



केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापक

पिछले अध्याय में हमने सीखा है कि किसी सीमा तक आँकड़ों का सार बारम्बारता सारणी द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। हमने यह भी देखा कि आँकड़ों की प्रकृति के बारे में विस्तृत जानकारी हेतु आँकड़ों को किस प्रकार दण्डालेख, आयत चित्र एवं बारंबारता बहुभुज के रूप में आलेखीय निरूपण किया जाता है।

आँकड़ों के निश्चित गुणों को प्रदर्शित करने के लिए, आँकड़ों के कुछ तथ्यों की परिमाणात्मक रूप में विवेचना की जा सकती है। औसत, आँकड़ों के प्रतिनिधित्व या केन्द्रीय मान को इंगित करने वाली एक संख्या है, और यह दो सीमाओं के मध्य कहीं भी स्थित होता है। इस कारण से, औसत केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप कहलाता है।

इस अध्याय में हम कुछ सामान्य केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापों का अध्ययन करेंगे, जैसे—

- (i) अंकगणितीय औसत जो माध्य कहलाता है।
- (ii) माध्यक
- (iii) बहुलक



उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप समर्थ हो जाएंगे कि:

- अवर्गीकृत तथा वर्गीकृत आँकड़ों के माध्य को परिभाषित कर सकें;
- यथा प्राप्त, अवर्गीकृत तथा वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य साधारण तथा संक्षिप्त विधि से परिकलन कर सकें;
- माध्यक तथा बहुलक को परिभाषित कर सकें;
- यथा प्राप्त आँकड़ों के माध्यक तथा बहुलक का परिकलन कर सकें।



टिप्पणी

25.1 अंकगणितीय औसत या माध्य

आपने लोगों को औसत चाल, औसत वर्षा, औसत ऊंचाई, औसत स्कोर (अंक) इत्यादि के बारे में बात करते हुए अवश्य सुना होगा। यदि हमें कहा जाये कि विद्यार्थियों की औसत ऊंचाई 150 सेमी है इसका यह अर्थ नहीं है कि प्रत्येक विद्यार्थी की ऊंचाई 150 सेमी है। सामान्यतया इसका यह मतलब होता है कि विद्यार्थियों की ऊंचाई 150 सेमी के आस-पास है। कुछ विद्यार्थियों की ऊंचाई 150 सेमी से अधिक हो सकती है और कुछ विद्यार्थियों की ऊंचाई ठीक 150 सेमी हो सकती है।

25.1.1 यथाप्राप्त आँकड़ों का माध्य

यथाप्राप्त आँकड़ों का माध्य ज्ञात करने के लिए हम आँकड़ों के सभी प्रेक्षणों को जोड़कर उनके योग को प्रेक्षणों की संख्या से भाग करते हैं। इस प्रकार, n प्रेक्षणों x_1, x_2, \dots, x_n का माध्य है

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

इसे सामान्यतः \bar{x} से प्रदर्शित किया जाता है, अतः

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (I)\end{aligned}$$

जहाँ प्रतीक “ Σ ” ग्रीक वर्णमाला का बड़ा अक्षर ‘सिग्मा’ है और कुल योग के लिये प्रयुक्त किया जाता है।

इस प्रकार के लंबे व्यंजकों को लिखते समय हम संकेत Σ का प्रयोग कर स्थान की बचत कर सकते हैं। संकेत Σ को हम ‘सिग्मा’ पढ़ते हैं।

$\sum_{i=1}^n x_i$ में i को कुल योग का सूचक कहते हैं।

उदाहरण 25.1: गेहूँ के चार थैलों का भार (किग्रा में) 103, 105, 102, 104 है। माध्य भार ज्ञात कीजिए।

हल: माध्य भार $(\bar{x}) = \frac{103 + 105 + 102 + 104}{4}$ किग्रा



टिप्पणी

$$= \frac{414}{4} \text{ किग्रा} = 103.5 \text{ किग्रा}$$

उदाहरण 25.2: पिछले पांच वर्षों में एक विद्यालय में 605, 710, 745, 835 तथा 910 बच्चों ने दाखिला लिया। प्रति वर्ष औसत दाखिला क्या था?

हल: औसत दाखिला (या माध्य दाखिला)

$$= \frac{605 + 710 + 745 + 835 + 910}{5} = \frac{3805}{5} = 761$$

उदाहरण 25.3: एक विद्यालय की कक्षा IX के 30 विद्यार्थियों द्वारा गणित की परीक्षा में प्राप्त अंक निम्नलिखित हैं:

40	73	49	83	40	49	27	91	37	31
91	40	31	73	17	49	73	62	40	62
49	50	80	35	40	62	73	49	31	28

माध्य अंक ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ, प्रेक्षणों की संख्या (n) = 30

$$x_1 = 40, x_2 = 73, \dots, x_{10} = 31$$

$$x_{11} = 41, x_{12} = 40, \dots, x_{20} = 62$$

$$x_{21} = 49, x_{22} = 50, \dots, x_{30} = 28$$

सूत्र (I) से, विद्यार्थियों के माध्य अंक इस प्रकार हैं:

$$\begin{aligned} \text{माध्य} = (\bar{x}) &= \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{n} = \frac{40 + 73 + \dots + 28}{30} = \frac{1455}{30} \\ &= 48.5 \end{aligned}$$

उदाहरण 25.4: उदाहरण 25.1 पर पुनः जाएं। दर्शाइए कि $x_1 - \bar{x}$, $x_2 - \bar{x}$, $x_3 - \bar{x}$ और $x_4 - \bar{x}$ का योग 0 है, जहाँ x_i चार थैलों का भार तथा \bar{x} उनका माध्य है।

$$\text{हल: } x_1 - \bar{x} = 103 - 103.5 = -0.5, x_2 - \bar{x} = 105 - 103.5 = 1.5$$

$$x_3 - \bar{x} = 102 - 103.5 = -1.5, x_4 - \bar{x} = 104 - 103.5 = 0.5$$

$$\text{इसलिए, } (x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + (x_3 - \bar{x}) + (x_4 - \bar{x}) = -0.5 + 1.5 + (-1.5) + 0.5 = 0$$

उदाहरण 25.5: कक्षा XA के 30 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों का माध्य अंक 48 है जबकि कक्षा XB के 35 विद्यार्थियों के माध्य अंक 50 है। कक्षा X के 65 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों का माध्य अंक ज्ञात करो।



हल: X A के 30 विद्यार्थियों के माध्य अंक = 48

इसलिए X A के 30 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त कुल अंक = $30 \times 48 = 1440$

इसी प्रकार X B के 35 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त कुल अंक = $35 \times 50 = 1750$

दोनों कक्षाओं द्वारा प्राप्त कुल अंक = $1440 + 1750 = 3190$

65 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंको का माध्य = $\frac{3190}{65} = 49.1$ लगभग

उदाहरण 25.6: 6 प्रेक्षणों का माध्य 40 है। बाद में पता चला कि 82 को गलती से 28 पढ़ लिया गया है। सही माध्य ज्ञात कीजिए।

हल: 6 प्रेक्षणों का माध्य = 40

इसलिए सभी प्रेक्षणों का योग = $6 \times 40 = 240$

चूँकि एक प्रेक्षण 82 को गलती से 28 पढ़ा गया

इसलिए सभी प्रेक्षणों का वास्तविक योग = $240 - 28 + 82 = 294$

इसलिए सही माध्य = $\frac{294}{6} = 49$



देखें आपने कितना सीखा 25.1

1. n प्रेक्षणों x_1, x_2, \dots, x_n के माध्य को ज्ञात करने का सूत्र लिखिए।
2. प्रथम 10 प्राकृत संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए।
3. किसी किरयाना दुकान पर 6 दिनों तक प्रतिदिन चीनी की बिक्री निम्न प्रकार है। प्रतिदिन चीनी की बिक्री का माध्य ज्ञात कीजिए

सोमवार	मंगलवार	बुधवार	गुरुवार	शुक्रवार	शनिवार
74 किग्रा	121 किग्रा	40 किग्रा	82 किग्रा	70.5 किग्रा	130.5 किग्रा

4. 10 लड़कियों की ऊँचाई (सेमी में) निम्न प्रकार है:
142, 149, 135, 150, 128, 140, 149, 152, 138, 145
माध्य ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
5. किसी शहर का 12 क्रमागत दिनों तक अधिकतम तापमान ($^{\circ}\text{C}$ में) नीचे दिया गया है:
32.4 29.5 26.6 25.7 23.5 24.6
24.2 22.4 24.2 23.0 23.2 28.8
माध्य तापमान ज्ञात कीजिए।



6. उदाहरण 25.2 को पुनः देखें। सिद्ध कीजिए कि x_i का माध्य (\bar{x}) से विचलन का योग 0 होगा।
7. 9 प्रेक्षणों का माध्य 35 है। बाद में पाया गया कि एक प्रेक्षण 81 गलती से 18 पढ़ लिया गया है। सही माध्य क्या है?
8. किसी कक्षा के 25 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों का माध्य 35 है जबकि अन्य 35 विद्यार्थियों के अंकों का माध्य 25 है। सभी 60 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों का माध्य ज्ञात कीजिए।

25.1.2 अवर्गीकृत आँकड़ों का माध्य

हम अवर्गीकृत आँकड़ों का माध्य ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित उदाहरण लेते हैं।

20 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों (15 में से) का माध्य ज्ञात करो।

12 10 5 8 15 5 2 8 10 5
10 12 12 2 5 2 8 10 5 10

ये आँकड़े यथाप्राप्त आँकड़ों के रूप में हैं। हम सूत्र (I) का प्रयोग कर माध्य ज्ञात कर सकते

हैं अर्थात् $\frac{\sum x_i}{n}$, लेकिन यह प्रक्रिया अधिक समय लेती है।

हम इन आँकड़ों का माध्य बारम्बारता सारणी बनाकर तथा निम्न सूत्र का प्रयोग कर भी ज्ञात कर सकते हैं।

$$\text{माध्य} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \quad \text{(II)}$$

जहाँ f_i, x_i प्रेक्षण की बारम्बारता है।

आँकड़ों की बारम्बारता सारणी इस प्रकार है:

अंक (x_i)	विद्यार्थियों की संख्या (f_i)
2	4
5	5
8	3
10	5
12	2
15	1
	$\Sigma f_i = 20$

इस बंटन का माध्य ज्ञात करने के लिए हम पहले x_i को उसकी संगत बारम्बारता f_i से गुणा कर



टिप्पणी

$f_i x_i$ प्राप्त करते हैं तथा बारंबारता सारणी में $f_i x_i$ का एक स्तम्भ और बनाते हैं जैसा नीचे दिया गया है।

अंक (x_i)	विद्यार्थियों की संख्या (f_i)	$f_i x_i$
2	4	$2 \times 4 = 8$
5	5	$5 \times 5 = 25$
8	3	$3 \times 8 = 24$
10	5	$5 \times 10 = 50$
12	2	$2 \times 12 = 24$
15	1	$1 \times 15 = 15$
	$\Sigma f_i = 20$	$\Sigma f_i x_i = 146$

$$\text{माध्य} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{146}{20} = 7.3$$

उदाहरण 25.7: निम्नलिखित आँकड़े कर्मचारियों के साप्ताहिक मजदूरी (रुपयों में) प्रदर्शित करते हैं:

साप्ताहिक मजदूरी (₹ में)	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500
कर्मचारियों की संख्या	12	13	14	13	14	11	5

कर्मचारियों की साप्ताहिक मजदूरी का माध्य ज्ञात करें।

हल: निम्नलिखित सारणी में पहले कॉलम में x_i तथा दूसरे कॉलम में f_i अर्थात् संगत बारंबारता है याद कीजिए माध्य ज्ञात करने के लिए हमें x_i की उसकी संगत बारंबारता f_i के साथ गुणा की आवश्यकता होती है। इसलिए उन्हें सारणी के तीसरे कॉलम में रखते हैं जैसा नीचे दिया गया है:

साप्ताहिक मजदूरी (₹ में) (x_i)	कर्मचारियों की संख्या (f_i)	$f_i x_i$
900	12	10800
1000	13	13000
1100	14	15400
1200	13	15600
1300	12	15600
1400	11	15400
1500	5	7500
	$\Sigma f_i = 80$	$\Sigma f_i x_i = 93300$



टिप्पणी

सूत्र II के प्रयोग से

$$\begin{aligned} \text{साप्ताहिक मजदूरी का माध्य} &= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = ₹ \frac{93300}{80} \\ &= ₹ 1166.25 \end{aligned}$$

कभी-कभी x_i तथा f_i का मान बड़ी संख्याएं हों, तो f_i व x_i का गुणनफल अधिक आ जाता है जो ऊबाउ बन जाता है और अधिक समय लेता है।

इस तरीके को आसान करने के लिए हम 'लघु-विधि' अपनाते हैं। यहाँ हम मध्यांक चुनते हैं जिसे कल्पित माध्य भी कहते हैं और इसे प्रत्येक x_i के मान में से घटाते हैं। घटा हुआ मान $d_i = x_i - a$, x_i का a से विचलन कहलाता है।

इस प्रकार, $x_i = -a + d_i$

तथा $f_i x_i = a f_i + f_i d_i$

$$\sum_{i=1}^n f_i x_i = \sum_{i=1}^n a f_i + \sum_{i=1}^n f_i d_i$$

इसलिए $\bar{x} = \sum f_i + \frac{1}{N} \sum f_i d_i$, जहाँ $\sum f_i = N$

$$\bar{x} = a + \frac{1}{N} \sum f_i d_i \quad (\text{III})$$

माध्य ज्ञात करने की यह विधि **कल्पित माध्य विधि** कहलाती है।

उदाहरण 25.7 में, x_i का मान अधिक है। इसलिए $f_i x_i$ का गुणनफल ऊबाउ बन जाता है और अधिक समय लेता है। आइए कल्पित माध्य विधि द्वारा माध्य ज्ञात करें। आइए कल्पित माध्य $a = 1200$ लेते हैं।

साप्ताहिक खर्च (₹ में) (x_i)	कर्मचारियों की संख्या (f_i)	विचलन $d_i = x_i - 1200$	$f_i d_i$
900	12	- 300	- 3600
1000	13	- 200	- 2600
1100	14	- 100	- 1400
1200	13	0	0
1300	12	100	+ 1200
1400	11	200	+ 2200
1500	5	300	+ 1500
	$\sum f_i = 80$		$\sum f_i d_i = - 2700$



सूत्र III का प्रयोग कर,

$$\begin{aligned} \text{माध्य} &= a + \frac{1}{N} \sum f_i d_i \\ &= 1200 + \frac{1}{80} (-2700) \\ &= 1200 - 33.75 = 1166.25 \end{aligned}$$

इसलिए साप्ताहिक मजदूरी का माध्य = ₹ 1166.25

ध्यान दीजिए माध्य चाहे प्रत्यक्ष विधि से या कल्पित माध्य विधि से परिकलित किया गया हो, सदैव समान रहता है।

उदाहरण 25.8: यदि निम्न आँकड़ों का माध्य 20.2 है तो k का मान ज्ञात कीजिए:

x_i	10	15	20	25	30
f_i	6	8	20	k	6

हल: माध्य = $\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{60 + 120 + 400 + 25k + 180}{40 + k}$

$$= \frac{760 + 25k}{40 + k}$$

इसलिए, $\frac{760 + 25k}{40 + k} = 20.2$ (दिया है)

या $760 + 25k = 20.2(40 + k)$

या $7600 + 250k = 8080 + 202k$

या $k = 10$



देखें आपने कितना सीखा 25.2

1. निम्नलिखित बंटन से माध्य अंक ज्ञात कीजिए:

अंक	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
बारंबारता	1	3	5	9	14	18	16	9	3	2

2. निम्नलिखित में प्रत्येक बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए:

(i)

x	6	10	15	18	22	27	30
f	12	36	54	72	62	42	22



टिप्पणी

(ii)

x	5	5.4	6.2	7.2	7.6	8.4	9.4
f	3	14	28	23	8	3	1

3. किसी कंपनी में 70 कर्मचारियों का भार (किग्रा में) नीचे दिया गया है। कर्मचारियों का माध्य भार ज्ञात कीजिए।

भार (किग्रा में)	कर्मचारियों की संख्या
60	10
61	8
62	14
63	16
64	15
65	7

4. यदि निम्नलिखित आँकड़ों का माध्य 17.45 है तो p का मान ज्ञात कीजिए।

x	15	16	17	18	19	20
f	3	8	10	p	5	4

25.1.3 वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य

निम्नलिखित वर्गीकृत बारंबारता बंटन पर ध्यान दें

प्रतिदिन मजदूरी (₹ में)	कर्मचारियों की संख्या
150-160	5
160-170	8
170-180	15
180-190	10
190-200	2

इस सारणी से हमें पता चलता है कि 5 कर्मचारी प्रतिदिन ₹ 150 से ₹ 160 (160 शामिल नहीं) के बीच मजदूरी पाते हैं। हमें नहीं पता कि 5 कर्मचारियों में से प्रत्येक कर्मचारी की वास्तविक आय क्या है?

इसलिए इस बारंबारता बंटन का माध्य ज्ञात करने के लिए हम निम्नलिखित अनुमान लगाते हैं।

अब हम कह सकते हैं कि 5 कर्मचारी प्रतिदिन ₹ $\frac{150+160}{2} = ₹ 155$ तथा 8 कर्मचारी प्रतिदिन

₹ $\frac{160+170}{2} = ₹ 165$ और 15 कर्मचारी प्रतिदिन ₹ $\frac{170+180}{2} = ₹ 175$ कमाते हैं। अब

हम दिए गए आँकड़ों का माध्य, सूत्र (II) को प्रयोग कर ज्ञात कर सकते हैं:



टिप्पणी

दैनिक मजदूरी (₹ में)	कर्मचारियों की संख्या (f_i)	वर्ग चिन्ह (x_i)	$f_i x_i$
150-160	5	155	775
160-170	8	165	1320
170-180	15	175	2625
180-190	10	185	1850
190-200	2	195	390
	$\Sigma f_i = 40$		$\Sigma f_i x_i = 6960$

$$\text{माध्य} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{6960}{40} = 174$$

इसलिए दैनिक माध्य मजदूरी = ₹ 174

वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य ज्ञात करने की यह प्रत्यक्ष विधि है। हम वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य सूत्र III अर्थात् कल्पित माध्य विधि से भी ज्ञात कर सकते हैं। हम कल्पित माध्य $a = 175$ लेते हैं।

दैनिक मजदूरी (₹ में)	कर्मचारियों की संख्या (f_i)	वर्ग चिन्ह (x_i)	विचलन $d_i = x_i - 175$	$f_i d_i$
150-160	5	155	-20	-100
160-170	8	165	-10	-80
170-180	15	175	0	0
180-190	10	185	+10	100
190-200	2	195	+20	40
	$\Sigma f_i = 40$			$\Sigma f_i d_i = -40$

इसलिए सूत्र III का प्रयोग कर

$$\begin{aligned} \text{माध्य} &= a + \frac{1}{N} \sum f_i d_i \\ &= 175 + \frac{1}{40} (-40) \\ &= 175 - 1 = 174 \end{aligned}$$

इसलिए दैनिक माध्य मजदूरी = ₹ 174.

उदाहरण 25.9: निम्नलिखित बारंबारता बंटन का माध्य (i) प्रत्यक्ष विधि (ii) कल्पित माध्य विधि से ज्ञात कीजिए:



टिप्पणी

वर्ग	बारंबारता
20-40	9
40-60	11
60-80	14
80-100	6
100-120	8
120-140	15
140-160	12
योग	75

हल: (i) प्रत्यक्ष विधि

वर्ग	बारंबारता (f_i)	वर्ग चिन्ह (x_i)	$f_i x_i$
20-40	9	30	270
40-60	11	50	550
60-80	14	70	980
80-100	6	90	540
100-120	8	110	880
120-140	15	130	1950
140-160	12	150	1800
	$\Sigma f_i = 75$		$\Sigma f_i x_i = 6970$

$$\text{इसलिए माध्य} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{6970}{75} = 92.93$$

(ii) कल्पित माध्य विधि

$$\text{माना कल्पित माध्य} = a = 90$$

वर्ग	बारंबारता (f_i)	वर्ग चिन्ह (x_i)	विचलन $d_i = x_i - 90$	$f_i d_i$
20-40	9	30	-60	-540
40-60	11	50	-40	-440
60-80	14	70	-20	-280
80-100	6	90	0	0
100-120	8	110	+20	160
120-140	15	130	+40	600
140-160	12	150	+60	720
	$N = \Sigma f_i = 75$			$\Sigma f_i d_i = 220$



$$\text{माध्य} = a + \frac{1}{N} \sum f_i d_i = 90 + \frac{220}{75} = 92.93$$

ध्यान दें दोनों विधियों से माध्य समान ही निकलता है।

उपरोक्त सारणी में, कॉलम 4 के मानों को ध्यान से देखें सभी 20 के गुणज है। इसलिए यदि हम इन मानों को 20 से भाग करे तो हमें f_i से गुणा करने के लिए छोटी संख्या प्राप्त होगी।

ध्यान दें कि 20, हर वर्ग की वर्गमाप भी है।

इसलिए यदि $u_i = \frac{x_i - a}{h}$, जहाँ a कल्पित माध्य तथा h वर्ग माप है।

अब हम u_i का तथा बाद में $u_i f_i$ का परिकलन करते हैं। और इस प्रकार हम दिए गए आँकड़ों का माध्य निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त कर सकते हैं।

$$\text{माध्य} = \bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right) \times h \quad \text{(IV)}$$

आइए उदाहरण 25.9 में दिए आँकड़ों का माध्य ज्ञात करें।

माना $a = 90$. जहाँ $h = 20$

वर्ग	बारंबारता (f_i)	वर्ग चिन्ह (x_i)	विचलन $d_i = x_i - 90$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
20-40	9	30	-60	-3	-27
40-60	11	50	-40	-2	-22
60-80	14	70	-20	-1	-14
80-100	6	90	0	0	0
100-120	8	110	+20	1	8
120-140	15	130	+40	2	30
140-160	12	150	+60	3	36
	$\sum f_i = 75$				$\sum f_i u_i = 11$

सूत्र (IV) का प्रयोग कर

$$\text{माध्य} = \bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right) \times h = 90 + \frac{11}{75} \times 20$$



टिप्पणी

$$= 90 + \frac{220}{75} = 92.93$$

सूत्र (IV) से माध्य ज्ञात करना पद-विचलन विधि कहलाता है।

ध्यान दें प्रत्यक्ष विधि, कल्पित माध्य विधि तथा पद विचलन विधि तीनों में माध्य समान ही हैं

उदाहरण 25.10: निम्नलिखित बंटन से दैनिक माध्य मजदूरी पद विचलन विधि से ज्ञात कीजिए।

प्रतिदिन मजदूरी (₹ में)	150-160	160-70	170-180	180-190	190-200
कर्मचारियों की संख्या	5	8	15	10	2

हल: हम पहले ही प्रत्यक्ष विधि तथा कल्पित माध्य विधि का प्रयोग कर माध्य ज्ञात कर चुके हैं। आइए पद-विचलन विधि से माध्य ज्ञात करें।

माना $a = 175$. यहाँ $h = 10$

प्रतिदिन मजदूरी (₹ में)	कर्मचारियों की संख्या (f_i)	वर्ग चिन्ह (x_i)	विचलन $d_i = x_i - 90$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
150-160	5	155	-20	-2	-10
160-170	8	165	-10	-1	-8
170-180	15	175	0	0	0
180-190	10	185	10	1	10
190-200	2	195	20	2	4
	$\Sigma f_i = 40$				$\Sigma f_i u_i = -4$

सूत्र (IV) का प्रयोग कर

$$\text{प्रतिदिन माध्य आय} = a + \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i} \right) \times h = 175 + \frac{-4}{40} \times 10 = ₹ 174$$

ध्यान दें: माध्य चाहे प्रत्यक्ष विधि से हो चाहे कल्पित विधि से या पद विचलन से परिकलित किया गया हो, हमेशा समान रहता है।



देखें आपने कितना सीखा 25.3

1. निम्नलिखित सारणी 100 विद्यार्थियों द्वारा गणित में प्राप्त अंकों को दर्शाती है

अंक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
विद्यार्थियों की संख्या	12	15	25	25	17	6

प्रत्यक्ष विधि द्वारा माध्य अंक ज्ञात करें।



2. एक बॉक्स में बल्बों का वितरण निम्न प्रकार है

बल्बों की संख्या	50-52	52-54	54-56	56-58	58-60
बक्सों की संख्या	15	100	126	105	30

बक्से में रखे बल्बों का माध्य ज्ञात कीजिए। आप माध्य निकालने की कौन-सी विधि चुनेंगे?

3. एक शहर के एक विशेष वर्ष के जीवन सूचकांक मूल्य का साप्ताहिक प्रेक्षण नीचे दिया जा रहा है

जीवन सूचकांक मूल्य	140-150	150-160	160-170	170-180	180-190	190-200
सप्ताहों की संख्या	5	8	20	9	6	4

पद विचलन विधि का प्रयोग कर माध्य साप्ताहिक जीवन सूचकांक मूल्य ज्ञात कीजिए।

4. निम्न आँकड़ों का माध्य (i) कल्पित माध्य विधि (ii) पद विचलन विधि से ज्ञात कीजिए

वर्ग	150-200	200-250	250-300	300-350	350-400
बारंबारता	48	32	35	20	10

25.2 माध्यक

एक ऑफिस में 5 कर्मचारी हैं, जिनमें एक निरीक्षणकर्ता तथा 4 कर्मचारी हैं। कर्मचारियों का मासिक वेतन क्रमशः ₹ 5000, ₹ 6500, ₹ 7500 तथा ₹ 8000 है जबकि निरीक्षणकर्ता का मासिक वेतन ₹ 20000 है।

$$\begin{aligned} \text{ऐसी स्थिति में माध्य (वेतन)} &= ₹ \frac{5000 + 6500 + 7500 + 8000 + 20000}{5} \\ &= ₹ \frac{47000}{5} = ₹ 9400 \end{aligned}$$

ध्यान दीजिए 5 में से 4 कर्मचारियों का वेतन ₹ 9400 से कम है। माध्य वेतन ₹ 9400 उनमें से किसी की भी वेतन का अनुमान नहीं देती है।

यह माध्य की कमी है। यह आँकड़ों में प्रेक्षणों के अधिकतम मान के कारण है।

माध्य की यह कमी हमें एक अन्य औसत की ओर ले जाती है जो कुछ अधिकतम मानों के कारण प्रभावित न हो। माध्यक केन्द्रीय प्रवृत्ति का एक ऐसा ही मान है।



टिप्पणी

माध्यक केंद्रीय प्रवृत्ति का वह मान है जो आँकड़ों के प्रेक्षणों के माध्य मान को बताता है जबकि आँकड़ों को हम आरोही क्रम (या अवरोही क्रम) में लगाते हैं

25.2.1 यथाप्राप्त आँकड़ों का माध्यक

यथाप्राप्त आँकड़ों का माध्यक निम्नलिखित तरीके से ज्ञात करते हैं:

(i) आँकड़ों को आरोही (या अवरोही) क्रम में लगाते हैं।

(ii) जब प्रेक्षणों की संख्या (n) विषम हो, तो $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वाँ प्रेक्षण माध्यक होता है।

(iii) जब प्रेक्षणों की संख्या (n) सम हो, तो माध्यक $\left(\frac{n}{2}\right)$ वे तथा $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वें प्रेक्षणों का माध्य होता है।

आइए इसे उदाहरणों के माध्यम से समझते हैं:

उदाहरण 25.11: 15 कुत्तों का वजन (किग्रा में) इस प्रकार है:

9, 26, 10, 22, 36, 13, 20, 20, 10, 21, 25, 16, 12, 14, 19

माध्यक वजन ज्ञात कीजिए।

हल: आइए आँकड़ों को आरोही (या अवरोही) क्रम में लगाते हैं:

9, 10, 10, 12, 13, 14, 16, 19, 20, 20, 21, 22, 25, 36

माध्यक

यहाँ प्रेक्षणों की संख्या = 15

इसलिए $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वाँ प्रेक्षण माध्यक होगा अर्थात् $\left(\frac{15+1}{2}\right)$ वाँ अर्थात् 8 वाँ प्रेक्षण जो 19 किग्रा है

ध्यान दें: माध्यक वजन 19 किग्रा बताता है कि 50% कुत्तों का वजन 19 किग्रा से कम है तथा 50% कुत्तों का वजन 19 किग्रा से ज्यादा है।

उदाहरण 25.12: एक बॉस्केट बॉल की टीम द्वारा मैचों की श्रृंखला में निम्नलिखित स्कोर बनाया गया

16, 1, 6, 26, 14, 4, 13, 8, 9, 23, 47, 9, 7, 8, 17, 28

आँकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए।



टिप्पणी

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या	संचयी बारंबारता
3	4	4
5	6	10
6	5	15
7	3	18
10	1	19
11	7	26
12	3	29
13	2	31
14	3	34
15	1	35

उपरोक्त सारणी से पता चलता है कि 18वें प्रेक्षण का मान 7 है

इसलिए माध्यक = 7

उदाहरण 25.14: निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए

भार (किग्रा में)	40	41	42	43	44	45	46	48
विद्यार्थियों की संख्या	2	5	7	8	13	26	6	3

हल: यहाँ $n = 2 + 5 + 7 + 8 + 13 + 26 + 6 + 3 = 70$, जो सम है और वजन पहले से ही आरोही क्रम में लगे है आइए आँकड़ों की संचयी बारंबारता सारणी बनाते हैं।

वजन (किग्रा में)	विद्यार्थियों की संख्या (बारंबारता)	संचयी बारंबारता
40	2	2
41	5	7
42	7	14
43	8	22
44	13	35
45	26	61
46	6	67
48	3	70

35वाँ प्रेक्षण

36 वाँ प्रेक्षण



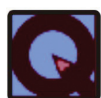
टिप्पणी

चूँकि n सम है, इसलिए $\left(\frac{n}{2}\right)$ वें प्रेक्षण तथा $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वें प्रेक्षण अर्थात् 35वें तथा 36वें प्रेक्षण का माध्य ही माध्यक होगा। सारणी से हम देखते हैं कि

35 वाँ प्रेक्षण 44 है।

तथा 36 वाँ प्रेक्षण 45 है।

$$\text{इसलिए माध्यक} = \frac{44+45}{2} = 44.5$$



देखें आपने कितना सीखा 25.4

1. किसी टीम द्वारा 11 मैचों की श्रृंखला में किए गए गोल निम्नलिखित हैं:

1, 0, 3, 2, 4, 5, 2, 4, 4, 2, 5

माध्यक का परिकलन कीजिए।

2. 12 विद्यार्थियों द्वारा गणित के निदानात्मक परीक्षण में प्राप्त अंक (अधिकतम अंक 100) निम्नलिखित हैं

46, 52, 48, 39, 41, 62, 55, 53, 96, 39, 45, 99

इन आँकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

3. एक पासे को 100 बार फेंका जाता है। और उसके परिणामों को लिखा जाता है जो इस प्रकार हैं

परिणाम	1	2	3	4	5	6
बारंबारता	17	15	16	18	16	18

परिणामों के बंटन का माध्यक ज्ञात कीजिए।

4. निम्नलिखित में से प्रत्येक बारंबारता बंटन का माध्यक ज्ञात कीजिए

(a)

x_i	2	3	4	5	6	7
f_i	4	9	16	14	11	6

(b)

x_i	5	10	15	20	25	30	35	40
f_i	3	7	12	20	28	31	28	26



(c)

x_i	2.3	3	5.1	5.8	7.4	6.7	4.3
f_i	5	8	14	21	13	5	7

5.3 बहुलक

निम्नलिखित उदाहरण पर ध्यान दें

एक कंपनी विभिन्न साइज की रेडिमेंट शर्ट बनाती है। कंपनी अपनी साप्ताहिक बिक्री का रिकार्ड रखती है जो नीचे दिया गया है:

आकार (सेमी में)	90	95	100	105	110	115
कमीजों की संख्या	50	125	190	385	270	28

सारणी से पता चलता है कि 105 सेमी आकार की कमीजों की बिक्री सबसे ज्यादा हुई है। इसलिए कंपनी आगे चलकर इस आकार की कमीजें ज्यादा बनाएगी। यहाँ 105 कुछ ओर नहीं बल्कि आँकड़ों का बहुलक है। बहुलक भी केन्द्रीय प्रवृत्ति का एक मान है।

दिए गए आँकड़ों में जो प्रेक्षण सबसे अधिक बार आता है वह आँकड़ों का बहुलक कहलाता है।

दूसरे शब्दों में वह प्रेक्षण जिसकी बारम्बारता सबसे अधिक होती है वह बहुलक कहलाता है। रेडिमेंट गारमेन्ट्स तथा जूते की कंपनी इत्यादि केन्द्रीय प्रवृत्ति के इस मान का प्रयोग करती है। माँग के आँकड़ों के बहुलक के अनुसार, ये कंपनियाँ निर्णय करती हैं कि बाजार की माँग के अनुसार किस आकार का उत्पादन अधिक बनाया जाए।

25.3.1 यथाप्राप्त आँकड़ों का बहुलक

यथाप्राप्त आँकड़ों की स्थिति में, केवल आँकड़ों को देखकर आसानी से बहुलक ज्ञात किया जा सकता है। आइए निम्नलिखित उदाहरण देखें:

उदाहरण 25.15: किसी फुटबॉल टीम द्वारा 12 मैचों में किए गए गोल इस प्रकार हैं:

1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 4, 5, 3, 3, 4

गोलों का बहुलक क्या है?

हल: केवल आँकड़ों को देखकर हमें पता चलता है कि 2 की बारम्बारता 4 है और बाकी स्कोर की बारम्बारता से अधिक है।

इसलिए आँकड़ों का बहुलक 2 है।

उदाहरण 25.16: निम्न आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए:

9, 6, 8, 9, 10, 7, 12, 15, 22, 15



हल: आँकड़ों को बढ़ते हुए क्रम में लिखने पर

6, 7, 8, 9, 9, 10, 12, 15, 15, 22

हम पाते हैं कि 9 और 5 दोनों प्रेक्षणों की समान अधिकतम बारम्बारता 2 है। इसलिए दोनों ही आँकड़ों का बहुलक है।

ध्यान दें: 1. इस पाठ में, हम केवल उन्हीं आँकड़ों को लेंगे जिनका केवल एक बहुलक होगा।
2. आँकड़ों में यदि प्रत्येक प्रेक्षण की बारम्बारता समान हो तो हम कह सकते हैं कि आँकड़ों का बहुलक नहीं है।

25.3.2 अवर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक

आइए आँकड़ों का बहुलक ज्ञात करने को उदाहरणों के माध्यम से स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 25.17: निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए:

भार (किग्रा में)	40	41	42	43	44	45	46	48
विद्यार्थियों की संख्या	2	6	8	9	10	22	13	5

हल: सारणी से हम देख सकते हैं कि 45 किग्रा की बारम्बारता सबसे अधिक 25 है जिसका अर्थ है कि अधिकतर विद्यार्थियों का भार 45 किग्रा है। इसलिए 45 किग्रा बहुलक है या बहुलक भार 45 किग्रा है।



देखें आपने कितना सीखा 25.5

1. निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए:

5, 10, 3, 7, 2, 9, 6, 2, 11, 2

2. 15 परिवारों में टीवी सेटों की संख्या निम्न पाई गयी:

2, 2, 4, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 3, 3, 1, 3, 0

इन आँकड़ों का बहुलक क्या है?

3. एक पासे को 100 बार फेंका गया, जिसका परिणाम निम्नलिखित है:

परिणाम	1	2	3	4	5	6
बारम्बारता	15	16	16	15	17	20

इस बंटन का बहुलक परिणाम ज्ञात कीजिए।



टिप्पणी

4. 80 विद्यार्थियों द्वारा गणित के टैस्ट में प्राप्तांक (10 में से) निम्नलिखित हैं।

प्राप्तांक	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
विद्यार्थियों की संख्या	5	2	3	5	9	11	15	16	9	3	2

बहुलक अंक का परिकलन कीजिए।



आइए दोहराएँ

- माध्य, माध्यक तथा बहुलक केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप है।

- यथाप्राप्त आँकड़ों का माध्य $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

जहाँ n प्रेक्षण x_1, x_2, \dots, x_n हैं।

- अवर्गीकृत आँकड़ों का माध्य $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{\sum f_i x_i}{N}$

जहाँ f_i, i वे प्रेक्षण x_i की बारम्बारता है।

- अवर्गीकृत आँकड़ों का माध्य निम्न सूत्र द्वारा भी ज्ञात किया जा सकता है

$$\bar{x} = a + \frac{1}{N} \sum f_i d_i$$

जहाँ $d_i = x_i - a$, a कल्पित माध्य है।

वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य

- वर्गीकृत बंटन का माध्य ज्ञात करने के लिए, हम निम्न कल्पना करते हैं:

किसी भी वर्ग की बारम्बारता उसके वर्ग चिन्ह या मध्य बिंदु पर केंद्रित होती है।

- प्रत्यक्ष विधि

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$



जहाँ x_i वर्ग चिन्ह तथा f_i, x_i की संगत बारंबारता है।

(iii) कल्पित माध्य विधि

$$\bar{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^n f_i d_i}{N}$$

जहाँ a कल्पित माध्य और $d_i = x_i - a$.

(iv) पद विचलन विधि

$$\bar{x} = a + \left(\frac{\sum_{i=1}^n f_i u_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \right) \times h$$

जहाँ a कल्पित माध्य, $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ और h वर्ग माप है।

- माध्यक केन्द्रीय प्रवृत्ति का वह मान है जो आँकड़ों में मध्यतम पद का मान बताता है, जब आँकड़ों को आरोही (या अवरोही) क्रम में लगाया हो।
- **यथाप्राप्त आँकड़ों का माध्यक**

(i) जब प्रेक्षणों की संख्या (n) विषम हो, तो $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वें प्रेक्षण का मान माध्यक होगा।

(ii) जब प्रेक्षणों की संख्या (n) सम हो तो $\left(\frac{n}{2}\right)$ वें तथा $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ वें प्रेक्षण का माध्य, माध्यक होगा।

• **अवर्गीकृत आंकड़ों का माध्य**

अवर्गीकृत आंकड़ों का माध्यक संचयी बारंबारता सारणी (आंकड़ों को बढ़ते या घटते क्रम में लगाकर) से उपरोक्त (i) और (ii) का प्रयोग कर ज्ञात किया जा सकता है।

- अधिकतम बारंबारता वाले प्रेक्षण के मान को आंकड़ों का बहुलक कहते हैं।



आइए अभ्यास करें

1. प्रथम पांच अभाज्य संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए।
2. यदि 5, 7, 9, x , 11 तथा 12 का माध्य 9 है तो x का मान ज्ञात कीजिए।



टिप्पणी

3. किसी कक्षा में 9 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्तांक निम्नलिखित हैं—

51, 36, 63, 46, 38, 43, 52, 42 और 43

(i) विद्यार्थियों के माध्य अंक ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि एक विद्यार्थी जिसने 75 अंक प्राप्त किये उसे भी कक्षा में शामिल कर लिया जाए तो माध्य अंक क्या होंगे?

4. किसी कक्षा में 10 विद्यार्थियों का माध्य अंक 70 है। विद्यार्थियों को क्रमशः 6 और 4 के दो वर्गों में बाँट दिया जाता है। यदि प्रथम वर्ग का माध्य 60 है तो दूसरे वर्ग का माध्य क्या होगा?

5. यदि x_1, x_2, \dots, x_n प्रेक्षणों का माध्य \bar{x} है तो दर्शाइए $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$ है।

6. 50 संख्याएँ दी गई हैं। प्रत्येक संख्या को 53 में से घटाया जाता है और प्राप्त संख्याओं का माध्य निकाला जाता है जो -3.5 है। दी गई संख्याओं का माध्य परिकलन कीजिए।

7. निम्नलिखित आँकड़ों का माध्य ज्ञात कीजिए:

(a)	x_i	5	9	13	17	22	25
	f_i	3	5	12	8	7	5

(b)	x_i	16	18	28	22	24	26
	f_i	1	3	5	7	5	4

8. निम्नलिखित आँकड़ों का माध्य ज्ञात कीजिए:

(a)	वर्ग	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
	बारंबारता	2	3	5	7	5	3

(b)	वर्ग	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700
	बारंबारता	3	5	8	6	5	3

(c) 50 विद्यार्थियों के समूह की आयु (महीनों में) नीचे दी गई है। माध्य आयु ज्ञात कीजिए:

उम्र	156-158	158-160	160-162	162-164	164-166	166-168
विद्यार्थियों की संख्या	2	4	8	16	14	6

9. निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए:

(a) 5, 12, 16, 18, 20, 25, 10



टिप्पणी

(b) 6, 12, 9, 10, 16, 28, 25, 13, 15, 17

(c) 15, 13, 8, 22, 29, 12, 14, 17, 6

10. निम्नलिखित आँकड़े आरोही क्रम में लगे हैं। और इनका माध्यक 60 है। x का मान ज्ञात कीजिए।

26, 29, 42, 53, x , $x + 2$, 70, 75, 82, 93

11. निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए:

(a)	x_i	25	30	35	45	50	55	65	70	85
	f_i	5	14	12	21	11	13	14	7	3

(b)	x_i	35	36	37	38	39	40	41	42
	f_i	2	3	5	4	7	6	4	2

12. निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए:

(a) 8, 5, 2, 5, 3, 5, 3, 1

(b) 19, 18, 17, 16, 17, 15, 14, 15, 17, 9

13. निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए जो किसी समूह में से यादृच्छया चुने गए 80 बल्बों का जीवन काल दर्शाते हैं:

जीवन काल (घंटों में)	300	500	700	900	1100
बल्बों की संख्या	10	12	20	27	11

14. यदि निम्नलिखित आँकड़ों का माध्य 7 है तो p का मान ज्ञात कीजिए:

x_i	4	p	6	7	9	11
f_i	2	4	6	10	6	2

15. कुछ चुने हुए लोगों के समूह के एक बीमा कंपनी ने निम्नलिखित आँकड़े एकत्र किए:

उम्र (वर्षों में)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
मरने वालों की संख्या	2	12	55	95	71	42	16	7

उपरोक्त आँकड़ों का माध्य ज्ञात कीजिए।

16. यदि प्रेक्षणों $x + 1, x + 4, x + 5, x + 8, x + 11$ का माध्य 10 है, अंतिम तीन प्रेक्षणों का माध्य है:

(A) 12.5

(B) 12.2

(C) 13.5

(D) 14.2



टिप्पणी

17. यदि आँकड़ों में प्रत्येक प्रेक्षण का मान 2 अंक बढ़ा दिया है, तब उसका माध्य
- (A) समान रहेगा (B) वास्तविक माध्य का 2गुना हो जाएगा
(C) 2 अंक घट जाएगा (D) 2 अंक बढ़ जाएगा
18. आँकड़ों : 15, 14, 19, 20, 14, 15, 14, 18, 14, 15, 17, 14, 18 का बहुलक है:
- (A) 20 (B) 18 (C) 15 (D) 14



देखें आपने कितना सीखा के उत्तर

25.1

1. $\sum_{i=1}^n x_i/n$ 2. 5.5 3. 86.33 किग्रा
4. 142.8 सेमी 5. 25.68°C 7. 42
8. 29.17

25.2

1. 5.84 2. (i) 18.99 (ii) 6.57
3. 11.68 4. 10

25.3

1. 28.80 2. 55.19 3. 167.9 4. 244.66

25.4

1. 3 2. 50 3. 4
4. (a) 4 (b) 30 (c) 5.8

25.5

1. 2 2. 1 3. 6 4. 7



आइए अभ्यास करें के उत्तर

1. 5.6 2. 10 3. (i) 46 (ii) 48.9
4. 85 6. 56.5 7. (a) 15.775 (b) 21.75
8. (a) 42.6 (b) 396.67 (c) 163 महीने (लगभग)
9. (a) 16 (b) 14 (c) 14
10. 59 11. (a) 45 (b) 24 12. (a) 5 (b) 17
13. 900 14. 5 15. 39.86 वर्ष 16. (A)
17. (D) 18. D