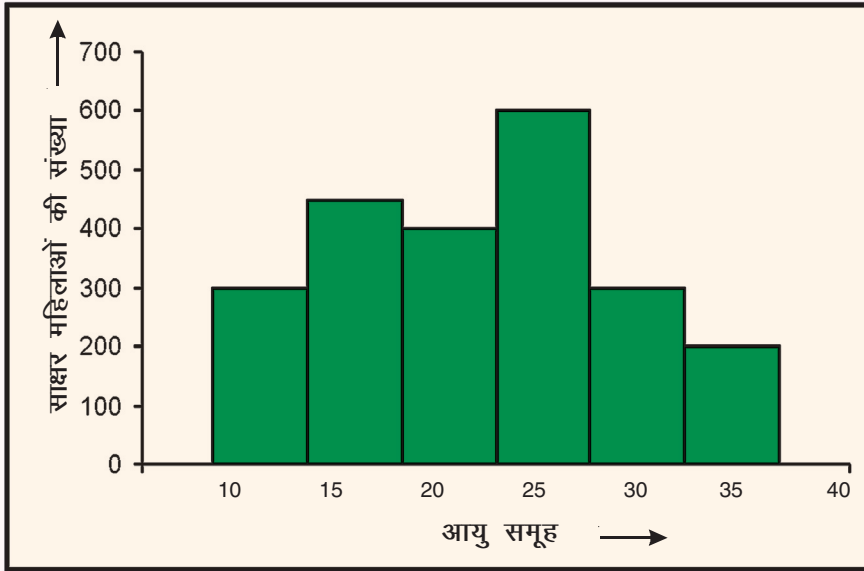
टिप्पणी

(i) इन आँकड़ों के लिए एक आयतचित्र खींचिए।

(ii) एक बारंबारता बहुभुज भी खींचिए।

13. प्रश्न 12 के लिए, बिना आयतचित्र खींचे, एक बारंबारता बहुभुज खींचिए।

14. नीचे दिया गया आयतचित्र, किसी शहर में आयु समूह 10–14 (वर्षों में) में साक्षर महिलाओं की संख्या प्रदर्शित करता है:



आकृति 24.20

इस आयतचित्र का अध्ययन कीजिए तथा निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

(i) इस शहर में, आयु समूह 10–40 में कितनी साक्षर महिलाएँ थीं?

(ii) किस आयु समूह में साक्षर महिलाओं की संख्या अधिकतम थी?

(iii) किन दो आयु समूहों में साक्षर महिलाओं की संख्याएँ बराबर हैं?

(iv) बताइए सत्य है या असत्य:

आयु समूह 25–30 में साक्षर महिलाओं की संख्या आयु समूहों 20–25 और 35–40 में साक्षर महिलाओं की संख्याओं के योग के बराबर है।



सही विकल्प चुनिए: [15 से 20 तक]

15. वर्गों 90–120 और 120–150 के वर्ग चिन्हों का योग है:

- (A) 210 (B) 220
(C) 240 (D) 270

16. आँकड़ों 28, 17, 20, 16, 19, 12, 30, 32, 10 का परिसर है:

- (A) 22 (B) 28
(C) 30 (D) 32

17. किसी बारंबारता बंटन में, किसी वर्ग का मध्य बिन्दु 12 है तथा उसकी चौड़ाई 6 है। इस वर्ग की निम्न सीमा है:

- (A) 6 (B) 9
(C) 12 (D) 18

18. किसी बारंबारता बंटन में पांच सतत वर्गों की चौड़ाइयां 5 है तथा सबसे छोटे (पहले) वर्ग की निम्न सीमा 10 है। सबसे बड़े (अंतिम) वर्ग की उपरि सीमा है:

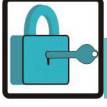
- (A) 15 (B) 20
(C) 30 (D) 35

19. किसी बारंबारता बंटन के वर्ग चिन्ह (एक ही क्रम में) 10, 15, 20, हैं। वर्ग चिन्ह 15 का संगत वर्ग है

- (A) 11.5-18.5 (B) 17.5-22.5
(C) 12.5-17.5 (D) 13.5-16.5

20. किसी सतत बारंबारता बंटन के लिए बारंबारता बहुभुज खींचने के लिए, हम वे बिंदु आलेखित करते हैं, जिनकी कोटियाँ संगत वर्गों की बारंबारताएँ होती हैं तथा भुज क्रमशः हैं

- (A) वर्गों के वर्ग चिन्ह (B) वर्गों की निम्न सीमाएँ
(C) वर्गों की उपरि सीमाएँ (D) पिछले वर्ग की उपरि सीमाएँ



देखें आपने कितना सीखा के उत्तर



टिप्पणी

24.1

1. (a) वर्गीकरण, संगठन, निर्वचन (b) संख्यात्मक आँकड़े (c) प्राथमिक
(d) गौण (e) संख्यात्मक आँकड़े
2. प्राथमिक 3. गौण

24.2

2. 21 सेमी

4

प्राप्त अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0-10	1
10-19	2
20-29	1
30-39	2
40-49	5
50-59	6
60-69	6
70-79	4
80-89	2
90-99	1
योग	30

5.

वर्ग अंतराल	बारंबारता
210-230	2
230-250	5
250-270	2
270-290	2
290-310	4
310-330	6
330-350	2
350-370	2
370-390	0
390-410	3
योग	25

19 विद्यार्थियों ने 49 से अधिक अंक प्राप्त किए।

6. (a) 6 (b) 43 (c) 49

24.3

1. (i)

वर्ग	बारंबारता	संचयी बारंबारता
1-5	4	4
6-10	6	10
11-15	10	20
16-20	13	33
21-25	6	39
26-30	2	41
योग	41	



टिप्पणी

(ii)

वर्ग	बारंबारता	संचयी बारंबारता
0-10	3	3
10-20	10	13
20-30	24	37
30-40	32	69
40-50	9	78
50-60	7	85
योग	85	

2.

ऊँचाई (सेमी में)	विद्यार्थियों की संख्या	संचयी बारंबारता
110-120	14	14
120-130	30	44
13-140	60	104
140-150	42	146
150-160	14	160
योग	160	

140 विद्यार्थियों की ऊँचाई 150 सेमी से कम है।

24.4

- (i) दंड (ii) बराबर (iii) समानुपाती
- (i) 2 (ii) 6 (iii) बस
- (i) 6 (ii) फुटबॉल (iii) टेबल टेनिस
- (i) 5900 (ii) 2007 (iii) 2003 (iv) 2008

24.5

- (i) क्षेत्रीय अक्ष
(ii) ऊर्ध्वाधर अक्ष
(iii) बारंबारता
(iv) सतत वर्गीकृत बारंबारता बंटन
- (i) विद्यार्थियों की ऊँचाइयाँ (सेमी में)
(ii) 145-150
(iii) 15
(iv) 4
(v) 13



आइए अभ्यास करें के उत्तर



टिप्पणी

1. (i) बारंबारता सारणी (ii) सत्य सीमाएँ
(iii) बारंबारता (iv) वर्ग माप
(v) संचयी बारंबारता (vi) उपरि सीमा, निम्न सीमा
(vii) पंक्तिबद्ध (vii) परिसर

2.

टीवी सैटों की संख्या	परिवारों की संख्या
0	2
1	15
2	8
3	4
4	1
योग	30

3.

वाहनों की संख्या	परिवारों की संख्या
0	2
1	27
2	16
3	4
4	1
योग	50

4.

भार (ग्राम में)	कार्डों की संख्या
5.5-7.5	6
7.5-9.5	15
9.5-11.5	15
11.5-13.5	2
13.5-15.5	2
योग	40

5.

लंबाई (सेमी में)	गाजरों की संख्या
10-12	2
12-14	5
14-16	9
16-18	6
18-20	4
20-22	4
योग	30

6. (i) 42.5

(ii)

भार (किग्रा में)	व्यक्तियों की संख्या	संचयी बारंबारता
40-45	4	4
45-50	5	9
50-55	10	19
55-60	7	26
60-65	6	32
65-70	8	40
योग	40	



टिप्पणी

7.

वर्ग अंतराल	बारंबारता	संचयी बारंबारता
0-10	2	2
10-20	6	8
20-30	10	18
30-40	15	33
40-50	12	45
50-60	8	53
60-70	5	58
70-80	2	60
योग	60	

8. (i) 15 (ii) निम्न सीमा: 25, उपरि सीमा: 30
(iii) 37.5 (iv) 5

(iv)

वर्ग अंतराल	बारंबारता	संचयी बारंबारता
15-20	2	2
20-25	3	5
25-30	5	10
30-35	7	17
35-40	4	21
40-45	3	24
45-50	1	25
योग	25	

9.

प्राप्त अंक	विद्यार्थियों की संख्या (बारंबारता)
0-20	15
20-40	9
40-60	5
60-80	5
80-100	16

11. (i) किसी कक्षा में विद्यार्थियों के जन्म के दिन
(ii) शनिवार

(iii) 1

(iv) 31

14. (i) 2250

(ii) 25-30

(iii) 10-15 और 30-35

(iv) सत्य

15. (C)

16. (A)

17. (B)

18. (D)

19. (C)

20. (A)

