14

सरल रेखाएँ

ज्यामिति में हमने रेखाओं, कोणों और आयताकार आकृतियों के बारे में पढ़ा है। ध्यान दीजिए कि एक समतल में दो बिन्दुओं को मिलाने से एक रेखा बनती है। हमें रैखिक समीकरणों से ग्राफ भी देखने को मिलते हैं, जो सरल रेखाओं में आते हैं।

रोचकतापूर्ण, एक समतल में विभिन्न शर्तों के अन्तर्गत उपर्युक्त समस्या का विपरीत प्राप्त करना ही सरल रेखाओं के समीकरण हैं। विश्लेषणात्मक ज्यामिति का सर्वनिष्ठ, निर्देशांक ज्यामिति कहलाता है। इस पाठ में हम सरल रेखाओं के समीकरण विभिन्न रूपों में ज्ञात करेंगे और उन पर आधारित समस्याओं को हल करने का प्रयत्न करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे

- अक्षों के समान्तर प्रत्येक रेखा का समीकरण व्युत्पन्न करना
- रेखा के विभिन्न रूपों (प्रवणता–अन्तःखण्ड, बिन्दु–प्रवणता, दो बिन्दु, अन्तःखण्ड और लम्बवत्) में समीकरण व्युत्पन्न करना
- दी गई शर्तों के अन्तर्गत विभिन्न रूपों में रेखा का समीकरण ज्ञात करना
- रेखा के प्रथम घात के व्यापक समीकरण का वर्णन करना
- रेखा के व्यापक समीकरण को व्यक्त करना

  (i) प्रवणता–अन्तःखण्ड रूप (ii) अन्तःखण्ड रूप और (iii) लम्बवत् रूप
- एक दी हुई रेखा से दिए हुए बिन्दु की दूरी का सूत्र ज्ञात करना
- एक दी हुई रेखा से दिए हुए बिन्दु की दूरी की गणना करना
- एक दिए हुए बिन्दु से होकर तथा एक दी हुई रेखा के समान्तर/लम्बवत् रेखा का समीकरण व्युत्पन्न करना;
- दो रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिन्दु से होकर जाती रेखाओं के समूह का समीकरण ज्ञात करना।

टिप्पणी

पूर्वज्ञान

- त्रिभुजों की सर्वांगसमता और समरूपता

14.1 एक अक्ष के समान्तर रेखा

यदि आप एक कमरे में अपनी भुजाएँ किसी किनारे के समान्तर खोलकर खड़े हो जाएँ तो हम फर्श पर भुजाओं के समान्तर रेखा खींच सकते हैं। इस रेखा के लम्बवत् एक रेखा खींची जा सकती है जो पहली रेखा को अपनी टांगों के बीच में प्रतिच्छेद करे।

इस स्थिति में आपके सामने की रेखा का भाग व आपके पीछे जाने वाली रेखा का भाग y-अक्ष है तथा आपकी भुजाओं के समान्तर रेखा x-अक्ष है।

y-अक्ष का वह भाग जो आप देख सकते हैं धनात्मक है तथा बांयी ओर का भाग ऋणात्मक।

अब माना कि आपके सम्मुख किनारा आपसे 'b' मीटर दूर है तब इस किनारे का समीकरण होगा $y = b$ (x-अक्ष के समान्तर)

जहाँ b का निरपेक्ष मान x-अक्ष से विपरीत किनारे की दूरी के बराबर है।

यदि $b > 0$, तब किनारा आपके सामने आयेगा अर्थात् x-अक्ष के ऊपर।

यदि $b < 0$, तब किनारा आपके पीछे होगा अर्थात् x-अक्ष के नीचे।

यदि $b = 0$, तब रेखा आपसे होकर गुजरेगी अर्थात् स्वयं x-अक्ष।

पुनः, माना कि आपके दायीं ओर का किनारा आपसे c मीटर की दूरी पर है तब इस किनारे का समीकरण होगा $x = c$ (y-अक्ष के समान्तर)

जहाँ c का निरपेक्ष मान y-अक्ष से दूरी के बराबर है जोकि आपके दायीं ओर है।

यदि $c > 0$, तब किनारा (रेखा) आपके दायीं ओर है अर्थात् y-अक्ष के दायीं ओर।

यदि $c < 0$, तब किनारा (रेखा) आपके बांयीं ओर है अर्थात् y-अक्ष के बांयीं ओर।

यदि $c = 0$, तब रेखा आपसे होकर गुजरती है अर्थात् यह y-अक्ष है।

उदाहरण 14.1. बिन्दु $(-2, -3)$ से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो

(i) x-अक्ष के समान्तर हो (ii) y-अक्ष के समान्तर हो।

हल : (i) x-अक्ष के समान्तर किसी रेखा का समीकरण है: $y = b$

क्योंकि यह बिन्दु $(-2, -3)$ से होकर जाती है अतः $-3 = b$

$\therefore$ रेखा का वांछित समीकरण हुआ: $y = -3$

(ii) y-अक्ष के समान्तर किसी रेखा का समीकरण है: $x = c$

क्योंकि यह बिन्दु $(-2, -3)$ से होकर जाती है अतः $-2 = c$

$\therefore$ रेखा का वांछित समीकरण है: $x = -2$

देखें आपने कितना सीखा 14.1

1. बिन्दु (–3, –4) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो

   (a) x-अक्ष के समान्तर हो (b) y-अक्ष के समान्तर हो

2. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो (5, –3) से होकर जाती है तथा x-अक्ष पर लम्ब है।

3. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो (–3, –7) से होकर जाती है तथा y-अक्ष पर लम्ब है।

14.2 सरल रेखा के समीकरण का व्युत्पन्न: विभिन्न मानक रूप में

अभी तक हमने रेखा की आनति, झुकाव, प्रवणता तथा अक्षों के समान्तर रेखाओं के बारे में पढ़ा है। अब प्रश्न यह है कि क्या हम x और y में कोई सम्बन्ध ज्ञात कर सकते हैं जबकि (x, y) रेखा पर कोई स्वेच्छ बिन्दु है।

x और y में वह सम्बन्ध जो रेखा के स्वैच्छिक बिन्दु के निर्देशांकों से संतुष्ट होता है सरल रेखा का समीकरण कहलाता है। रेखा का समीकरण दी गई स्थितियों के अनुसार विभिन्न रूपों में ज्ञात किया जा सकता है जैसे

(a) जब रेखा की प्रवणता तथा y-अक्ष पर उसका अन्तःखण्ड दिया हो।

(b) जब रेखा की प्रवणता दी हुई हो तथा एक दिए हुए बिन्दु से होकर जाती हो।

(c) जब रेखा दो दिए हुए बिन्दुओं से होकर जाती हो।

(d) जब हमें रेखा द्वारा अक्षों पर बने अन्तःखण्ड दिए हों।

(e) जब हमें मूल बिन्दु से रेखा पर लम्ब की लम्बाई दी गई है तथा लम्ब के द्वारा धनात्मक x-अक्ष के साथ बनने वाला कोण दिया हो।

यहाँ हम एक–एक करके सभी स्थितियों की चर्चा करेंगे तथा रेखा का समीकरण मानक रूप में ज्ञात करने का प्रयत्न करेंगे।

(A) प्रवणता–अन्तःखण्ड रूप

माना AB एक सरल रेखा है जो x-अक्ष के साथ θ कोण बनाती है तथा अन्तःखण्ड $OD = c$, OY पर अन्तःखण्ड काटती है।

रेखा y-अक्ष पर $OD = c$ अन्तःखण्ड काटती है यह y-अन्तःखण्ड कहलाता है।

माना AB, OX' को T पर काटती है।

AB पर कोई बिन्दु $P(x, y)$ लें। $PM \perp OX$ खींचिए।

तब $OM = x$, $MP = y$. $DN \perp MP$ खींचें।

समकोण ΔDNP से हमें प्राप्त हुआ:

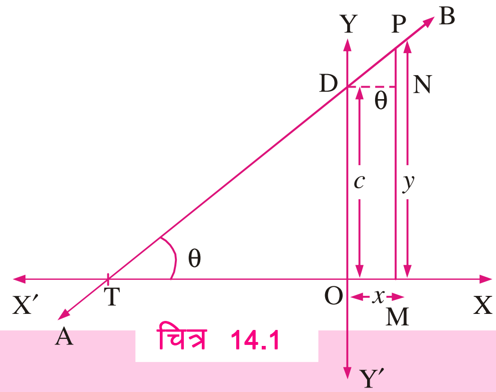
$$\tan\theta = \frac{NP}{DN} = \frac{MP - MN}{OM} = \frac{y - OD}{OM} = \frac{y - c}{x}$$

$\therefore \qquad y = x\tan\theta + c$

$\tan\theta = m$ (प्रवणता)

$\therefore \qquad y = mx + c$

क्योंकि यह समीकरण रेखा AB के ऊपर प्रत्येक बिन्दु के लिए सत्य है परन्तु तल में किसी और बिन्दु के लिए नहीं, इसलिए यह रेखा AB के समीकरण का निरूपण है।



चित्र 14.1

टिप्पणी : (1) जब $c = 0$ और $m \neq 0 \Rightarrow$ रेखा मूलबिन्दु से गुज़र रही है और इसका समीकरण $y = mx$ है।

(2) जब $c = 0$ और $m = 0 \Rightarrow$ रेखा x-अक्ष के साथ संपाती है और इसका समीकरण $y = 0$ है।

(3) जब $c \neq 0$ और $m = 0 \Rightarrow$ रेखा x-अक्ष के समान्तर है और इसका समीकरण $y = c$ है।

उदाहरण 14.2. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी प्रवणता 4 तथा y-अन्त:खण्ड 0 है।

हल : $m = 4$ तथा $c = 0$ रखने पर समीकरण का प्रवणता अन्त:खण्ड रूप से हमें प्राप्त हुआ

$$y = 4x$$

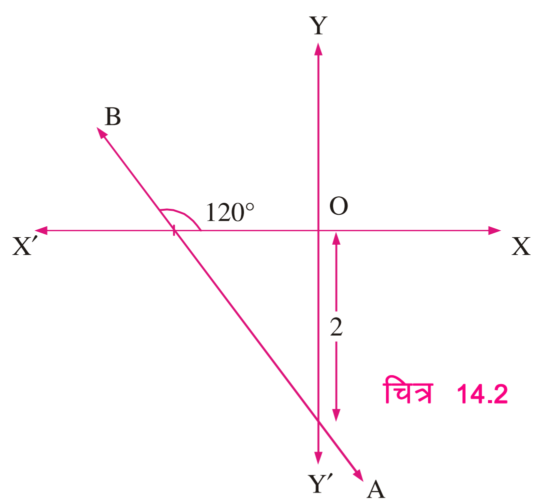
और यही रेखा का वांछित समीकरण है।

उदाहरण 14.3. उस रेखा की प्रवणता तथा y-अन्त:खण्ड ज्ञात कीजिए जिसका समीकरण $8x + 3y = 5$ है।

हल : y के लिए हल करने पर हमें प्राप्त हुआ

$$y = -\frac{8}{3}x + \frac{5}{3}$$

इस समीकरण की तुलना प्रवणता अन्त:खण्ड रूप से करने पर हम देखते हैं कि $m = -\frac{8}{3}$ और $c = \frac{5}{3}$ अत: रेखा की प्रवणता $-\frac{8}{3}$ तथा y-अन्त:खण्ड $\frac{5}{3}$ है।



चित्र 14.2

उदाहरण 14.4. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो ऋणात्मक y-अक्ष पर 2 लम्बाई का अन्त:खण्ड काटती है और x-अक्ष पर 120° आनति है।

हल : रेखा की प्रवणता अन्त:खण्ड रूप से

$$y = x\tan 120^\circ + (-2) = -\sqrt{3}\,x - 2 \quad \text{या} \quad y + \sqrt{3}\,x + 2 = 0$$

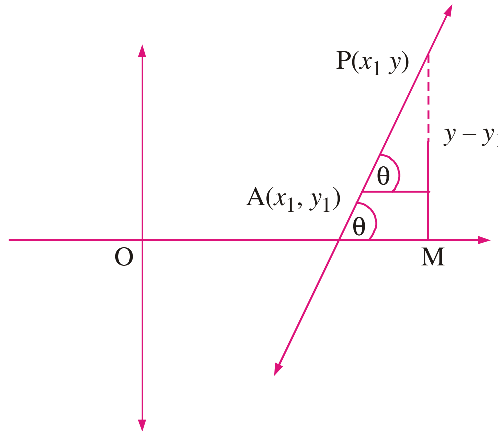
यहाँ $m = \tan 120^\circ$, और $c = -2$, क्योंकि अन्त:खण्ड y-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में कट रहा है।

(B) बिन्दु–प्रवणता रूप

यहाँ हम उस रेखा का समीकरण ज्ञात करेंगे जो दिए हुए बिन्दु $A(x_1, y_1)$ से होकर जाती है तथा जिसकी प्रवणता m है।

माना $P(x, y)$ उस रेखा पर A के अतिरिक्त कोई और बिन्दु है।

$A(x_1, y_1)$ तथा $P(x, y)$ को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता



चित्र 14.3

$$\mathrm{m} = \tan\theta = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

परन्तु रेखा AP की प्रवणता m दिया गया है।

$$\therefore \quad m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$\therefore$ वांछित रेखा का समीकरण है $y - y_1 = m(x - x_1)$

टिप्पणी: क्योंकि y-अक्ष के समान्तर रेखाओं के लिए प्रवणता m परिभाषित नहीं है इसलिए बिन्दु प्रवणता रूप के समीकरण से उस रेखा का समीकरण प्राप्त नहीं किया जा सकता जो $A(x_1, y_1)$ से होकर जाती है तथा y-अक्ष के समान्तर है। परन्तु इससे कोई कठिनाई नहीं होती क्योंकि इस प्रकार की रेखाओं पर किसी बिन्दु का x-निर्देशांक x_1 होता है इसलिए इस प्रकार की रेखा का समीकरण $x = x_1$ है।

उदाहरण 14.5. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(2, -1)$ से होकर जाती है तथा जिसकी प्रवणता $\frac{2}{3}$ है।

हल : बिन्दु प्रवणता रूप के समीकरण में $x_1 = 2, y_1 = -1$ और $m = \frac{2}{3}$ रखने पर हमें प्राप्त हुआ

$$y - (-1) = \frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow y + 1 = \frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$$

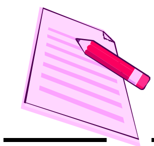
यही रेखा का वांछित समीकरण है।

(C) दो बिन्दु रूप

माना $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ दो भिन्न बिन्दु हैं। इन बिन्दुओं से होकर जाती हुई रेखा की प्रवणता होती है

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (x_2 \neq x_1)$$

रेखा के बिन्दु–प्रवणता रूप के समीकरण से हमें प्राप्त हुआ



$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

यही दो बिन्दु रूप में रेखा का समीकरण है।

उदाहरण 14.6. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (3, – 7) तथा (– 2,– 5) से होकर जाती है।

हल : दो बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण होता है

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ (x - x_1) \qquad \cdots (i)$$

क्योंकि $x_1 = 3$, $y_1 = -7$ और $x_2 = -2$, और $y_2 = -5$, समीकरण (i) हो जाएगा

$$y + 7 = \frac{-5+7}{-2-3}\ (x-3) \text{ या } y + 7 = \frac{2}{-5}\ (x-3)$$

या $\quad 2x + 5y + 29 = 0$

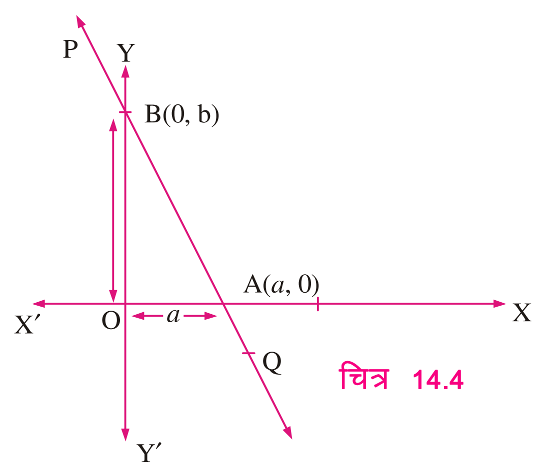
(D) अन्तःखण्ड रूप

हम उस रेखा का समीकरण ज्ञात करना चाहते हैं जो निर्देशांक अक्षों पर दिए गए अन्तःखण्ड काटती है।

माना PQ एक रेखा है जो x-अक्ष को A पर तथा y-अक्ष को B पर मिलती है।

माना $OA = a,\qquad OB = b.$

तब A और B के निर्देशांक क्रमशः $(a, 0)$ तथा $(0, b)$ होंगे



चित्र 14.4

A और B को मिलाने वाली रेखा का समीकरण है

$$y - 0 = \frac{b-0}{0-a}\ (x-a)$$

या $$y = -\frac{b}{a}\ (x-a)$$

या $$\frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1 \text{ या } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

यही उस रेखा का वांछित समीकरण है जो अक्षों पर a और b अन्तःखण्ड काटती है।

उदाहरण 14.7. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x और y-अक्षों से क्रमशः 5 और –3 अन्तःखण्ड काटती है।

हल : x और y-अक्ष पर अन्तःखण्ड 5 और –3 हैं अर्थात् $a = 5$, $b = -3$

रेखा का वांछित समीकरण है

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{-3}=1 \text{ या } 3x-5y-15=0$$

उदाहरण 14.8. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (3, 4) से होकर जाती है तथा अक्षों पर समान परिमाण लेकिन विपरीत चिह्न के अन्तःखण्ड काटती है।

हल : माना x-अन्तःखण्ड तथा y-अन्तःखण्ड क्रमशः a तथा –a हैं।

$\therefore$ रेखा का समीकरण है

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1$$

$$x-y=a \qquad \cdots\text{(i)}$$

चूंकि (i) (3, 4) से होकर जाती है

$\therefore$ $3-4=a$ या

या $a=-1$

इस प्रकार रेखा का वांछित समीकरण है

$$x-y=-1$$

या $x-y+1=0$

उदाहरण 14.9. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (– 1,1) से हो कर जाती है तथा x-अक्ष के समान्तर है।

हल : चूंकि x-अक्ष के समान्तर रेखा की प्रवणता शून्य होती है, इसलिए बिन्दु–प्रवणता रूप के समीकरण से हमें प्राप्त हुआ

$$y-1=0\,[x-(-1)]$$

$$y-1=0$$

यही रेखा का वांछित समीकरण है।

उदाहरण 14.10. निर्देशांक अक्षों पर रेखा $3x-2y+12=0$ द्वारा काटे गए अन्तःखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : दी हुई रेखा का समीकरण है

$$3x-2y=-12.$$

– 12 से भाग करने पर, हमें प्राप्त हुआ $\dfrac{x}{-4}+\dfrac{y}{6}=1$

इस समीकरण की तुलना अन्तःखण्ड रूप में रेखा के मानक समीकरण से करने पर हमें प्राप्त हुआ

$a = -4$ तथा $b = 6$. अतः x-अक्ष और y-अक्ष पर अन्तःखण्ड क्रमशः -4 और 6 हैं।

उदाहरण 14.11. एक रेखा का अक्षों के बीच का अन्तःखण्ड बिन्दु (x_1, y_1) पर समद्विभाजित होता है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : माना $P(x_1, y_1)$ रेखा AB के अक्षों के बीच अन्तःखण्ड CD का मध्यबिन्दु है। $PM \perp OX$ खींचिए।

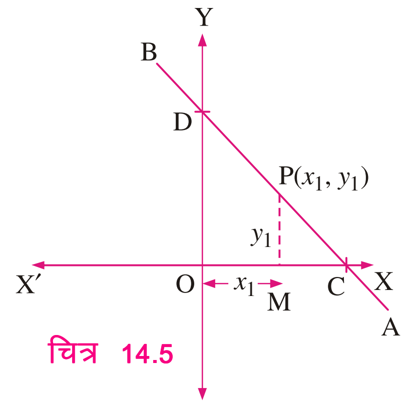
$\therefore \quad OM = x_1$ और $MP = y_1$

$\therefore \quad OC = 2x_1$ और $OD = 2y_1$

अब रेखा के अन्तःखण्ड रूप के अनुसार

$$\frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_1} = 1 \text{ या } \frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 2$$

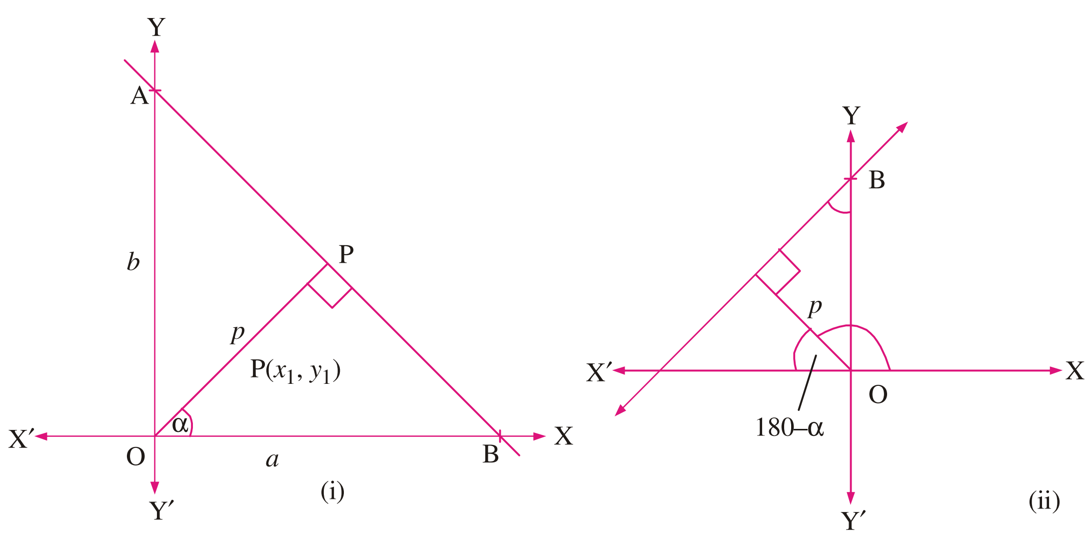
यह रेखा का वांछित समीकरण है।



चित्र 14.5

(e) लम्ब रूप (अभिलम्ब रूप)

यहाँ हम रेखा का समीकरण व्युत्पन्न करेंगे जब मूलबिन्दु से रेखा पर लम्ब की लम्बाई 'p' तथा इस लम्ब द्वारा धनात्मक x-अक्ष के साथ बनने वाला कोण α दिया गया है।



चित्र 14.6

(i) माना दी हुई रेखा $A\,B$, x-अक्ष और y-अक्ष से अन्तःखण्ड क्रमशः a और b काटती है। माना AB पर मूलबिन्दु O से लम्ब OP है और $\angle POB = \alpha$ (चित्र 14.6 (i) देखिए)

$$\therefore \quad \frac{p}{a} = \cos\alpha \Rightarrow a = p\sec\alpha$$

और $\dfrac{p}{b} = \sin\alpha \Rightarrow b = p\ \text{cosec}\,\alpha$

$\therefore$ AB रेखा का समीकरण है

$$\frac{x}{p\sec\alpha} + \frac{y}{p\ \text{cosec}\,\alpha} = 1$$

या $x\cos\alpha + y\ \text{cosec}\ \alpha = p$

(ii) $\dfrac{p}{a} = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ [चित्र 14.6 (ii) से]

$\Rightarrow$ $a = -p\sec\alpha$

इसी प्रकार b = $p\ \text{cosec}\ \alpha$

$\therefore$ रेखा AB का समीकरण है $\dfrac{x}{-a} + \dfrac{y}{b} = 1$

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

टिप्पणीः 1. मूल बिन्दु से रेखा पर लम्ब की लम्बाई 'p' है तथा यह सदैव धनात्मक ली जाती है।

2. मूल बिन्दु से रेखा पर डाले गये लम्ब तथा धनात्मक x-अक्ष के बीच का कोण α है।

उदाहरण 14.12. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका α = 135° है तथा मूल बिन्दु से लम्बवत् दूरी $p = \sqrt{2}$ है।

हल : लम्ब रूप के मानक समीकरण से हमें प्राप्त हुआ

$$x\cos 135^\circ + y\sin 135^\circ = \sqrt{2}$$

या $-\dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{y}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ या $-x + y - 2 = 0$ या $x - y + 2 = 0$

यही सरल रेखा का वांछित समीकरण है।

उदाहरण 14.13. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी मूल बिन्दु से लम्बवत् दूरी 6 इकाई है तथा मूल बिन्दु से लम्ब रेखा धनात्मक x-अक्ष के साथ 30° कोण बनाती है।

हल : यहाँ α = 30°, p = 6

$\therefore$ रेखा का समीकरण हुआ

$$x\cos 30^\circ + y\sin 30^\circ = 6 \text{ या } x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + y\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \text{ या } \sqrt{3}\,x + y = 12$$

देखें आपने कितना सीखा 14.2

1. (a) एक रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी प्रवणता 2 है तथा y-अन्तःखण्ड -2 है।

   (b) उस रेखा की प्रवणता और y-अन्तःखण्ड ज्ञात कीजिए जिसका समीकरण $4x + 3y = 6$ है।

2. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो ऋणात्मक y-अक्ष पर $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ का अन्तःखण्ड काटती है तथा धनात्मक y-अक्ष पर $120°$ पर आनति है।

3. उस रेखा की प्रवणता और y-अन्तःखण्ड ज्ञात कीजिए जिसका समीकरण $3x - 6y = 12$ है।

4. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(-7, 4)$ से होकर जाती है तथा जिसकी प्रवणता $-\dfrac{3}{7}$ है।

5. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(1, 2)$ से होकर जाती है तथा दोनों अक्षों के साथ समान कोण बनाती है।

6. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(2, 3)$ से होकर जाती है और बिन्दुओं $(2, -2)$ तथा $(6, 4)$ को मिलाने वाली रेखा के समान्तर है।

7. (a) $(3, -4)$ तथा $(-4, 3)$ से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

   (b) आयत ABCD के विकर्णों के समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष A $(3, 2)$, B $(11, 8)$, C $(8, 12)$ और D $(0, 6)$ हैं।

8. उस त्रिभुज की माध्यिकाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $(2, 0)$, $(0, 2)$ तथा $(4, 6)$ हैं।

9. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x-अक्ष और y-अक्ष पर क्रमशः 3 इकाई और 2 इकाई अन्तःखण्ड काटती है।

10. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी अक्षों के बीच के खण्ड का मध्य बिन्दु $(1, 3)$ है।

11. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(3, -2)$ से होकर जाती है और x और y-अक्षों पर $4 : 3$ के अनुपात में धनात्मक अन्तःखण्ड काटती है।

12. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिस पर मूल बिन्दु से लम्ब की लम्बाई 2 है तथा x-अक्ष के साथ $45°$ का कोण बनाती है।

13. यदि मूल बिन्दु से रेखा पर डाले गये लम्ब की लम्बाई p है तथा जिसके अक्षों पर कटे अन्तःखण्ड a और b हैं तो दशाईए कि

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

14.3 प्रथम घात का व्यापक समीकरण

आप जानते हैं कि दो चरों x और y में एक रैखिक समीकरण $\mathrm{A}x+\mathrm{B}\,y+\mathrm{C}=0$ ...(1) द्वारा लिखा जाता है।

इस क्रम को आलेखीय निरूपण से समझने के लिए है, हमें निम्न तीन स्थितियों की आवश्यकता है।

स्थिति-1: (जब A और B दोनों शून्य हों)

इस स्थिति में C स्वयं शून्य हो जायेगा और कोई समीकरण नहीं बनेगा।

स्थिति-2: (जब $\mathrm{A}=0$ और $\mathrm{B}\neq 0$)

इस स्थिति में समीकरण (1) बन जायेगा $\mathrm{By}+\mathrm{C}=0$.

या $y=-\dfrac{C}{B}$ और इस समीकरण को वे सभी बिन्दु संतुष्ट करेंगे जो इस रेखा पर स्थित हैं तथा रेखा x- अक्ष के समान्तर है रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु का y-निर्देशांक $-\dfrac{C}{B}$ है। अतः यह सरल रेखा का समीकरण है। इसी प्रकार की स्थिति होगी जब $\mathrm{B}=0$ तथा $\mathrm{A}\neq 0$

स्थिति-3: (जब $\mathrm{A}\neq 0$ और $\mathrm{B}\neq 0$)

समीकरण (1) को y के लिए हल करने पर हमें प्राप्त होगा

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

स्पष्टतः यह एक सरल रेखा को निरूपित करता है जिसकी प्रवणता $-\dfrac{A}{B}$ तथा y-अन्तःखण्ड $-\dfrac{C}{B}$ है।

14.3.1 सरल रेखा के व्यापक समीकरण को विभिन्न रूपों में परिवखतत करना

यदि हमें रेखा का व्यापक समीकरण $\mathrm{Ax}+\mathrm{By}+\mathrm{C}=0$ के रूप में दिया है तो हम आगे अध्ययन करने से पहले इसे विभिन्न रूपों में परिवखतत करना सीखेगें।

14.3.2 प्रवणता–अन्तःखण्ड रूप में परिवखतत करना

हमें x और y में एक प्रथम घात का समीकरण $Ax + By + C = 0$ दिया है।

क्या आप इससे रेखा की प्रवणता तथा y-अन्तःखण्ड ज्ञात कर सकते हैं?

हाँ, निस्संदेह, यदि हम इस व्यापक समीकरण को प्रवणता अन्तःखण्ड रूप में रख सकें। इसके लिए आइए दिए गए समीकरण को पुनः व्यवस्थापित करें।

$$Ax+By+C=0$$

या $\quad By=-Ax-C$ या $y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B}$ (यदि $B\neq 0$)

यही वांछित रूप है। अतः प्रवणता $=-\dfrac{A}{B}$, y-अन्तःखण्ड $=-\dfrac{C}{B}$

उदाहरण 14.14. समीकरण $x + 7y - 4 = 0$ को प्रवणता–अन्तःखण्ड रूप में परिवख्रतत कीजिए। इस प्रकार रेखा की प्रवणता तथा y अन्तः खण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया समीकरण है

$$x + 7y - 4 = 0 \text{ या } 7y = -x + 4 \text{ या } y = -\frac{1}{7}x + \frac{4}{7}$$

यहां प्रवणता $= -\frac{1}{7}$ और y अन्तः खण्ड $= \frac{4}{7}$

14.3.3 अन्तःखण्ड रूप में परिवख्रतत करना

माना कि x और y में प्रथम घात का समीकरण है

$$Ax + By + C = 0. \qquad ...(i)$$

(i) को अन्तःखण्ड रूप में करने के लिए परिवख्रतत करने के लिए, हम इसे इस प्रकार पुनः व्यवस्थित करें

$$Ax + By = -C \text{ या } \frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1$$

या $$\frac{x}{\left(-\frac{C}{A}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{C}{B}\right)} = 1 \quad (\text{यदि } A \neq 0 \text{ और } B \neq 0)$$

यही वांछित परिवख्रतत रूप है। यहां ध्यान दें कि x-अन्तःखण्ड $= \frac{-C}{A}$ और y-अन्तःखण्ड $= \frac{-C}{B}$

उदाहरण 14.15. $3x + 5y = 7$ को अन्तःखण्ड रूप में बदलिए और x-अक्ष पर इसके अन्तःखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया समीकरण है

$$3x + 5y = 7$$

या $$\frac{3}{7}x + \frac{5}{7}y = 1 \text{ या } \frac{x}{\frac{7}{3}} + \frac{y}{\frac{7}{5}} = 1$$

$\therefore$ x-अन्तःखण्ड $= \frac{7}{3}$ और, y-अन्तःखण्ड $= \frac{7}{5}$

14.3.4 लम्ब रूप में परिवर्तन

माना x और y में प्रथम घात का समीकरण $Ax + By + C = 0$ ... (i) है।

हम इस व्यापक समीकरण को लम्ब रूप में परिवख्रतत करेंगे। इस उद्देश्य के लिए हम दिये गए समीकरण (i) को इस प्रकार पुनः व्यवस्थित करेंगे

$$Ax + By = -C$$

उपर्युक्त समीकरण के दोनों पक्षों को λ से गुणा करने पर, हमें प्राप्त हुआ

$$\lambda Ax + \lambda By = -\lambda C \qquad ... (ii)$$

आइए λ का मान ऐसा चुनें कि

$$(\lambda A)^2 + (\lambda B)^2 = 1$$

या $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$ (धनात्मक चिह्न लेने पर)

λ का यह मान (ii) में रखने पर, हमें प्राप्त हुआ

$$\frac{Ax}{\sqrt{(A^2 + B^2)}} + \frac{By}{\sqrt{(A^2 + B^2)}} = -\frac{C}{\sqrt{(A^2 + B^2)}} \qquad \ldots \text{(iii)}$$

यह (i) का लम्ब रूप में वांछित रूपान्तरण है। इसमें दो स्थितियाँ उत्पन्न होती हैं ऋणात्मक या धनात्मक

(i) यदि $C < 0$, तो (ii) ही वांछित रूप है।

(ii) यदि $C > 0$, तो (iii) का दायां पक्ष ऋणात्मक हो जाता है।

$\therefore$ हम समीकरण (iii) के दोनों पक्षों को -1 से गुणा करेंगे।

$\therefore$ तो वांछित रूप होगा

$$-\frac{Ax}{\sqrt{(A^2 + B^2)}} - \frac{By}{\sqrt{(A^2 + B^2)}} = \frac{C}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$$

इस प्रकार मूल बिन्दु से लम्ब की लम्बाई $= \dfrac{|C|}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$

x-अक्ष की धनात्मक दिशा में लम्ब की आनति है:

$$\cos\theta = \mp\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ या } \sin\theta = \left(\mp\frac{B}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}\right)$$

जबकि ऊपर वाला चिह्न $C > 0$ के लिए उपयोग होता है तथा नीचे वाला चिह्न $C < 0$ के लिए। यदि $C = 0$ हो तो रेखा मूल बिन्दु से गुजरती है और मूल बिन्दु से रेखा तक कोई लम्ब नहीं होता है।

उपर्युक्त तीनों स्थितियों के आधार पर हम कह सकते हैं कि

"x और y में प्रथम घात समीकरण सदैव एक सरल रेखा को निरूपित करता है बशर्ते कि A और B दोनों इकट्ठे शून्य न हों।"

क्या उपरोक्त कथन का विलोम सत्य है? ***उपरोक्त कथन का विलोम है कि प्रत्येक सरल रेखा को x और y में प्रथम घात समीकरण के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।***

इस पाठ में हमने सरल रेखा के समीकरण के विभिन्न रूपों के बारे में अध्ययन किया है उदाहरणार्थ उनमें से कुछ हैं

$$y = mx + c,\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ और } x\cos\alpha + y\sin\alpha = p.$$

टिप्पणी

स्पष्टतः सभी x और y में रैखिक सम्बन्ध हैं। हम उन्हें पुनः व्यवस्थित करें तो क्रमशः $y - mx - c = 0$, $bx + ay - ab = 0$ और $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ प्राप्त होता है। अतः यह सभी समीकरण x और y में प्रथम घात समीकरण के ही विभिन्न रूप हैं। इस प्रकार हमने स्थापित किया कि

"प्रत्येक सरल रेखा को x और y में प्रथम घात व्यापक समीकरण के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।"

उदाहरण 14.16. समीकरण $x + \sqrt{3}\, y + 7 = 0$ को लम्ब रूप में परिवखतत कीजिए।

हल : दी गई रेखा का समीकरण हैः $x + \sqrt{3}y + 7 = 0$ ... (i)

(i) की तुलना सरल रेखा के व्यापक समीकरण से करने पर हमें प्राप्त हुआ

$$A = 1 \text{ और } B = \sqrt{3} \qquad \therefore \sqrt{A^2 + B^2} = 2$$

समीकरण (i) को 2 से भाग करने पर हमें प्राप्त हुआः

$$\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} y + \frac{7}{2} = 0$$

या $$\left(-\frac{1}{2}\right)x + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y - \frac{7}{2} = 0$$

या $$x \cos \frac{4\pi}{3} + y \sin \frac{4\pi}{3} = \frac{7}{2}$$

(तीसरे चतुर्थांश में $\cos\theta$ और $\sin\theta$ दोनों ऋणात्मक होते हैं अतः θ का मान तीसरे चतुर्थांश में आयेगा।)

यह दी गई सरल रेखा का लम्बवत् रूप में निरूपण है।

उदाहरण 14.17. रेखा $\sqrt{3}\, x - y + 2 = 0$ पर मूल बिन्दु से लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए तथा लम्ब की आनति भी ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया समीकरण हैः $\sqrt{3}\, x - y + 2 = 0$

दोनों पक्षों को $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}$ या 2 से भाग करने पर हमें प्राप्त हुआः

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 1 = 0 \text{ या } \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{x} - \frac{1}{2}\mathrm{y} = -1$$

दोनों पक्षों को -1 से गुणा करने पर, हमें प्राप्त हुआः

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 1 \text{ या } x \cos\frac{5\pi}{6} + y \sin\frac{5\pi}{6} = 1$$ (दूसरे चतुर्थांश में $\cos\theta$ ऋणात्मक है, ओर $\sin\theta$ धनात्मक है अतः θ का मान दूसरे चतुर्थांश में आयेगा)

अतः मूल बिन्दु से रेखा पर लम्ब की आनति $150°$ तथा लम्ब की लम्बाई 1 है।

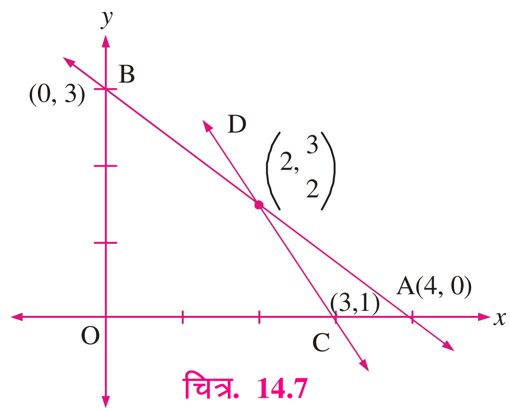
उदाहरण 14.18. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (3,1) से हो कर जाती है तथा रेखा $3x + 4y = 12$ के द्वारा अक्षों के बीच अन्तःखण्ड का समद्विभाजन करती है।

हल : पहले हम दी गई रेखा द्वारा निर्देशांक अक्षों पर काटे गए अन्तःखण्ड ज्ञात करेंगे।

$$3x + 4y = 12 \text{ या } \frac{3x}{12} + \frac{4y}{12} = 1 \text{ या } \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$$

अतः x-अक्ष और y-अक्ष पर बनाए गए अन्तःखण्ड क्रमशः 4 और 3 हैं।

इस प्रकार निर्देशांक अक्षों पर जहाँ रेखा काटती है उन बिन्दुओं के निर्देशांक A (4, 0) तथा B (0, 3) हैं।



चित्र. 14.7

$\therefore$ AB का मध्य बिन्दु हुआ $\left(2, \frac{3}{2}\right)$

अतः (3, 1) तथा $\left(2, \frac{3}{2}\right)$ से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण हुआ

$$y - 1 = \frac{\frac{3}{2} - 1}{2 - 3}(x - 3)$$

या $\quad y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 3)$

या $\quad 2(y - 1) + (x - 3) = 0$ या $2y - 2 + x - 3 = 0$ या $x + 2y - 5 = 0$

उदाहरण 14.19. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (8, 7) और (6, 9) से होकर जाने वाली रेखा निर्देशांक अक्षों पर बराबर अन्तःखण्ड काटती है।

हल : (8, 7) और (6, 9) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण है

$$y - 7 = \frac{9 - 7}{6 - 8}(x - 8)$$

या $\quad y - 7 = -(x - 8)$ या $x + y = 15$ या $\frac{x}{15} + \frac{y}{15} = 1$

अतः दोनों अक्षों पर बने अन्तःखण्ड 15 हैं।

उदाहरण 14.20. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें (3, 4) और (7, 8) को मिलाने वाली रेखा को (–5, 1) और (1, –3) को मिलाने वाली रेखा विभाजित करेगी।

हल : बिन्दु C (–5, 1) तथा D (1, –3) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण

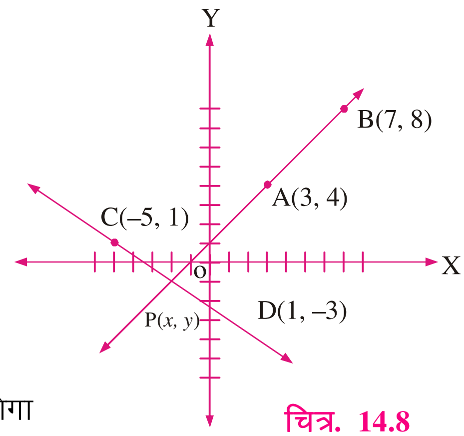
$$y - 1 = \frac{-3 - 1}{1 + 5}(x + 5)$$

या $\quad y - 1 = -\frac{4}{6}(x + 5)$

या $3y - 3 = -2x - 10$

या $2x + 3y + 7 = 0$ ... (i)

माना कि रेखा (i) $A\ (3, 4)$ तथा $B\ (7, 8)$ को मिलाने वाली रेखा को बिन्दु P पर विभाजित करती है।



चित्र. 14.8

यदि वांछित अनुपात $\lambda : 1$ हो तो जिसमें बिन्दु $A\ (3, 4)$ तथा $B\ (7, 8)$ को मिलाने वाली रेखा को (i) विभाजित करता है तो P के निर्देशांक होंगे

$$\left(\frac{7\lambda + 3}{\lambda + 1}, \frac{8\lambda + 4}{\lambda + 1}\right)$$

क्योंकि P बिन्दु रेखा (i) पर भी स्थित है अतः हमें प्राप्त होगा

$$2\left(\frac{7\lambda + 3}{\lambda + 1}\right) + 3\left(\frac{8\lambda + 4}{\lambda + 1}\right) + 7 = 0$$

$\Rightarrow \quad 14\lambda + 6 + 24\lambda + 12 + 7\lambda + 7 = 0$

$\Rightarrow \quad 45\lambda + 25 = 0 \Rightarrow \lambda = -\dfrac{5}{9}$

अतः (–5, 1) तथा (1, –3) को मिलाने वाली रेखा (3, 4) तथा (7, 8) को मिलाने वाली रेखा को बाह्य अनुपात 5 : 9 में विभाजित करती है।

देखें आपने कितना सीखा 14.3

1. किस स्थिति में x और y में प्रथम घात में व्यापक समीकरण $Ax + By + C = 0$ एक रेखा को निरूपित करता है?

2. समीकरण $2x + 5y + 3 = 0$ को प्रवणता अन्तःखण्ड रूप में परिवख़तत कीजिए।

3. निम्नलिखित रेखाओं के x और y अन्तःखण्ड ज्ञात कीजिए :

   (a) $y = mx + c$ (b) $3y = 3x + 8$ (c) $3x - 2y + 12 = 0$

4. दो अक्षों के बीच सरल रेखा $3x - 2y + 12 = 0$ द्वारा कटे अन्तःखण्डों से रेखाखण्ड AB की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

5. समीकरण $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ को अन्तःखण्ड रूप में परिवख़तत कीजिए और निर्देशांक अक्षों पर अन्तःखण्ड भी ज्ञात कीजिए।

6. निम्नलिखित को अभिलम्ब रूप में परिवख़तत कीजिए :

   (a) $3x - 4y + 10 = 0$ (b) $3x - 4y = 0$

7. रेखाओं $2x - y + 3 = 0$ तथा $x - 4y - 7 = 0$ में से कौन सी मूल बिन्दु के निकट है।

अब हम दो रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात करने का सूत्र प्रतिस्थापित करेंगे।

14.4 एक दिए हुए बिन्दु की दी गई रेखा से दूरी

इस खण्ड में हम एक दिए हुए बिन्दु की दी गई रेखा या रेखाओं से दूरी ज्ञात करने की चर्चा करेंगे।

माना $P(x_1, y_1)$ दिया गया बिन्दु है और l, $Ax + By + C = 0$ दी गई रेखा है।

माना कि रेखा l, x और y अक्षों को क्रमशः बिन्दु R और Q पर काटती है।

$PM \perp l$ खींचिए और माना $PM = d$

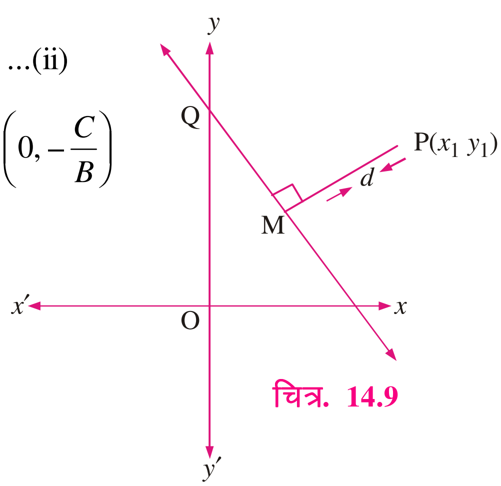
माना M के निर्देशांक (x_2, y_2) हैं

$$d = \sqrt{\left\{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right\}} \qquad \text{...(i)}$$

$\because$ बिन्दु M रेखा l पर है

$\therefore$ $Ax_2 + By_2 + C = 0$

या $C = -(Ax_2 + By_2)$ ...(ii)



चित्र. 14.9

बिन्दु R और Q के निर्देशांक क्रमशः हैं $\left(-\dfrac{C}{A}, 0\right)$ और $\left(0, -\dfrac{C}{B}\right)$

$$QR \text{ की प्रवणता } = \frac{0 + \frac{C}{B}}{-\frac{C}{A} - 0} = -\frac{A}{B} \text{ और}$$

$$PM \text{ की प्रवणता } = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

क्योंकि $PM \perp QR$

$$\Rightarrow \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \times \left(-\frac{A}{B}\right) = -1. \text{ या } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{B}{A} \qquad \text{...(iii)}$$

$$\text{(iii) से, } \frac{x_1 - x_2}{A} = \frac{y_1 - y_2}{B} = \frac{\sqrt{\left\{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right\}}}{\sqrt{\left(A^2 + B^2\right)}} \qquad \text{...(iv)}$$

(अनुपात और समानुपात के गुणधर्मों का प्रयोग करते हुए)

$$\text{तथा } \frac{x_1 - x_2}{A} = \frac{y - y_2}{B} = \frac{A\left(x_1 - x_2\right) + B\left(y_1 - y_2\right)}{A^2 + B^2} \qquad \text{...(v)}$$

(iv) और (v) से हमें प्राप्त हुआ

$$\frac{\sqrt{\left\{(x_1 - x_2)^2 (y_1 - y_2)^2\right\}}}{\sqrt{\left(A^2 + B^2\right)}} = \frac{A\left(x_1 - x_2\right) + B\left(y_1 - y_2\right)}{A^2 + B^2}$$

या $\quad \dfrac{d}{\sqrt{A^2+B^2}} + \dfrac{Ax_1 + By_1 - (Ax_2 + By_2)}{A^2 + B^2}$ [(i) का उपयोग करके]

या $\quad \dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{(A^2+B^2)}} = d$ [(ii) का उपयोग करके]

क्योंकि दूरी सदैव धनात्मक होती है इसलिए हम लिख सकते हैं कि

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{(A^2+B^2)}} \right|$$

टिप्पणी: रेखा $Ax + By + C = 0$ से मूलबिन्दु (0, 0) की लम्बवत् दूरी होती है

$$\frac{A(0) + B(0) + C}{\sqrt{(A^2+B^2)}} = \frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$$

उदाहरण 14.21. x-अक्ष पर वह कौन–से बिन्दु हैं जिनकी सरल रेखा $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ से लम्बवत् दूरी 'a' है।

हल : माना $(x_1, 0)$ x-अक्ष पर कोई बिन्दु है।

दी गई रेखा का समीकरण $bx + ay - ab = 0$ है। बिन्दु $(x_1, 0)$ की दी गई रेखा से लम्बवत् दूरी है

$$a = \pm \frac{bx_1 + a.0 - ab}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \qquad \therefore\ x_1 = \frac{a}{b}\left\{b \pm \sqrt{(a^2+b^2)}\right\}$$

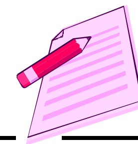
इस प्रकार, x-अक्ष पर बिन्दु हैं $\left(\dfrac{a}{b}\left(b \pm \sqrt{a^2+b^2}\right), 0\right)$

देखें आपने कितना सीखा 14.4

1. $3x + 2y + 4 = 0$ से बिन्दु (2, 3) की लम्बवत् दूरी ज्ञात कीजिए।
2. y-अक्ष पर बिन्दु ज्ञात कीजिए जिनकी सरल रेखा $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ से लम्बवत् दूरी b है।
3. y-अक्ष पर बिन्दु ज्ञात कीजिए जिनकी सरल रेखा $4x + 3y = 12$ से लम्बवत् दूरी 4 है।
4. $3x + 7y + 14 = 0$ से मूलबिन्दु की लम्बवत् दूरी ज्ञात कीजिए।

14.6 समान्तर (या लम्बवत्) रेखाओं के समीकरण

अभी तक हमने रेखाएं समान्तर हैं या लम्बवत् जानने की विधि सीखी। इस खण्ड में हम दी गई रेखा के समान्तर या लम्बवत् रेखा का समीकरण ज्ञात करने का प्रयास करेंगे।



14.6.1 दी गई रेखा के समान्तर सरल रेखा का समीकरण

$\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$

माना $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ...(i)

एक दी गई रेखा

$Ax + By + C = 0$ के समान्तर है। ...(ii)

(i) और (ii) में समान्तरता की शर्त से

$$\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = K_1 \quad \text{(माना)}$$

$\Rightarrow \quad A_1 = AK_1, B_1 = BK_1$

A_1 और B_1 के इन मानों को (i) में रखने पर प्राप्त होता है

$AK_1x + BK_1y + C_1 = 0$

या $\quad Ax + By + \dfrac{C_1}{K_1} = 0$ या $Ax + By + K = 0$, जहाँ $K = \dfrac{C_1}{K_1}$ ...(iii)

यह दी गई रेखा के समान्तर रेखा है। समीकरण (ii) और (iii) से हम देखते हैं कि

(i) x और y के गुणांक समान हैं।

(ii) स्थिरांक भिन्न हैं, और दी गई शर्तों से उन का मान ज्ञात होता है।

उदाहरण 14.22. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (1, 2) से होकर जाती है तथा सरल रेखा $2x + 3y + 6 = 0$ के समान्तर है।

हल : दी गई रेखा के समान्तर किसी सरल रेखा का समीकरण लिखा जा सकता है यदि हम

(i) x और y के गुणांक वही रखें जो दिए गए समीकरण के हैं।

(ii) स्थिरांक दिए गए समीकरण से भिन्न हों जिसका मूल्यांकन दी गई शर्त से करना है

इस प्रकार वांछित रेखा का समीकरण होगा

$2x + 3y + K = 0$ (किसी स्थिरांक K के लिए)

क्योंकि यह बिन्दु (1, 2) से गुज़रती है अतः

$2 \times 1 + 3 \times 2 + K = 0$ या $K = -8$

$\therefore$ वांछित रेखा का समीकरण $2x + 3y = 8$ है।

14.7 दी गई रेखा के लम्बवत् सरल रेखा का समीकरण

$\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$

माना $Ax + By + C = 0$ के ... (i)

लम्बवत् एक रेखा $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ है। ... (ii)

रेखाओं (i) और (ii) की लम्बवत् होने की शर्त से

$$AA_1 + BB_1 = 0 \Rightarrow \frac{A_1}{B} = -\frac{B_1}{A} = K_1 \qquad \text{(माना)}$$

$\Rightarrow \qquad A_1 = BK_1$ और $B_1 = -AK_1$

(i) में A_1 और B_1 के मान रखने पर

$$Bx - Ay + \frac{C_1}{K_1} = 0 \text{ या } Bx - Ay + K = 0 \text{ जहाँ } K = \frac{C_1}{K_1} \qquad \text{... (iii)}$$

अतः रेखा (iii) दी गई रेखा (ii) के लम्बवत् है।

हम देखते हैं कि एक दी गई रेखा के लम्बवत् रेखा का समीकरण ज्ञात करने के लिए इसमें निम्न विधि लगानी चाहिए

(i) x और y के गुणांक परस्पर बदल दीजिए

(ii) किसी एक का चिह्न बदल दीजिए

(iii) स्थिर पद को किसी नये स्थिरांक K से बदल दीजिए और दी गई शर्त द्वारा उसका मूल्यांकन कीजिए।

उदाहरण 14.23. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (1, 2) से गुज़रती है तथा सरल रेखा $2x + 3y + 6 = 0$ के लम्बवत् है।

हल : उपरोक्त विधि द्वारा हमें दी गई रेखा के लम्बवत् रेखा का समीकरण मिला

$$3x - 2y + K = 0 \qquad \text{...(i)}$$

(i) बिन्दु (1, 2) से गुज़रती है, $3 \times 1 - 2 \times 2 + K = 0$ या $K = 1$

$\therefore$ सरल रेखा का वांछित समीकरण है $3x - 2y + 1 = 0$

उदाहरण 14.24. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (x_2, y_2) से गुज़रती है तथा दी गई सरल रेखा $y\,y_1 = 2a\,(x + x_1)$ के लम्बवत् है।

हल : दी गई सरल रेखा है

$$yy_1 - 2ax - 2ax_1 = 0 \qquad \text{...(i)}$$

(i) के लम्बवत् कोई सरल रेखा है $2ay + xy_1 + C = 0$

यह बिन्दु (x_2, y_2) से गुज़रती है

$\therefore \quad 2ay_2 + x_2\,y_1 + C = 0$

$\Rightarrow \qquad C = -\,2ay_2 - x_2\,y_1$

$\therefore$ वांछित रेखा का समीकरण है

$$2a\,(y - y_2) + y_1\,(x - x_2) = 0$$

देखें आपने कितना सीखा 14.5

1. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (0, –2) से गुज़रती है तथा सरल रेखा 3x + y = 2 के समान्तर है।
2. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (–1, 0) से गुज़रती है तथा सरल रेखा y = 2x + 3 के समान्तर है।
3. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (0, –3) से गुज़रती है तथा सरल रेखा x + y + 1 = 0 के लम्बवत् है।
4. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (0, 0) से गुज़रती है तथा सरल रेखा x + y = 3 के लम्बवत् है।
5. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (2, –3) से गुज़रती है तथा दी गई सरल रेखा 2a (x + 2) + 3y = 0 के लम्बवत् है।
6. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका x-अन्तःखण्ड –8 है और रेखा 3x + 4y – 17 = 0 के लम्बवत् है।
7. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका y-अन्तःखण्ड 2 है और रेखा 2x – 3y + 7 = 0 के समान्तर है।
8. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ से होकर जाने वाली तथा $x\sec\theta + y\,\mathrm{cosec}\,\theta = a$ के लम्बवत् सरल रेखा का समीकरण $x\cos\theta - y\sin\theta = a\cos 2\theta$ है।

14.8 दो रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिंदु से होकर जाती रेखाओं के समूह का समीकरण

मान लीजिए $\qquad l_1 :\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad$ ...(i)

तथा $\qquad l_2 :\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$, दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं $\qquad$ ...(ii)

माना l_1 तथा l_2 का प्रतिच्छेदन बिन्दु P(*h*, *k*) है, तब

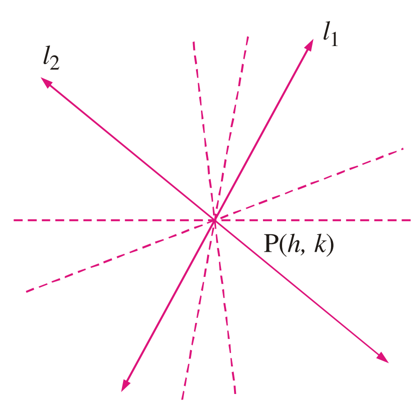
$$a_1h + b_1k + c_1 = 0 \qquad \text{...(iii)}$$

$$a_2h + b_2k + c_2 = 0 \qquad \text{...(iv)}$$

अब समीकरण

$$(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \qquad \text{...(v)}$$

पर ध्यान दीजिए



चित्र. 14.10

यह x तथा y में एक घात का समीकरण है।

इसलिए यह λ के भिन्न–भिन्न मानों के लिए भिन्न–भिन्न रेखाएँ प्रदर्शित करेगा।

मॉड्यूल - IV
निर्देशांक ज्यामिति

टिप्पणी

यदि हम x को h द्वारा तथा y को k द्वारा स्थानापन्न कर दें तो हमें

$$(a_1h+b_1k+c_1)+\lambda(a_2h+b_2k+c_2)=0 \qquad ...(vi)$$

प्राप्त होता है। (iii) और (iv) को (vi) में प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है।

$$0 + \lambda 0 = 0 \quad \text{अर्थात्} \quad 0 = 0 \text{ जो कि सत्य है।}$$

अतः समीकरण (v) रेखाओं का समूह प्रदर्शित करता है जो बिन्दु (h, k) से होकर जाती है। अर्थात् दी गई रेखाओं l_1 तथा l_2 के प्रतिच्छेदन बिन्दु से।

- λ के दिए गए विशिष्ट मान द्वारा समूह के एक विशिष्ट सदस्य को प्राप्त किया जाता है। λ का यह मान, अन्य दी गई शर्तों से ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 14.25. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो $x + y + 1 = 0$ तथा $2x - y + 7 = 0$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु से होकर जाती है तथा बिन्दु (1, 2) इस रेखा के अर्न्तविष्ट है।

हल : रेखाओ के समूह का समीकरण जो दी गई रेखाओं के प्रतिच्छेदन से होकर जाती है, $(x + y + 1) + \lambda\,(2x - y + 7) = 0$ है

इस रेखा पर बिन्दु (1, 2) है, यदि

$(1 + 2 + 1) + \lambda\,(2 \times 1 - 1 \times 2 + 7) = 0$

अर्थात् $\quad 4 + 7\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\dfrac{4}{7}.$

अतः अभीष्ट रेखा का समीकरण

$$(x+y+1)-\frac{4}{7}(2x-y+7) = 0 \text{ है}$$

अर्थात्
$$7(x+y+1)-4(2x-y+7) = 0$$
$$-x + 11y - 21 = 0$$

या
$$x - 11y + 21 = 0$$

उदाहरण 14.26. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखाओं $3x + y - 9 = 0$ तथा $4x + 3y - 7 = 0$ के प्रतिच्छेदन से होकर जाती है तथा y-अक्ष के समान्तर है।

हल : रेखाओं के समूह का समीकरण जो दी गई रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिन्दु से होकर जाती है $(3x+y-9)+\lambda(4x+3y-7) = 0$ है।

अर्थात् $\quad (3+4\lambda)x+(1+3\lambda)y-(9+7\lambda) = 0 \qquad ...(i)$

हम जानते हैं कि यदि कोई रेखा y-अक्ष के समान्तर है तो उस समीकरण में y का गुणांक शून्य होगा।

$\therefore\ 1 + 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1/3.$

अतः दी गई रेखा की समीकरण

$$\left\{3+4\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}x+0y-\left\{9+7\left(\frac{-1}{3}\right)\right\} = 0$$

अर्थात् $\quad x = 4$

देखें आपने कितना सीखा 14.6

1. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखाओं $x + y = 5$ तथा $2x - y - 7 = 0$ के प्रतिच्छेदन बिंदु से होकर जाती है तथा x-अक्ष के समान्तर है।
2. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखाओं $x + y + 1 = 0$ तथा $x - y - 1 = 0$ के प्रतिच्छेदन से होकर जाती है तथा बिंदु $(-3, 1)$ इस रेखा के अर्न्तविष्ट है।

आइये दोहराएँ

- y-अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण $x = a$ है और x-अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण $y = b$ होता है।
- जो रेखा y-अक्ष पर c अन्तःखण्ड काटती है तथा जिसकी प्रवणता m है का समीकरण होता है $y = mx + c$
- $A(x_1, y_1)$ से होकर जाने वाली रेखा जिसकी प्रवणता m है, का समीकरण है: $y - y_1 = m(x - x_1)$
- दो बिन्दुओं $A(x, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण है $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
- रेखा जो, x–अक्ष और y – अक्ष पर क्रमशः a और b अन्तःखण्ड काटती है, का समीकरण है $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$
- रेखा का लम्ब या अभिलम्ब रूप में समीकरण है: $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

  जबकि p मूलबिन्दु से रेखा पर लम्ब की लम्बाई है और यह लम्ब धनात्मक x-अक्ष के साथ जो कोण बनाता है वह α है।
- x और y में प्रथम घात का व्यापक समीकरण सदैव एक सरल रेखा को निरूपित करता है जबकि A और B दोनों इकट्ठे शून्य न हों।
- व्यापक समीकरण $Ax + By + C = 0$ से हम निम्नलिखित ज्ञात कर सकते हैं :

  (i) रेखा की प्रवणता $= -\dfrac{A}{B}$ (ii) x-अन्तःखण्ड $= -\dfrac{C}{A}$ (iii) y-अन्तःखण्ड $= -\dfrac{C}{B}$

  (iv) मूलबिन्दु से रेखा पर डाले गये लम्ब की लम्बाई $= \dfrac{|C|}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$

  (v) मूलबिन्दु से लम्ब की आनति $\cos\alpha = \dfrac{\mp A}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$; $\sin\alpha = \dfrac{\mp B}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$

  जबकि ऊपर वाला चिद्द $C > 0$ के लिए तथा नीचे वाला चिद्दन $C < 0$ के लिए लिया जाता है। परन्तु यदि $C = 0$ हो तो ऊपर वाला या नीचे वाला चिद्द इच्छानुसार लिया जा सकता है
- एक दिए गए बिन्दु (x_1, y_1) की दी गई रेखा $Ax + By + C = 0$ से दूरी $d = \left|\dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}\right|$

- एक रेखा $Ax + By + C = 0$ के समान्तर रेखा का समीकरण $Ax + By + k = 0$ है।
- एक रेखा $Ax + By + C = 0$ के लम्बवत् रेखा का समीकरण $Bx - Ay + k = 0$ है।
- दो रेखाओं $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु से होकर जाती रेखाओं के समूह का समीकरण $(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ है।

सहायक वेबसाइट

- *http://en.wikipedia.org/wiki/Straight_lines*
- *http://mathworld.wolfram.com/Straight_lines*

आइए अभ्यास करें

1. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका y-अन्तःखण्ड -3 है और जोकिः

   (a) बिन्दुओं $(-2,3)$ और $(4, -5)$ को मिलाने वाली रेखा के समान्तर है।

   (b) बिन्दुओं $(0, -5)$ और $(-1, 3)$ को मिलाने वाली रेखा के लम्बवत् है।

2. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(4, -5)$ से होकर जाती है और

   (a) बिन्दुओं $(3, 7)$ और $(-2, 4)$ को मिलाने वाली रेखा के समान्तर है।

   (b) बिन्दुओं $(-1, 2)$ और $(4, 6)$ को मिलाने वाली रेखा के लम्बवत् है।

3. दिखाइए कि बिन्दु $(a, 0)$, $(0, b)$ और $(3a, -2b)$ संरेख हैं। इनको मिलाने वाली रेखा का समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

4. एक त्रिभुज ABC के शीर्ष A $(1, 4)$, B $(2, -3)$ और C $(-1, -2)$ हैं ज्ञात कीजिए

   (a) A से माध्यिका का समीकरण

   (b) A से अभिलम्ब का समीकरण

   (c) भुजा BC का समद्विभाजक

5. बिन्दु A $(2, 1)$ से एक सरल रेखा खींची जाती है जो धनात्मक x-अक्ष से $\frac{\pi}{6}$ कोण बनाती है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

6. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(2, 3)$ से होकर जाती है तथा रेखा $2x + 3y + 7 = 0$ के समान्तर है।

7. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके x-अक्ष तथा y-अक्ष से अन्तःखण्ड क्रमशः a और b हैं।

8. रेखाओं $y = (2 - \sqrt{3})\, x + 5$ और $y = (2 + \sqrt{3})\, x - d$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

9. रेखाओं $2x + 3y = 4$ और $3x - 2y = 7$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

10. बिन्दु (3, 4) से सरल रेखा $12(x+6)=5(y-2)$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

11. $3x+4y+5=0$ पर (0, 1) से लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

12. रेखाओं $2x+3y=4$ और $4x+6y=20$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

13. बिन्दु (–3, – 4) से रेखा $4x-3y=7$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

14. दिखाइए कि बिन्दुओं से सरल रेखा $\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1$ पर डाले गए लम्बों की लम्बाई का गुणनफल b^2 है।

15. सिद्ध कीजिए कि उस सरल रेखा का समीकरण, जो बिन्दु $(a\cos^3\theta, b\sin^3\theta)$ से गुजरती है तथा सरल रेखा $x\sec\theta+y\operatorname{cosec}\theta=a$ के लम्बवत् है, होगा $x\cos\theta-y\operatorname{cosec}\theta=a\cos 2\theta$

16. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखाओं $3x+y-9=0$ तथा $4x+4y-7=0$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु से होकर जाती है तथा रेखा $5x-4y+1=0$ पर लम्ब है।

17. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखाओं $2x+3y-2=0$ तथा $x-2y+1=0$ से होकर जाती है तथा जिसका x-अन्तःखण्ड 3 इकाई है।

18. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखाओं $3x+4y-7=0$ तथा $x-y+2=0$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु से होकर जाती है तथा जिसकी प्रवणता 5 है।

19. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखाओं $5x-3y=1$ तथा $2x+3y=23$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु से होकर जाती है तथा रेखा $5x-3y-1=0$ पर लम्ब है।

20. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखाओं $3x-4y+1=0$ तथा $5x+y-1=0$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु से होकर जाती है तथा अक्षों पर समान अन्तःखण्ड काटती है।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 14.1

1. (a) $y=-4$ (b) $x=-3$ 2. $x=5$ 3. $y+7=0$

देखें आपने कितना सीखा 14.2

1. (a) $y=2x-2$ (b) प्रवणता $=\frac{-4}{3}$, y-अन्तःखण्ड $=2$

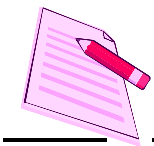
2. $\sqrt{3}y=-3x-1$ 3. प्रवणता $=\frac{1}{2}$, y-अन्तःखण्ड $=-2$

4. $3x+7y=7$ 5. $y=x+1; x+y-3=0$ 6. $3x-2y=0$

7. (a) $x+y=-1$ (b) AC विकर्ण का समीकरण $=2x-y-4=0$

BD विकर्ण का समीकरण $=2x-11y+66=0$

8. $x-2=0$, $x-3y+6=9$ और $5x-3y-2=0$



9. $2x + 3y = 6$ 10. $3x + y = 6$ 11. $3x + 4y = 1$ 12. $x + y = 2\sqrt{2}$

देखें आपने कितना सीखा 14.3

1. A और B दोनों एक साथ शून्य नहीं हैं 2. $y = \frac{-2}{5}x - \frac{3}{5}$

3. (a) x –अन्तःखण्ड = $\frac{-c}{m}$; y-अन्तःखण्ड = c (b) x-अन्तःखण्ड = $\frac{-8}{3}$; y-अन्तःखण्ड = $\frac{8}{3}$

(c) x-अन्तःखण्ड = –4; y-अन्तःखण्ड = 6

4. $2\sqrt{13}$ इकाई 5. $\frac{x}{p\sec\alpha} + \frac{x}{p\,\mathrm{cosec}\,\alpha} = 1$

6. (a) $\frac{-3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0$ (b) $\frac{-3}{5}x + \frac{4}{5}y = 0$

7. पहली रेखा मूलबिन्दु से सबसे निकट है।

देखें आपने कितना सीखा 14.4

1. $d = \frac{16}{\sqrt{13}}$ 2. $\left(0, \frac{b}{a}(a \pm \sqrt{a^2 + b^2})\right)$ 3. $\left(0, \frac{32}{3}\right)$ 4. $\frac{14}{\sqrt{58}}$

देखें आपने कितना सीखा 14.5

1. $3x + y + 2 = 0$ 2. $y = 2x + 2$ 3. $x - y = 3$ 4. $y = x$

5. $3x - 2ay = 6(a - 1)$ 6. $4x - 3y + 32 = 0$ 7. $2x - 3y + 6 = 0$

देखें आपने कितना सीखा 14.6

1. y = 1, 2. 2x + 3y + 3 = 0

आइए अभ्यास करें

1. (a) $4x + 3y + 9 = 0$ (b) $x - 8y - 24 = 0$
2. (a) $3x - 5y - 37 = 0$ (b) $5x - 8y - 60 = 0$
4. (a) $13x - y - 9 = 0$ (b) $3x - y + 1 = 0$

   (c) $3x - y - 4 = 0$
5. $x - \sqrt{3}y = 2 - \sqrt{3}$ 6. $2x + 3y + 13 = 0$
7. $bx + ay = ab$ 8. $\frac{\pi}{2}$ 9. $\frac{\pi}{2}$ 10. $\frac{98}{13}$
11. $\frac{9}{5}$ 12. $\frac{6}{\sqrt{13}}$ 13. $\frac{7}{5}$
16. $32x + 40y - 41 = 0$ 17. $x + 5y - 3 = 0$
18. $35x - 7y + 18 = 0$ 19. $63x + 105y - 781 = 0$
20. $23x + 23y - 11 = 0$