# 1

# समुच्चय

आइए निम्नलिखित परिस्थितियों पर विचार करें।

श्रीमती और श्री मेहता एक दिन मार्किट गए। श्रीमान मेहता ने निम्नलिखित वस्तुएँ खरीदीं।

एक खिलौना, एक किग्रा मिठाई और एक मैगजीन। जबकि श्रीमती मेहता ने निम्नलिखित वस्तुएँ खरीदीं।

"भिंडी, आलू और टमाटर" दोनों ही उदाहरणों में, प्रत्येक संग्रह में वस्तुएँ सुपरिभाषित है। आप सच बोलने वाले विद्यार्थियों के संग्रह के बारे में क्या कह सकते हैं ? क्या यह सुपरिभाषित है? शायद नहीं। वस्तुओं के सुपरिभाषित संग्रह को समुच्चय कहते हैं। एक समूह का समुच्चय होने के लिए यह आवश्यक है कि वह सुपरिभाषित हो। सुपरिभाषित शब्द का उपयोग जर्मन गणितज्ञ जॉर्ज कैन्टर (George Canter) (1845-1918) ने एक समुच्चय को परिभाषित करने के लिए किया। वह समुच्चय सिद्धांत (Set theory) के पिता के रूप में जाने जाते हैं। इन दिनों समुच्चय सिद्धांत गणित की बहुत सारी अवधारणाओं के आधार के रूप में जाना जाता है। इस पाठ में हम कुछ आधारभूत परिभाषाओं और समुच्चयों पर सक्रियाएँ और उनके गुणों की चर्चा करेंगे।

## उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- समुच्चय को परिभाषित तथा विभिन्न रूपों में निरूपित करना
- विभिन्न प्रकार के समुच्चयों, जैसे परिमित तथा अपरिमित समुच्चय, रिक्त समुच्चय, एकल समुच्चय, (Singleton set), समान समुच्चय, तुल्य समुच्चय, उपसमुच्चय को परिभाषित करना और उनके उदाहरण देना
- समष्टीय समुच्चय के उदाहरण देना तथा दो समुच्चयों का अंतर और समुच्चयों के पूरक को परिभाषित करना
- दो समुच्चयों के सम्मिलन तथा सर्वनिष्ठ को परिभाषित करना
- वेन आरेख के द्वारा दो समुच्चयों के सम्मिलन तथा सर्वनिष्ठ, समष्टीय समुच्चय, समुच्चय का पूरक तथा दो समुच्चयों के अंतर को प्रदर्शित करना

## पूर्व ज्ञान

- संख्या पद्धति

## 1.1 कुछ मानक संकेतन

इस अध्याय के विभिन्न पदों को परिभाषित करने से पहले, आइए निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार करें–

| | |
|---|---|
| (i) आपके विद्यालय में लंबे विद्यार्थियों का संग्रह | (i) आपके विद्यालय में उन विद्यार्थियों का संग्रह जिनकी ऊँचाई 180 सेमी० से अधिक है। |
| (ii) आपकी कालोनी (colony) में इमानदार व्यक्तियों का संग्रह | (ii) आपके इलाके (colony) के उन सभी लोगों का संग्रह जो कभी किसी चोरी के मामले में सम्मिलित नहीं पाए गये। |
| (iii) आपके विद्यालय की लाइब्रेरी में रोचक (interesting) पुस्तकों का संग्रह | (iii) आपके विद्यालय की लाइब्रेरी में गणित की पुस्तकों का संग्रह |
| (iv) आपके विद्यालय में मेधावी (intelligent) विद्यार्थियों का संग्रह | (iv) आपके विद्यालय में उन छात्रों का संग्रह जिन्होंने वार्षिक परीक्षा में 80% से अधिक अंक प्राप्त किए। |

उर्ध्वाधर रेखा के बायीं ओर लिखे सभी संग्रहों में लंबाई, इमानदारी, रोचकता, मेधावीपन सुपरिभाषित नहीं है। वास्तव में ये भाव एक व्यक्ति से दूसरे व्यक्ति के लिए भिन्न-भिन्न हो सकते हैं। इसलिए इन संग्रहों को समुच्चय नहीं कह सकते हैं। जबकि क्षैतिज रेखा के दायीं ओर लिखे सभी संग्रह जैसे 180 सेमी से अधिक ऊँचाई वाले विद्यार्थी, किसी चोरी के मामले में सम्मिलित न पाए जाने वाले व्यक्ति, गणित की पुस्तकें तथा 80% से अधिक अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थी सुपरिभाषित संग्रह है। अतः इन संग्रहों को समुच्चय माना जाता है।

यदि वस्तुओं के किसी संग्रह को हम समुच्चय कहें तो इस संग्रह की प्रत्येक वस्तु इस समुच्चय का अवयव कहलाती है। समुच्चय को प्रायः अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों से और इसके अवयवों को अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षरों से निरूपित करते हैं। उदाहरणार्थ $A = \{$खिलौना, हाथी, मिठाई का पैकिट, मैगजीन$\}$

**समुच्चय के प्रदर्शन के लिए कुछ मानक संकेतन :**

$N$ : प्राकृत संख्याओं का समुच्चय
$W$ : पूर्ण संख्याओं का समुच्चय
$Z$ : पूर्णांकों का समुच्चय
$Z^+$ : धन पूर्णांकों का समुच्चय
$Z^-$ : ऋण पूर्णांकों का समुच्चय
$Q$ : परिमेय संख्याओं का समुच्चय
$I$ : अपरिमेय संख्याओं का समुच्चय
$R$ : वास्तविक संख्याओं का समुच्चय
$C$ : सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय

दूसरे प्रयुक्त होने वाले प्रतीक हैं–

$\in$ : 'सदस्य है' या 'में है', $\notin$ : 'सदस्य नहीं है' या 'में नहीं है'
$\exists$ : अस्तित्व है, $\nexists$ : अस्तित्व नहीं है

उदाहरणार्थ, $N$ प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है और हम जानते हैं कि 2 एक प्राकृत संख्या है परन्तु $-2$ एक प्राकृत संख्या नहीं है। इसे प्रतीक के रूप में इस प्रकार लिख सकते हैं जैसे $2 \in N$ और $-2 \notin N$

## 1.2 समुच्चय का निरूपण

समुच्चय को निरूपित करने की दो विधियाँ हैं।

### 1.2.1 (i) रोस्टर विधि ( सारणीबद्ध रूप )

इस विधि में, समुच्चय के सभी अवयवों को सूचीबद्ध किया जाता है, अवयवों को एक दूसरे से, अर्धविराम द्वारा पृथक किया जाता है और उन सभी को एक मंझले कोष्ठक { } के भीतर लिखा जाता है। यदि V अंग्रेजी वर्णमाला के सभी स्वरों का समुच्चय है तो इसे रोस्टर विधि में इस प्रकार लिख सकते हैं : $V = \{ a, e, i, o, u\}$

**(ii)** यदि A, 7 से छोटी प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है, तो सारणीबद्ध रूप में $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ लिखा जायेगा।

**टिप्पणी:** समुच्चय को रोस्टर रूप में लिखते समय किसी अवयव को सामान्यत: दोबारा नहीं लिखते हैं। उदाहरण के लिए यदि A, mathematics शब्द में प्रयुक्त अक्षरों का समुच्चय है तो $A = \{m, a, t, h, e, i, c, s\}$

### 1.2.2 समुच्चय-निर्माण रूप

इस रूप में अवयवों को सूचीबद्ध नहीं किया जाता परन्तु सभी अवयवों को एक सर्वनिष्ठ गुणधर्म के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

मान लीजिए कि V अंग्रेजी वर्णमाला के सभी स्वरों का समुच्चय है तब V को समुच्चय निर्माण रूप में निम्नलिखित प्रकार से लिखते हैं : $V = \{x : x$ अंग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है।$\}$

**(ii)** मान लीजिए कि A, 7 से छोटी, प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है तो $A = \{x : x \in N$ और $x < 7\}$

**टिप्पणी:** प्रतीक ':' को 'ताकि' 'इस प्रकार कि' (such that) पढ़ा जाता है।

**उदाहरण 1.1.** निम्नलिखित को समुच्चय-निर्माण रूप में लिखिए :

(a) $A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ (b) $B = \{3,6,9,12\}$

**हल :** (a) $A = \{x : x \in Z$ और $-3 \le x \le 3\}$, (b) $B = \{x : x = 3n$ और $n \in N, n \le 4\}$

**उदाहरण 1.2.** निम्नलिखित को रोस्टर रूप में लिखिए :

(a) $C = \{x : x \in N$ और $50 \le x \le 60\}$

(b) $D = \{x : x \in R$ और $x^2 - 5x + 6 = 0\}$

**हल :** (a) $C = \{50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60\}$

(b) $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-2) = 0$

$\Rightarrow x = 3, 2. \quad \therefore D = \{2, 3\}$

## 1.3 समुच्चयों का वर्गीकरण

### 1.3.1 परिमित और अपरिमित समुच्चय

मान लीजिए A और B दो समुच्चय हैं जहाँ

$A = \{x : x$ एक प्राकृत संख्या है।$\}$, $B = \{x : x$ आपके विद्यालय का एक विद्यार्थी है।$\}$

यहाँ यह स्पष्ट है कि समुच्चय A में अवयवों की संख्या परिमित नहीं है जबकि समुच्चय B में अवयवों की संख्या परिमित है। A अपरिमित समुच्चय तथा B परिमित समुच्चय कहलाता है।

एक समुच्चय परिमित कहलाता है यदि उसके अवयवों की संख्या को गिना जा सके और यह अपरिमित कहलाता है यदि इसके अवयवों को उनकी अन्तिम संख्या तक गिनना संभव न हो।

### 1.3.2 रिक्त समुच्चय

नीचे दिए गए समुच्चयों पर विचार कीजिए–

$$A = \{x : x \in R \text{ और } x^2 + 1 = 0\}$$

$$B = \{x : x \text{ एक संख्या है जो } 7 \text{ से बड़ी है और } 5 \text{ से छोटी है।}\}$$

समुच्चय A में वास्तविक संख्याएँ विद्यमान है परन्तु कोई ऐसी वास्तविक संख्या नहीं है जिसका वर्ग '–1' हो। इसलिए, इस समुच्चय में कोई भी अवयव नहीं है। इसी प्रकार, कोई संख्या ऐसी नहीं है जो 5 से कम हो और 7 से अधिक भी हो। इस प्रकार के समुच्चय जिनमें एक भी अवयव नहीं होता है, रिक्त समुच्चय या शून्य समुच्चय कहलाते हैं। रिक्त समुच्चय, को प्रतीक $\phi$ अथवा $\{\}$ से प्रदर्शित करते हैं।

**एक समुच्चय, जिसमें एक भी अवयव नहीं होता है, रिक्त समुच्चय या शून्य समुच्चय कहलाता है तथा इसे $\phi$ अथवा $\{\}$ द्वारा निरूपित किया जाता है।**

### 1.3.3 एकल समुच्चय

निम्नलिखित समुच्चय पर विचार कीजिए :

$A = \{x : x$ एक सम अभाज्य संख्या है। $\}$ क्योंकि केवल एक ही अभाज्य संख्या (2) सम होती है, इसलिए समुच्चय A में केवल एक ही अवयव है। इस प्रकार का समुच्चय एकल समुच्चय कहलाता है। यहाँ $A = \{2\}$, **एक समुच्चय, जिसमें केवल एक ही अवयव होता है, एकल समुच्चय कहलाता है।**

### 1.3.4 समान और तुल्य समुच्चय

निम्नलिखित समुच्चयों पर विचार कीजिए :

(i) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 1, 3\}$ (ii) $D = \{1, 2, 3\}$, $E = \{a, b, c\}$.

उदाहरण (i) में, समुच्चय A तथा B में वही अवयव हैं। ऐसे समुच्चय समान समुच्चय कहलाते हैं और उन्हें $A = B$ के रूप में लिखा जाता है। उदाहरण (ii) में समुच्चय D और E में अवयवों की संख्या तो समान है परन्तु अवयव अलग-अलग हैं। ऐसे समुच्चय तुल्य समुच्चय कहलाते हैं और उन्हें $A \approx B$ के रूप में लिखा जाता है। दो समुच्चय A और B तुल्य समुच्चय कहलाते हैं यदि उनमें अवयवों की संख्या समान हो परन्तु दो समुच्चय समान समुच्चय कहलाते हैं यदि उनमें अवयवों की संख्या समान होने के साथ-साथ उनके अवयव भी समान हों।

### 1.3.5 असंयुक्त समुच्चय

दो समुच्चय A तथा B असंयुक्त समुच्चय कहलाते हैं, यदि उनमें कोई भी अवयव उभयनिष्ठ न हो। उदाहरणार्थ, $A = \{1, 3, 5\}$ तथा $B = \{2, 4, 6\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।

**उदाहरण 1.3.** दिया है: $A = \{2, 4\}$ और $B = \{x : x,$ समीकरण $x^2 + 6x + 8 = 0$ का एक मूल है।$\}$ क्या A तथा B असंयुक्त समुच्चय हैं ?

**हल :** यदि हम $x^2+6x+8=0$ को हल करें तो हमें प्राप्त होता है। $x=-4,-2$

$\therefore$ $B=\{-4,-2\}$ जबकि $A=\{2,4\}$ स्पष्टत: A तथा B असंयुक्त समुच्चय हैं।

**उदाहरण 1.4.** यदि $A=\{x: x$ अंग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है।$\}$ और $B=\{y: y\in N$ और $y\le 5\}$ क्या (i) $A=B$ (ii) $A\approx B$

**हल :** $A=\{a, e, i, o, u\}$, $b=\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

प्रत्येक समुच्चय में अलग-अलग पाँच अवयव हैं।

$\therefore$ $A\neq B$ परन्तु $A\approx B$

**उदाहरण 1.5.** निम्नलिखित में से कौन-सा समुच्चय परिमित या अपरिमित है।

$A=\{x: x$ एक रेखा पर स्थित बिंदु है।$\}$, $B=\{y: y\in N$ और $y\le 50\}$

**हल :** क्योंकि एक रेखा पर बिन्दुओं की संख्या अपरिमित (गिनी न जा सकने वाली) होती है। अत: A एक अपरिमित समुच्चय है, जबकि 50 तक की प्राकृत संख्याओं को गिना जा सकता है। अत: B एक परिमित समुच्चय है।

**उदाहरण 1.6.** निम्नलिखित में से कौन-सा समुच्चय रिक्त है :

$A=\{x: x^2-1=0$ और $x$ एक अपरिमेय संख्या है$\}$, $B=\{x: x\in Z$ और $-2\le x\le 2\}$

**हल :** समुच्चय A में वे अपरिमेय संख्याएँ सम्मिलित है जो $x^2-1=0$ को संतुष्ट करती है। यदि हम $x^2-1=0$ को हल करें तो हमें $x=\pm 1$ प्राप्त होता है। स्पष्टत: $\pm 1$ दोनों ही अपरिमेय संख्यायें नहीं हैं। अत: A एक रिक्त समुच्चय है। परन्तु $B=\{-2,-1,0,1,2\}$ एक रिक्त समुच्चय नहीं है क्योंकि इसमें 5 अवयव सम्मिलित हैं।

**उदाहरण 1.7.** निम्नलिखित में कौन-सा समुच्चय एकल (singleton) है?

$A=\{x: x\in Z$ और $x-2=0\}$ $B=\{y: y\in R$ और $y^2-2=0\}$.

**हल :** समुच्चय A में वे पूर्णांक सम्मिलित है जो $x-2=0$ के हल हैं अथवा $x=2$

$\therefore$ $A=\{2\}$ $\Rightarrow$ A एकल समुच्चय है।

समुच्चय B उन वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है जो $y^2-2=0$ के हल है अथवा $y=\pm\sqrt{2}$

$\therefore$ $B=\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$ अत: B एकल समुच्चय नहीं है।

## देखें आपने कितना सीखा 1.1

**1.** निम्नलिखित में कौन से समूह समुच्चय हैं ?

(i) S अक्षर से प्रारंभ होने वाले सप्ताह के दिनों का समूह।

(ii) 50 तक की प्राकृत संख्याओं का समूह।

(iii) तुलसीदास द्वारा लिखित कविताओं का समूह।

(iv) आपके विद्यालय में मोटे विद्यार्थियों का समूह।

**2.** उपयुक्त प्रतीक को रिक्त स्थान में भरिए यदि $A = \{1, 2, 3\}$

(i) 1.....A (ii) 4.....A.

**3.** निम्नलिखित समुच्चयों में से प्रत्येक को रोस्टर रूप में लिखिए–

(i) $A = \{x : x \in Z$ और $-5 \le x \le 10\}$

(ii) $B = \{x : x \in R$ तथा $x^2 - 1 = 0\}$

(iii) $C = \{x : x$ शब्द banana का एक अक्षर है$\}$

(iv) $D = \{x : x$ एक अभाज्य संख्या है तथा 60 की पूर्णतः भाजक है$\}$

**4.** निम्नलिखित समुच्चयों को समुच्चय निर्माण रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ (ii) $B = \{3, 6, 9, ..... \infty\}$

(iii) $C = \{2, 3, 5, 7\}$ (iv) $D = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

क्या उपर्युक्त A तथा B असंयुक्त समुच्चय हैं ?

**5.** निम्नलिखित समुच्चयों में से कौन से परिमित तथा कौन से अपरिमित है?

(i) किसी दी हुई रेखा के समान्तर रेखाओं का समुच्चय

(ii) पृथ्वी पर रहने वाले जानवरों का समुच्चय

(iii) 50 से कम अथवा उसके बराबर प्राकृत संख्याओं का समुच्चय

(iv) किसी वृत्त पर स्थित बिंदुओं का समुच्चय

**6.** निम्नलिखित में से कौन-कौन रिक्त या एकल समुच्चय है?

(i) $A = \{x : x$, समीकरण $x^2 + 2 = 0$ का एक हल है और $x \in R\}$

(ii) $B = \{x : x$, समीकरण $x - 3 = 0$ का एक हल है और $x \in Z\}$

(iv) $C = \{x : x$, समीकरण $x^2 - 2 = 0$ का एक एक हल है और $x \in Z\}$

(v) $D = \{x : x$, आपके विद्यालय की दोनों कक्षाओं XI और XII में अध्ययनरत विद्यार्थी है$\}$

**7.** निम्नलिखित में जाँच कीजिए कि $A = B$ या $A \approx B$।

(i) $A = \{a\}$, $B = \{x : x$ एक सम अभाज्य संख्या है।$\}$

(ii) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x : x$ शब्द guava का एक अक्षर है।$\}$

(iii) $A = \{x : x$ समीकरण $x^2 - 5x + 6 = 0$ का हल है।$\}$ $B = \{2, 3\}$

## 1.4 उपसमुच्चय

मान लीजिए कि समुच्चय A आपके विद्यालय के सभी विद्यार्थियों का समुच्चय है और B आपके विद्यालय की कक्षा XII के सभी विद्यार्थियों का समुच्चय है। इस उदाहरण में समुच्चय B का प्रत्येक अवयव समुच्चय A का भी एक अवयव है। इस प्रकार का समुच्चय B, समुच्चय A का उपसमुच्चय कहलाता है। इसे प्रतीक $B \subseteq A$ से प्रदर्शित करते हैं।

विचार कीजिए $D = \{1, 2, 3, 4, .....\}$, $E = \{..... -3 -2, -1, 0, 1, 2, 3, .....\}$

स्पष्टतः समुच्चय D का प्रत्येक अवयव समुच्चय, E का भी एक अवयव है। $\therefore$ $D \subseteq E$

यदि A तथा B दो ऐसे समुच्चय हैं कि समुच्चय A का प्रत्येक अवयव, समुच्चय B का भी एक अवयव है, तो A, B का उपसमुच्चय कहलाता है।

टिप्पणी

**टिप्पणी:**

(i) प्रत्येक समुच्चय स्वयं का उपसमुच्चय होता है अर्थात $A \subseteq A$

(ii) रिक्त समुच्चय में कोई भी अवयव नहीं होता है। उपसमुच्चय होने की स्थिति स्वयं ही पूरी हो जाती है। अत: रिक्त समुच्चय प्रत्येक समुच्चय का उपसमुच्चय होता है।

(iii) यदि $A \subseteq B$ और $B \subseteq A$ तब $A = B$

(iv) यदि $A \subseteq B$ और $A \neq B$ तो A, B का उचित उपसमुच्चय कहलाता है और B, A का अधिसमुच्चय कहलाता है। अर्थात $A \subset B$ या $B \supset A$

**उदाहरण 1.8.** यदि $A = \{x : x$ एक अभाज्य संख्या है और $x < 5\}$ और $B = \{y : y$ एक सम अभाज्य संख्या है।$\}$ क्या B, A का उचित उपसमुच्चय है ?

**हल :** यहाँ दिया गया है, $A = \{2, 3\}$, $B = \{2\}$

स्पष्टत: $B \subseteq A$ और $B \neq A$

हम लिखते हैं कि $B \subset A$ और कहते हैं कि B, A का उचित उपसमुच्चय है।

**उदाहरण 1.9.** यदि $A = \{1,2,3,4\}, B = \{2,3,4,5\}$ क्या $A \subseteq B$ या $B \subseteq A$ ?

**हल :** यहाँ $1 \in A$ परन्तु $1 \notin B \Rightarrow A \not\subseteq B$ और $5 \in B$ परन्तु $5 \notin A \Rightarrow B \not\subseteq A$

अत: न तो A, B का उपसमुच्चय और न ही B, A का उपसमुच्चय है।

**उदाहरण 1.10.** यदि $A = \{a, e, i, o, u\}$, $B = \{e, i, o, u, a\}$ क्या $A \subseteq B$ या $B \subseteq A$ या दोनों ?

**हल :** यहाँ दिए हुए समुच्चयों में, A का प्रत्येक अवयव, समुच्चय B का भी अवयव है।

$\therefore$ $A \subseteq B$ ...(i)

और B का प्रत्येक अवयव, समुच्चय A का भी अवयव है।

$\therefore$ $B \subseteq A$ ...(ii)

समीकरण (i) और (ii) से $A = B$

## 1.4.1 एक समुच्च्य के उपसमुच्चयों की संख्या

मान लीजिए $A = \{x\}$, तब A के उपसमुच्चय $\phi$, A हैं

ध्यान रहे कि $n(A) = 1$, A के उपसमुच्चयों की संख्या $= 2 = 2^1$

मान लीजिए $A = \{2, 4\}$, तब A के उपसमुच्चय $\phi$, $\{4\}$, $\{2\}$, $\{2, 4\}$ हैं।

ध्यान रहे कि $n(A) = 2$, A के उपसमुच्चयों की संख्या $= 4 = 2^2$

मान लीजिए $A = \{1, 3, 5\}$ तब A के उपसमुच्चय $\phi, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}$.

ध्यान रहे कि $n(A) = 3$, A के उपसमुच्चयों की संख्या $= 8 = 2^3$

यदि A एक समुच्चय है जिसमें $n(A) = p$ है, तब A के उपसमुच्चयों की संख्या $= 2^p$ तथा A के उचित उपसमुच्चयों की संख्या $= 2^p - 1$ है।

### वास्तविक संख्याओं के उपसमुच्चय

संख्याओं के कुछ मानक समुच्चयों को हम इस प्रकार जानते हैं–

प्राकृत संख्याओं का समुच्चय $N = \{1, 2, 3, 4, .....\}$

पूर्ण संख्याओं का समुच्चय $W = \{0, 1, 2, 3, 4, .....\}$

पूर्णांकों का समुच्चय $Z = \{....., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, .....\}$

परिमेय संख्याओं का समुच्चय $Q = \left\{x : x = \frac{p}{q}, p, q \in Z \text{ तथा } q \neq 0\right\}$

अपरिमेय संख्याओं को I द्वारा निरूपित किया जाता है।

$I = \{x : x \in R \text{ तथा } x \notin Q\}$ अर्थात् वह सभी वास्तविक संख्याएँ जो परिमेय नहीं है।

यह समुच्च्य वास्तविक संख्याओं के उपसमुच्चय हैं। इन उपसमुच्चयों में से कुछ स्पष्ट सम्बन्ध इस प्रकार है :

$N \subset W \subset Z \subset Q, Q \subset R, I \subset R, N \not\subset I$

## 1.4.2 वास्तविक संख्याओं के उपसमुच्चय के रूप में अन्तराल

अन्तराल I, R का उपसमुच्चय है यदि $x, y \in I$ तथा यदि $z$, $x$ और $y$ के मध्य कोई वास्तविक संख्या है, तब $z \in I$ है।

कोई वास्तविक संख्या जो एक अन्तराल के दो भिन्न–भिन्न अवयवों के बीच स्थित है, अन्तराल में होनी चाहिए

यदि $a, b \in R$ तथा $a < b$ तो हम निम्न प्रकार के अन्तराल प्राप्त कर सकते हैं।

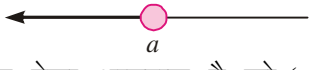
(i) समुच्चय $\{x \in R : a < x < b\}$ एक विवृत (खुला) अन्तराल कहलाता है और $(a, b)$ द्वारा निरूपित होता है। इसे संख्या रेखा पर इस प्रकार दर्शाया जाता है :

(ii) समुच्चय $\{x \in R : a \leq x \leq b\}$ एक संवृत (बंद) अन्तराल कहलाता है और $[a, b]$ द्वारा निरूपित होता है इसे संख्या रेखा पर इस प्रकार दर्शाया जाता है :

(iii) समुच्चय $\{x \in R : a < x \leq b\}$ एक अन्तराल है, जो बायीं ओर खुला तथा दायीं ओर बन्द है यह $(a, b]$ द्वारा निरूपित होता है। इसे संख्या रेखा पर इस प्रकार दर्शाया जाता है :

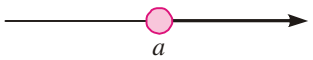
(iv) समुच्चय $\{x \in R : a \leq x < b\}$ एक ऐसा अन्तराल है, जो बायीं ओर बन्द तथा दायीं ओर खुला है। यह $[a, b)$ द्वारा निरूपित होता है। इसे संख्या रेखा पर इस प्रकार दर्शाया जाता है :

(v) समुच्चय $\{x \in R : x < a\}$ एक ऐसा अन्तराल है जो $(-\infty, a)$ द्वारा दर्शाया जाता है। यह संख्या रेखा पर इस प्रकार दर्शाया जाता है :

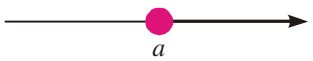



(vi) समुच्चय $\{x \in R : x \leq a\}$ एक ऐसा अन्तराल है जो $(-\infty, a]$ द्वारा दर्शाया जाता है। यह संख्या रेखा पर इस प्रकार दर्शाया जाता है :

(vii) समुच्चय $\{x \in R : x > a\}$ एक अन्तराल है जो $(a, \infty)$ द्वारा निरूपित होता हे। यह संख्या रेखा पर इस प्रकार दर्शाया जाता है :




(viii) समुच्चय $\{x \in R : x \geq a\}$ एक अन्तराल है जो $[a, \infty)$ द्वारा निरूपित होता है। यह संख्या रेखा पर इस प्रकार दर्शाया जाता है :




प्रथम चार अन्तराल परिमित अन्तराल कहलाते हैं तथा संख्या b – a (जो कि हमेशा धनात्मक होती है), चारों अन्तरालो (a, b), [a, b], (a, b], [a, b) में से प्रत्येक की लम्बाई कहलाती है। अंतिम चार अंतराल अपरिमित अन्तराल कहलाते हैं तथा इन अंतरालों की लम्बाई दर्शायी नहीं जा सकती।

## 1.5 घात समुच्चय

**उदाहरण:** मान लीजिए कि $A = \{a, b\}$ तो A के उपसमुच्चय $\phi$, {a}, {b}, {a, b} है। यदि हम इन उपसमुच्चयों को एक नए समुच्चय, मान नीजिए कि B, के अवयव मान लें तब B = {$\phi$, {a}, {b}, {a, b}}

समुच्चय B, समुच्चय A का घात समुच्चय कहलाता है।

**टिप्पणी:** समुच्चय A के घात समुच्चय को P(A) से प्रदर्शित किया जाता है। समुच्चय A के घात समुच्चय में दिए हुए समुच्चय के सभी उपसमुच्चय होते हैं।

**उदाहरण 1.11.** निम्नलिखित समुच्चयों के घात समुच्चय लिखिए:

(i) $A = \{x : x \in R$ और $x^2 + 7 = 0\}$ (ii) $B = \{y : y \in N$ और $1 \leq y \leq 3\}$

**हल:** (i) स्पष्टतः $A = \phi$ (रिक्त समुच्चय)

$\therefore$ $\phi$, दिए हुए समुच्चय का केवल उपसमुच्चय है। $\therefore$ $P(A) = \{\phi\}$

(ii) समुच्चय B को {1, 2, 3} के रूप में लिखा जा सकता है। B के उपसमुच्चय $\phi$, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3} हैं।

$\therefore$ P(B) = {$\phi$}, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}}

**उदाहरण 1.12.** निम्नलिखित प्रत्येक समुच्चय को अन्तराल रूप में लिखिए :

(i) $\{x \in R : -1 < x \leq 2\}$ (ii) $\{x \in R : 1 \geq 2x - 3 \geq 0\}$

**हल :** (i) दिया हुआ समुच्चय = $\{x \in R : -1 < x \leq 2\}$

अतः दिये गये समुच्चय का अन्तराल = $(-1, 2]$ है।

(ii) दिया हुआ समुच्चय = $\{x \in R : 1 \geq 2x - 3 \geq 0\}$

$\Rightarrow \{x \in R : 4 \geq 2x \geq 3\} \Rightarrow \left\{x \in R : 2 \geq x \geq \frac{3}{2}\right\}$

$\Rightarrow \left\{x \in R : \frac{3}{2} \leq x \leq 2\right\}$ अतः दिये हुये समुच्चय का अन्तराल = $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$

## 1.6 समष्टीय समुच्चय

निम्नलिखित समुच्चयों पर विचार कीजिए:

A = {x : x आपके विद्यालय का एक विद्यार्थी है}

B = {y : y आपके विद्यालय का एक छात्र है}

C = {z : z आपके विद्यालय की एक छात्रा है}

D = {a : a आपके विद्यालय की कक्षा XII का एक विद्यार्थी है }

स्पष्टत: समुच्चय B, C और D सभी A के उपसमुच्चय हैं।

A इस विशिष्ट उदाहरण का समष्टीय समुच्चय हो सकता है। समष्टीय समुच्चय को सामान्यत: प्रतीक 'U' से निरुपित करते हैं।

एक विशेष प्रश्न में समुच्चय 'U' एक समष्टीय समुच्चय कहलाता है यदि उस प्रश्न के सभी समुच्चय, 'U' के उपसमुच्चय हों।

**टिप्पणी:**

(i) समष्टीय समुच्चय का यह अर्थ कदापि नहीं है कि इसमें विश्व की सभी वस्तुएँ सम्मिलित है।

(ii) एक समुच्चय जो एक प्रश्न के लिए समष्टीय समुच्चय है, दूसरे प्रश्न के लिए हो सकता है कि वह समष्टीय समुच्चय न हो।

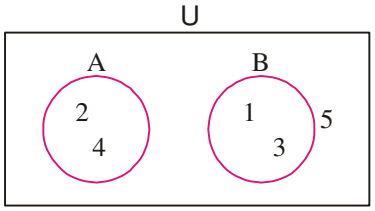
**उदाहरण 1.13.** निम्नलिखित में से कौन-सा समष्टीय समुच्चय है ?

X = {x : x एक वास्तविक संख्या है}, Y = {y : y एक ऋणात्मक पूर्णांक है}, Z = {z : z एक प्राकृत संख्या है}

**हल :** स्पष्ट है कि दोनों समुच्चय Y और Z, X के उपसमुच्चय है। ∴ X समष्टीय समुच्चय है।

## 1.7 वेन आरेख

आरेखों द्वारा समुच्चय के प्रदर्शन का विचार (अवधारणा) अंग्रेज गणितज्ञ जॉन वेन (John Venn) (1834–1883 A.D.) ने दिया। उसके द्वारा किसी समष्टीय समुच्चय को प्राय: एक आयत द्वारा और उसके उपसमुच्चयों को वृत्तों द्वारा प्रदर्शित करते हैं। उदाहरण के लिए यदि U = {1, 2, 3, 4, 5}, A = {2, 4} और B = {1, 3}, तब इन समुच्चयों को निम्नलिखित रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है:




चित्र 1.1

समुच्चयों का आरेखों द्वारा प्रदर्शन वेन आरेख कहलाता है।

## 1.8 समुच्चयों का अंतर

निम्नलिखित समुच्चयों पर विचार कीजिए :

A = {1, 2, 3, 4, 5} और B = {2, 4, 6}

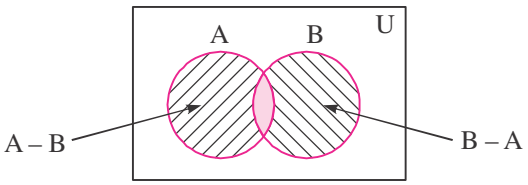
उन अवयवों के एक नये समुच्चय, जो A में है किंतु B में नहीं है, को A अंतर B पढ़ते हैं और प्रतीकात्मक रूप में A – B लिखते हैं। यहाँ A – B = {1, 3, 5}

इसी प्रकार, उन अवयवों, जो B में है परन्तु A में नहीं है, का समुच्चय B अंतर A कहलाता है और इसे $B-A$ से प्रदर्शित करते हैं। यहाँ $B - A = \{6\}$

व्यापक रूप में, यदि A और B दो समुच्चय हैं तो

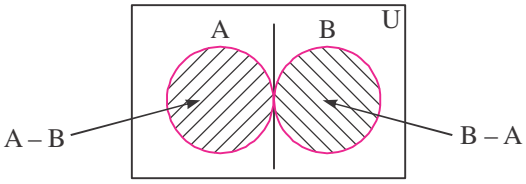
$$A-B = \{ x : x \in A \text{ और } x \notin B \} \text{ और } B-A = \{ x : x \in B \text{ और } x \notin A \}$$

दोनों समुच्चयों के अंतर को वेन आरेख द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है।




When A and B are not **disjoint** sets

चित्र 1.2




When A and B are **disjoint** sets

चित्र 1.3

## 1.9 समुच्चय का पूरक

मान लीजिए कि X एक समष्टीय समुच्चय है और y, z इसके उपसमुच्चय है जहाँ

$X = \{x : x$ परिवार का कोई एक सदस्य है।$\}$

$Y = \{y : y$ परिवार का एक पुरुष सदस्य है।$\}$

$Z = \{z : z$ परिवार का एक महिला सदस्य है।$\}$

$X - Y$ परिवार के महिला सदस्यों का एक समुच्चय है।

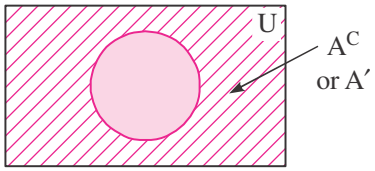
$X - Z$ परिवार के पुरुष सदस्यों का एक समुच्चय है।

$X - Y$ समुच्चय Y का पूरक समुच्चय कहलाता है और इसे प्रतीक $Y'$ या $Y^c$ से निरुपित किया जाता है।

$X - Z$, Z का पूरक समुच्चय कहलाता है और इसे प्रतीक $Z'$ या $Z^c$ से प्रदर्शित करते हैं।

यदि U एक समष्टीय समुच्चय है और A, U का एक उपसमुच्चय है तो A का पूरक समुच्चय 'U' के उन अवयवों का समुच्चय है, जो A के अवयव नहीं हैं। इसे प्रतीकात्मक रूप से $A'$ या $A^c$ से निरूपित करते हैं। $A' = U - A = \{x : x \in U \text{ और } x \notin A\}$

एक समुच्चय के पूरक को वेन आरेख द्वारा नीचे दिए गये तरीके से निरुपित किया जा सकता है।




चित्र 1.4

**टिप्पणी:**

(i) यदि दो दिए गये समुच्चयों में से कोई भी दूसरे का उपसमुच्चय न हो, तो भी उनके अन्तर को प्राप्त किया जा सकता है। परन्तु एक समुच्चय के पूरक को केवल तभी प्राप्त किया जा सकता है जबकि दिया गया समुच्चय, किसी समष्टीय समुच्चय का उपसमुच्चय हो।

(ii) $\phi^c = U$. (iii) $U^c = \phi$.

**उदाहरण 1.14.** दिया है कि $A = \{x : x$ एक सम प्राकृत संख्या है और $x \le 10\}$ और $B = \{y : y$ एक विषम प्राकृत संख्या है और $y \le 10\}$

ज्ञात कीजिए (i) $A - B$ (ii) $B - C$ (iii) क्या $A - B = B - A$ ?

**हल :** यहाँ दिया गया है कि $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

इसलिए

(i) $A - B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ (ii) $B - A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

(iii) (i) और (ii) से स्पष्ट है कि $A - B \neq B - A$

**उदाहरण 1.15.** मान लीजिए कि U एक समष्टीय समुच्चय है और A एक उपसमुच्चय है जहाँ $U = \{x : x \in N$ और $x \le 10\}$ तथा $A = \{y : y$ एक 10 से छोटी अभाज्य संख्या है।$\}$

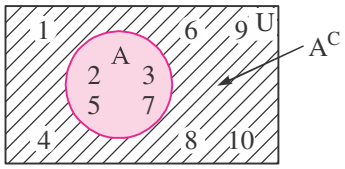
(i) $A^c$ ज्ञात कीजिए (ii) $A^c$ को वेन आरेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

**हल :** यहाँ दिया गया है कि

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, A = \{2, 3, 5, 7\}$

(i) $A^c = U - A = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$

(ii)




चित्र 1.5

## 1.9.1 पूरक समुच्चय के गुणधर्म

1. पूरक नियम
   (i) $A \cup A' = U$ (ii) $A \cap A' = \phi$
2. डि मोर्गन का नियम
   (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$
3. द्वि पूरक नियम $(A')' = A$
4. रिक्त समुच्चय तथा समष्टीय समुच्चय का नियम $\phi' = U$ तथा $U' = \phi$

### (1) पूरक नियम का सत्यापन

मान लीजिए $U = \{1, 2, 3, \ldots\ldots 10\}$ तथा $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

तब $A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

अब, $A \cup A' = \{1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, 10\} = U$ तथा $A \cap A' = \phi$

अतः $A \cup A' = U$ तथा $A \cap A' = \phi$

### (2) डि मोर्गन नियम का सत्यापन

मान लीजिए $U = \{1, 2, 3, \ldots\ldots, 9\}$ तथा $A = \{2, 4, 6, 8\}, B = \{2, 3, 5, 7\}$

अतः $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

तथा $(A \cup B)' = U - (A \cup B) = \{1, 9\}$ ...(1)

अब $A' = U - A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ तथा $B' = U - B = \{1, 4, 6, 8, 9\}$

$\therefore$ $A' \cap B' = \{1, 9\}$ ...(2)

(1) तथा (2) से $(A \cup B)' = A' \cap B'$

$A \cap B = \{2\}$ $\therefore (A \cap B)' = U - (A \cap B) = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ...(3)

तथा $A' \cup B' = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ...(4)

(3) तथा (4) से हमें प्राप्त होता है $(A \cap B)' = A' \cup B'$

### (3) $(A')' = A$ का सत्यापन

मान लीजिए $U = \{1, 2, 3, ....., 10\}$ तथा $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$

तब $A' = U - A = \{4, 6, 8, 10\}$

$\therefore$ $(A')' = U - A' = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\} = A$

इस प्रकार समष्टीय समुच्चय के उपसमुच्चय A के पूरक की परिभाषा से यह $(A')' = A$ का अनुपालन करता है।

## देखें आपने कितना सीखा 1.2

**1.** रिक्त स्थानों में उपयुक्त प्रतीक लिखिए : दिया है कि $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

(i) $\phi$ .....A (ii) $\{2, 3, 9\}$.....A (iii) 3.....A (iv) 10.....A

**2.** दिया है $A = \{a, b\}$, $P(A)$ में कितने अवयव हैं ?

**3.** मान लीजिए कि $A = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ निम्नलिखित में से कौन कथन सा सत्य है तथा कौन सा कथन असत्य है ?

(i) $\{1,2\} \subset A$ (ii) $\phi \in A$.

**4.** निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य तथा कौन सा कथन असत्य है ?

(i) सभी बालकों का समुच्चय, आपके विद्यालय के सभी विद्यार्थियों के समुच्चय में निहित है।

(ii) आपके विद्यालय के सभी बाल छात्रों का समुच्चय, आपके विद्यालय के सभी विद्यार्थियों के समुच्चय में सम्मिलित है।

(iii) सभी आयतों का समुच्चय, सभी चतुर्भुजों के समुच्चय में निहित है।

(iv) उन सभी वृत्तों का समुच्चय जिनके केन्द्र मूल बिन्दु पर हैं, उन सभी दीर्घ वृत्तों के समुच्चयों में निहित है जिनके केन्द्र भी मूल बिन्दु पर हैं।

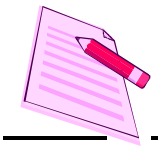
**5.** यदि $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{5, 6, 7\}$ ज्ञात कीजिए– (i) $A - B$ (ii) $B - A$

**6.** मान लीजिए N समष्टीय समुच्चय है और A, B, C, D इसके उपसमुच्चय है जहाँ–

$A = \{x : x$ सम प्राकृत संख्या है$\}$, $B = \{x : x \in N$ और x, 3 का एक गुणज है$\}$

$C = \{x : x \in N$ और $x \geq 5\}$, $D = \{x : x \in N$ और $x \leq 10\}$

A, B, C, D के पूरक ज्ञात कीजिए।



टिप्पणी

7. निम्नलिखित समुच्चयों को अन्तराल रूप में लिखिए :

(*a*) $\{x \in R : -8 < x < 3\}$ (*b*) $\{x \in R : 3 \le 2x < 7\}$

8. मान लीजिए $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ तथा $B = \{2, 4, 6, 8\}$ तब निम्नांकित का सत्यापन कीजिए

(i) $(A')' = A$ (ii) $(B')' = B$ (iii) $A \cap A' = \phi$ (iv) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

## 1.10 समुच्चयों का सर्वनिष्ठ

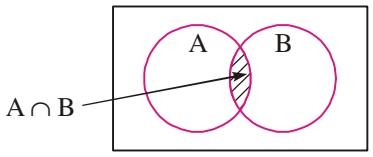
यहाँ दिए गए समुच्चयों पर विचार कीजिए– $A = \{1, 2, 3, 4\}$ और $B = \{2, 4, 6\}$

यह स्पष्ट है कि दोनों समुच्चयों A तथा B में कुछ अवयव उभयनिष्ठ हैं। समुच्चय A और B का सर्वनिष्ठ उन सभी अवयवों का समुच्चय है जो A और B दोनों में उभयनिष्ठ हैं। प्रतीक '$\cap$' का प्रयोग सर्वनिष्ठ को निरुपित करने के लिए किया जाता है। यहाँ $A \cap B = \{2, 4\}$

**यदि A और B दो समुच्चय है तब इनका सर्वनिष्ठ उन अवयवों का समुच्चय होता है जो A और B दोनों में उभयनिष्ठ होते हैं इसे $A \cap B$ से निरूपित किया जाता है।**

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ और } x \in B\}$$

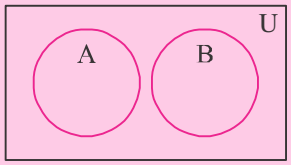
$A \cap B$ को वेन आरेख द्वारा निरुपित किया जा सकता है जैसे–




चित्र 1.6

**टिप्पणी:**

यदि $A \cap B = \phi$ हो, तो A तथा B असंयुक्त समुच्चय कहलाते हैं। असंयुक्त समुच्चयों को वेन आरेख द्वारा निरुपित किया जा सकता है। जैसे–




चित्र 1.7

**उदाहरण 1.16.** दिया है

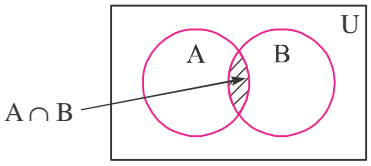
$A = \{x : x,$ ताश के 52 पत्तों में एक बादशाह (king) का पत्ता है।$\}$ और $B = \{y : y$ ताश के 52 पत्तों में एक हुकुम (spade) का पत्ता है।$\}$ ज्ञात कीजिए (i) $A \cap B$ (ii) $A \cap B$ को वेन आरेख से प्रदर्शित कीजिए।

**हल :** (i) क्योंकि ताश के 52 पत्तों में केवल चार किंग (बादशाह) होते हैं इसलिए समुच्चय A में केवल चार अवयव हैं।

समुच्चय B में 13 अवयव हैं, क्योंकि हुकुम के 13 पत्ते होते हैं परन्तु 13 हुकुम के पत्तों में एक पत्ता बादशाह होता है। इसलिए A तथा B में एक अवयव उभयनिष्ठ है।

$\therefore$ $A \cap B = \{$हुकुम का बादशाह$\}$

(ii)




चित्र 1.8

## 1.11 समुच्चयों का सम्मिलन

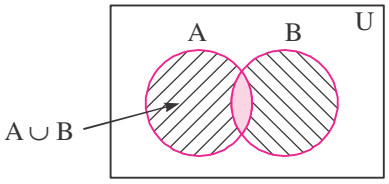
निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार कीजिए :

(i) A भारतीय पुरुष क्रिकेट टीम के खिलाड़ियों का समुच्चय है और B भारतीय महिला क्रिकेट टीम के खिलाड़ियों का समुच्चय है। स्पष्ट है कि A और B असंयुक्त समुच्चय है। दो समुच्चयों A और B का सम्मिलन समुच्चय, वह समुच्चय है जिसमें दोनों टीमों के सभी खिलाड़ी हों और इसे प्रतीकात्मक रूप में $A \cup B$ प्रदर्शित करते हैं।

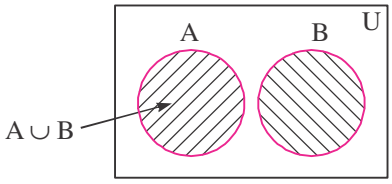
(ii) यदि D आपके विद्यालय की क्रिकेट टीम के सभी खिलाड़ियों का एक समुच्चय है और E हॉकी टीम के सभी खिलाड़ियों का समुच्चय है; साथ ही मान लीजिए कि तीन खिलाड़ी दोनों टीमों में सम्मिलित हैं तब D और E का सम्मिलन समुच्चय वह समुच्चय है जिसमें दोनों टीमों के सभी खिलाड़ी हों परन्तु तीन उभयनिष्ठ खिलाड़ियों को केवल एक बार गिना जाएगा। यदि A और B केवल दो समुच्चय हों तब A और B का सम्मिलन समुच्चय उन अवयवों का समुच्चय है जो A या B से सम्बन्धित हों।

समुच्चय निर्माण रूप में $A \cup B = \{x : x \in A$ या $x \in B\}$ अथवा $A \cup B = \{x : x \in A - B$ या $x \in B - A$ या $x \in A \cap B\}$

$A \cup B$ को वेन आरेख द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है जैसे–




चित्र 1.9




चित्र 1.10

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B).$$

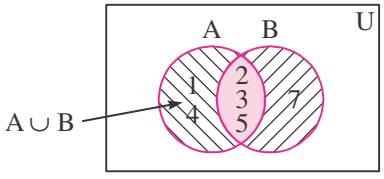
अथवा $$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

जहाँ $n(A \cup B)$ समुच्चय $A \cup B$ के अवयवों की संख्या को दर्शाता है।

**उदाहरण 1.17.** $A = \{x : x \in Z^+$ और $x \leq 5\}$

$B = \{y : y, 10$ से छोटी अभाज्य संख्या है$\}$

ज्ञात कीजिए (i) $A \cup B$ (ii) $A \cup B$ को वेन आरेख की सहायता से प्रदर्शित कीजिए।




चित्र 1.11

**हल :** $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{2, 3, 5, 7\}$.

$\therefore$ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$.

## देखें आपने कितना सीखा 1.3

**1.** निम्नलिखित समुच्चय युग्मों में से कौन से युग्म असंयुक्त है और कौन से नहीं ?

(i) $\{x : x$ एक सम प्राकृत संख्या है।$\}$, $\{y : y$ एक विषम प्राकृत संख्या है।$\}$

(ii) $\{x : x$ एक अभाज्य संख्या है और 12 की भाजक है।$\}$ $\{y : y \in N$ और $3 \le y \le 5\}$

(iii) $\{x : x$ ताश के 52 पत्तों में बादशाह है।$\}$ $\{y : y$ ताश के 52 पत्तों में एक ईंट का पत्ता है।$\}$

(iv) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{a, e, i, o, u\}$

**2.** निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए A तथा B का सर्वनिष्ठ ज्ञात कीजिए :

(i) $A = \{x : x \in Z\}$, $B = \{x : x \in N\}$ (ii) $A =$ { राम, रहीम, गोविन्द, गौतम }
$B =$ { सीता, मीरा, फातिमा, मनप्रीत}

**3.** दिया है कि $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

ज्ञात कीजिए (i) $A \cup B$ (ii) $A \cap B$

**4.** यदि $A = \{x : x \in N\}$, $B = \{y : y \in z$ और $-10 \le y \le 0\}$ हो, तो $A \cup B$ ज्ञात कीजिए और अपने उत्तर को रोस्टर रूप में तथा समुच्चय निर्माण रूप में लिखिए।

**5.** यदि $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{8, 10, 12, 14\}$ तथा $C = \{14, 16, 18, 20\}$ हो, तो

ज्ञात कीजिए : (i) $A \cup (B \cup C)$ (ii) $A \cap (B \cap C)$

**6.** मान लीजिए कि $U = \{1, 2, 3, ....., 10\}$, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$

ज्ञात कीजिए (i) $(A \cup B)'$ (ii) $(A \cap B)'$ (iii) $(B')'$ (iv) $(B - A)'$

**7.** निम्नलिखित में प्रत्येक को वेन आरेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

(i) $A \cap B$ जब $B \subset A$ (ii) $A \cap B$ जब A और B असंयुक्त समुच्चय हो।

(iii) $A \cap B$ जब A और B न तो एक दूसरे के उपसमुच्चय हों और न ही असंयुक्त समुच्चय हो।

**8.** निम्नलिखित में प्रत्येक के लिए वेन आरेख खींचिए–

(i) $A \cup B$ जब $A \subset B$ (ii) $A \cup B$ जबकि A और B असंयुक्त समुच्चय हैं।

(iii) $A \cup B$ जब A और B न तो एक दूसरे के उपसमुच्चय हैं और न ही असंयुक्त समुच्चय।

**9.** निम्नलिखित में प्रत्येक के लिए वेन आरेख खींचिए–

(i) $A - B$ और $B - A$ जबकि $A \subset B$

(ii) $A - B$ और $B - A$ जबकि A और B असंयुक्त समुच्चय हैं।

(iii) $A - B$ और $B - A$ जबकि A तथा B न तो एक दूसरे के उपसमुच्चय हैं और न ही असंयुक्त समुच्चय।

## आइये दोहराएँ

- समुच्चय सुपरिभाषित वस्तुओं का समूह है।
- एक समुच्चय को रोस्टर रूप में निरूपित करने के लिए सभी अवयवों को अलग-अलग लिखते हैं परन्तु समुच्चय निर्माण में सभी अवयवों में एक सर्वनिष्ठ गुण होता है।

टिप्पणी

- एक समुच्चय जिसके अवयवों की संख्या को गिना जा सके, परिमित समुच्चय कहलाता है और यदि अवयवों की संख्या को अन्त तक गिनना संभव न हो, तो वह अपरिमित कहलाता है।
- यदि समुच्चय A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B का भी एक अवयव हो तो A, B का उपसमुच्चय कहलाता है।
- दो समुच्चयों A तथा B के लिए, $A - B$ उन अवयवों का समुच्चय है जो A में है परन्तु B में नहीं।
- समुच्चय A का पूरक, उन अवयवों का समुच्चय होता है जो समष्टीय समुच्चय में होते हैं परन्तु A में नहीं होते हैं, अर्थात $A^c = U - A$
- दो समुच्चयों का सर्वनिष्ठ उन सभी अवयवों का समुच्चय होता है जो दोनों में उभयनिष्ठ होते हैं।
- दो समुच्चयों का सम्मिलन वह समुच्चय होता है, जिसमें दोनों ही समुच्चयों के अवयव हों।
- कोई समुच्चय A समुच्चय B का उपसमुच्चय कहलाता है यदि A का प्रत्येक अवयव B में विद्यमान हो।
- रिक्त समुच्चय, प्रत्येक समुच्चय का उपसमुच्चय है।
- प्रत्येक समुच्चय स्वयं का उपसमुच्चय है।
- यदि और केवल यदि $A \subset B$ तथा $A \neq B$ है, तो समुच्चय A समुच्चय B का उचित उपसमुच्चय है।
- दिये गये समुच्चय A के सभी उपसमुच्चयों के समुच्चय को समुच्चय A का धात समुच्चय कहते हैं।
- दो समुच्चय A तथा B समान होते हैं केवल यदि $A \subset B$ तथा $B \subset A$.
- यदि $n(A) = p$, तब A के उपसमुच्चयों की संख्या $= (2)^p$ है।
- $(a, b), [a, b], (a, b]$ तथा $[a, b)$ परिमित अन्तराल हैं उनकी लम्बाई $b - a$ वास्तविक एवं परिमित है।
- समुच्चय A का पूरक, U के सापेक्ष A′ द्वारा दर्शाया जाता है तथा $A' = \{x : x \in U$ तथा $x \notin A\}$ द्वारा परिभाषित किया जाता है।
- $A' = U - A$
- यदि $A \subset U$ तब $A' \subset U$
- U के सापेक्ष समुच्चय A के पूरक होने के गुण
  - $A \cup A' = U$ तथा $A \cap A' = \phi$
  - $(A \cup B)' = A' \cap B'$ तथा $(A \cap B)' = A' \cup B'$
  - $(A')' = A$
  - $\phi' = U$ तथा $U' = \phi$

## सहायक वेबसाईट

- *http://www.mathresource.iitb.ac.in/project/indexproject.html*
- *http://mathworld.wolfram.com/SetTheory.html*
- *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Beginnings_of_set_theory.html*

## आइए अभ्यास करें

**1.** निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य तथा कौन से असत्य है :

(i) $\{1,2,3\}=\{1,\{2\},3\}$. (ii) $\{1,2,3\}=\{3,1,2\}$.

(iii) $\{a,e,o\}=\{a,b,c\}$. (iv) $\{\phi\}=\{\ \}$

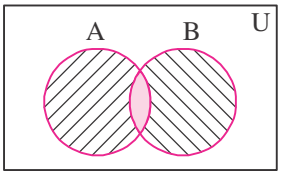
**2.** दर्शाए गए छायांकित भाग को रोस्टर रूप में लिखिए :

(i) $A=\{1,2,3,4,5\}$

$B=\{5,6,7,8,9\}$

(ii) $A=\{1,2,3,4,5,6\}$

$B=\{2,6,8,10,12\}$



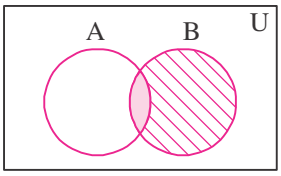
चित्र 1.12

**3.** वेन आरेख की सहायता से निम्नलिखित को प्रदर्शित कीजिए :

(i) $(A\cup B)'$, यदि A तथा B असंयुक्त समुच्चय न हों।

(ii) $(A\cap B)'$, यदि A तथा B असंयुक्त समुच्चय हों।

(iii) $(A-B)'$, यदि A तथा B असंयुक्त समुच्चय न हों।



चित्र 1.13

**4.** मान लीजिए कि $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A=\{2,4,6,8\}$, $B=\{1,3,5,7\}$। जाँच कीजिए :

(i) $(A\cup B)'=A'\cap B'$ (ii) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

(iii) $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$.

**5.** मान लीजिए कि $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,

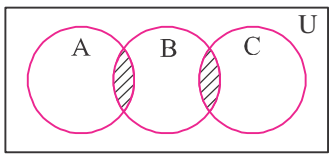
$A=\{1,3,5,7,9\}$. $B=\{2,4,6,8,10\}$, $C=\{1,2,3\}$.

ज्ञात कीजिए (i) $A'\cap(B-C)$. (ii) $A\cup(B\cup C)$

(iii) $A'\cap(B\cup C)'$ (iv) $(A\cap B)'\cup C'$

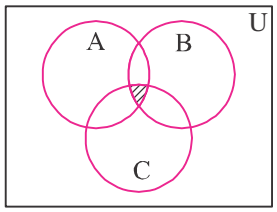
**6.** नीचे दिए गए वेन आरेखों के छायांकित भाग क्या दर्शाते हैं।

(i)



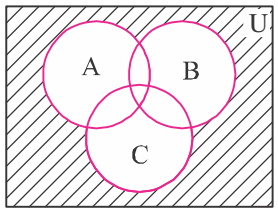
चित्र 1.14

(ii)



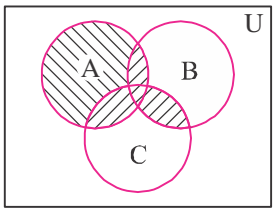
चित्र 1.15

(iii)




चित्र 1.16

(iv)




चित्र 1.17

7. निम्नलिखित के लिए वेन आरेख खींचिए :

(i) $A' \cap (B \cup C)$ (ii) $A' \cap (C - B)$

जहाँ A, B, C असंयुक्त समुच्चय नहीं है और समष्टीय समुच्चय U के उपसमुच्चय हैं।

8. डिमोर्गन नियम का सत्यापन कीजिए यदि $U = \{x : x \in N$ तथा $x \leq 10\}$

$A = \{x : x \in U$ तथा $x$ एक अभाज्य संख्या है$\}$ तथा

$B = \{x : x \in U$ तथा $x$, 24 का एक गुणनखण्ड है $\}$

9. परीक्षण कीजिए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं अथवा असत्य

(*a*) $\{a, e\} \subset \{x : x$ अंग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है$]$ (*b*) $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 3, 5\}$

(*c*) $\{a, b, c\} \subset \{a, b, c\}$ (*d*) $\phi \subset \{1, 3, 5\}$

10. नीचे लिखे समुच्चयों के सभी उपसमुच्चय लिखिए :

(*a*) $\{a\}$ (*b*) $\{1, 2, 3\}$ (*c*) $\phi$

11. निम्नलिखित को अन्तराल के रूप में लिखिए :

(*a*) $\{x : x \in R, -4 < x \leq 6\}$ (*b*) $\{x : x \in R, -12 < x < -10\}$

(*c*) $\{x : x \in R, 0 \leq x < 7\}$ (*d*) $\{x : x \in R, 3 \leq x \leq 4\}$

## उत्तरमाला

### देखें आपने कितना सीखा 1.1

1. (i), (ii), (iii) are sets.

2. (i) $\in$ (ii) $\notin$

3. (i) $A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0 \ \& \ 1, 2, 3, 4, 5, 6, ....., 10\}$

(ii) $B = \{-1, 1\}$, (iii) $C = \{a, b, n\}$ (iv) $D = \{2, 3, 5\}$.

4. (i) A = {x : x एक 10 के बराबर अथवा उससे छोटी सम प्राकृत संख्या है}

(ii) B = { x : x $\in$ N और x 3 का गुणज है}

(iii) C = {x : x 10 से छोटी अभाज्य संख्या है।

(iv) D = { x : x $\in$ R तथा x, $x^2 - 2 = 0$ का हल है।

5. (i) अपरिमित (ii) परिमित (iii) परिमित (iv) अपरिमित

6. (i) रिक्त (ii) एकल (iii) रिक्त (iv) रिक्त

7. (i) $A \approx B$ (ii) $A \approx B$ (iii) $A = B$.

## देखें आपने कितना सीखा 1.2

1. (i) $\subset$ (ii) $\not\subset$ (iii) $\in$ (iv) $\notin$

2. 4

3. (i) असत्य (ii) सत्य

4. (i) असत्य (ii) सत्य (iii) सत्य (iv) असत्य

5. (i) $\{1, 2, 3, 4\}$ (ii) $\{6, 7\}$.

6. $A^c = \{x : x$ एक विषम संख्या है$\}$

$B^c = \{x : x \in N$ और $x$ 3 का गुणज नहीं है$\}$

$C^c = \{1, 2, 3, 4\}$, $D^c = \{11, 12, 13, .....\}$

7. (a) $(-8, 3)$ (b) $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$

## देखें आपने कितना सीखा 1.3

1. (i) असंयुक्त (ii) असंयुक्त नहीं है (iii) असंयुक्त नहीं है (iv) असंयुक्त

2. (i) $\{x : x \in N\}$ (ii) $\phi$

3. (i) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (ii) $\{5\}$

4. रोस्टर रूप $\{-10, -9, -8, .....0, 1, 2, 3, .....\}$

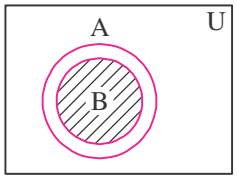
समुच्चय निर्माण रूप $\{x : x \in Z$ और $-10 \le x \le \infty\}$

5. (i) $\{x : x$ एक 20 से छोटी अथवा उसके बराबर सम संख्या है। (ii) $\phi$

6. (i) $\phi$ (ii) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

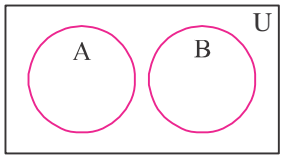
(iii) $\{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$ (iv) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

7. (i)



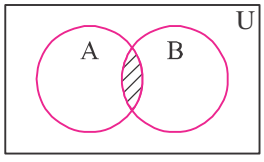

चित्र 1.18

(ii)

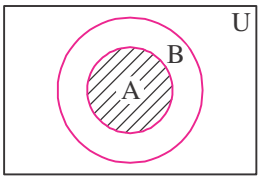



चित्र 1.19

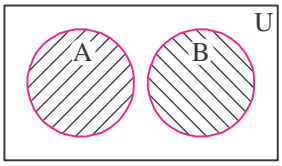
(iii)



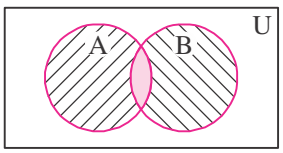

चित्र 1.20

8. (i) 

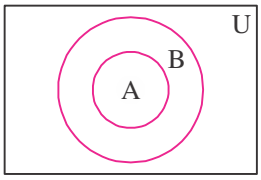

चित्र 1.21

(ii) 

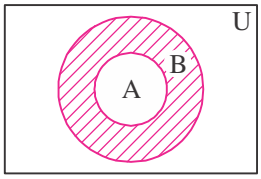

चित्र 1.22

(iii) 


चित्र 1.23

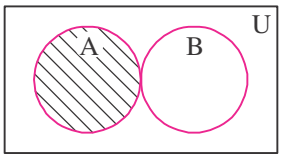
9. (i) 


$A - B = \phi$

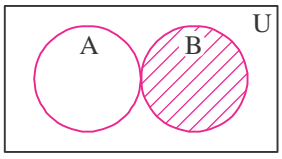



$B - A =$ छायांकित भाग

चित्र 1.24

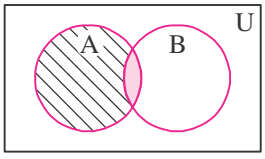
(ii) 


$A - B = A$

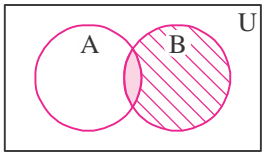



$B - A = B$

चित्र 1.25

(iii) 


$A - B =$ छायांकित भाग



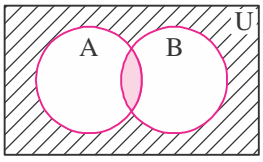

$B - A =$ छायांकित भाग

चित्र 1.26

## आइए अभ्यास करें

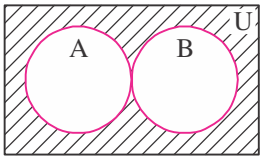
1. (i) असत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) असत्य

2. (i) $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ (ii) $\{8, 10, 12\}$

3. (i) 

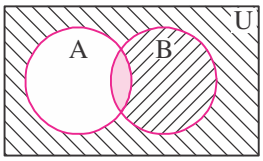

$(A \cup B)' =$ छायांकित भाग

चित्र 1.27

(ii) 


$(A \cap B)' =$ छायांकित भाग

चित्र 1.28

(iii) 

$(A - B)'$ = छायांकित भाग

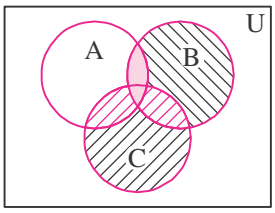
चित्र 1.29

5. (i) $\{4, 6, 8, 10\}$ (ii) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. (iii) $\phi$

(iv) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

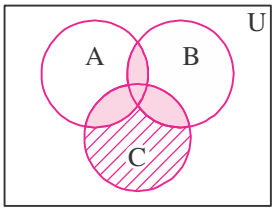
6. (i) $(A \cap B) \cap (B \cap C)$ (ii) $(A \cap B) \cap C$

(iii) $[(A \cup B) \cup C]'$ (iv) $A \cup (B \cap C)$.

7. (i) 

$A' \cap (B \cup C)$ = छायांकित भाग

चित्र 1.30

(ii) 

$A' \cap (C - B)$ = छायांकित भाग

चित्र 1.31

9. (*a*) सत्य (*b*) असत्य (*c*) सत्य (*d*) सत्य

10. (*a*) $\phi$, $\{a\}$ (*b*) $\phi$, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}

(c) $\phi$

11. (*a*) $(-4, 6]$ (*b*) $(-12, -10)$ (*c*) $[0, 7)$ (*d*) $[3, 4]$