16

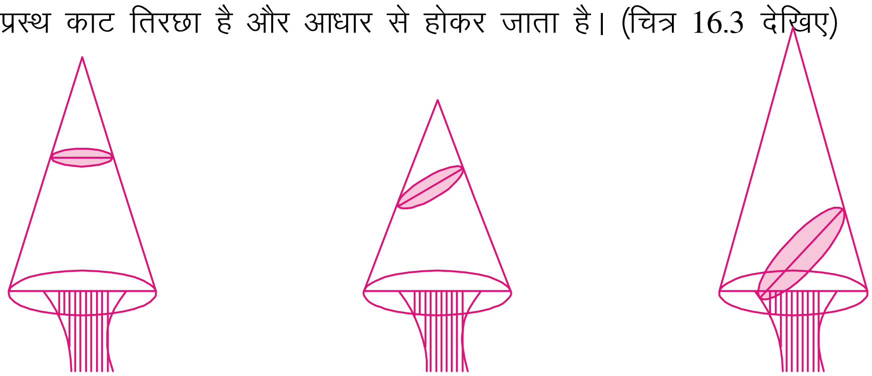
शंकु परिच्छेद

गाजर को काटते समय आप भिन्न–भिन्न आकृतियाँ देख सकते हैं जो गाजर की अनुप्रस्थ काट द्वारा बनी भिन्न भिन्न आकृतियों को दर्शाते हैं। वैश्लेषिक विधि से इसे तीन प्रकार से काटा जा सकता है। यथा

(*i*) अनुप्रस्थ काट आधार के समान्तर है। (चित्र 16.1 देखिए)

(*ii*) अनुप्रस्थ काट तिरछा है परन्तु आधार से होकर नहीं जाता है। (चित्र 16.2 देखिए)

(*iii*) अनुप्रस्थ काट तिरछा है और आधार से होकर जाता है। (चित्र 16.3 देखिए)



चित्र 16.1 चित्र 16.2 चित्र 16.3

भिन्न तरीके से काटने पर हमें भिन्न भिन्न आकृति की स्लाइस मिलती हैं।

प्रथम स्थिति में, कटा टुकड़ा एक वृत्त को निरूपित करता है जिसे हम पिछले पाठ में पढ़ चुके हैं।

द्वितीय तथा तृतीय स्थितियों में, कटे हुए टुकड़े भिन्न ज्यामितीय वक्र निरूपित करते हैं, जिन्हें हम इस पाठ में पढ़ेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाएंगे:

- वृत्त, परवलय, दीर्घवृत्त तथा अतिपरवलय को शंकु के परिच्छेद के रूप में देखना
- परवलय तथा दीर्घवृत्त को बिदुंपथ के रूप में देखना
- उत्केन्द्रता की अवधारणा, नियता, नाभि, तथा शीर्ष पहचानना;
- परवलय, दीर्घवृत्त और अतिपरवलय के मानक समीकरण को पहचानना; और
- परवलय, दीर्घवृत्त और अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात करना जब इसकी नियता तथा नाभि दिए गए हैं

पूर्व ज्ञान

- निर्देशांक ज्यामिति का प्रारम्भिक ज्ञान
- सरल रेखा के समीकरण के विभिन्न रूप
- विभिन्न रूपों में वृत्त का समीकरण

16.1 शंकु परिच्छेद

भूमिका में हमने गाजर की स्लाइस के कई आकारों को देखा। चूंकि गाजर की आकृति शंकु जैसी होती है इसलिए इससे प्राप्त परिच्छेदों को शंकु परिच्छेद कहते हैं।

गणितीय रूप में, शंकु परिच्छेद किसी एक बिन्दु P का बिन्दुपथ है जो इस प्रकार चलता है कि इसकी एक स्थिर बिन्दु से दूरी तथा एक स्थिर रेखा से लम्बवत दूरी का अनुपात सदैव स्थिर रहता है।

स्थिर बिन्दु को **नाभि** कहते हैं और सामान्यतः इसे 'S' से व्यक्त करते हैं।

स्थिर रेखा को **नियता** करते हैं।

नाभि से जाने वाली तथा नियता के लम्बवत सरल रेखा **अक्ष** कहलाती है।

उपर्युक्त स्थिर अनुपात को **उत्केन्द्रता** कहते हैं और इसे e से व्यक्त किया जाता है।

क्या होता है जब

(i) $e<1$ (ii) $e=1$ (iii) $e>1$?

इन स्थितियों में इस प्रकार प्राप्त शंकु परिच्छेद क्रमशः दीर्घवृत्त, परवलय तथा अतिपरवलय के नाम से जाने जाते हैं।

इस पाठ में हम दीर्घवृत, परवलय तथा अतिपरवलय के बारे में पढ़ेंगे।

16.2 दीर्घवृत्त

गाजर की स्लाइस के काटने को पुनः याद करें। जब हम इसे तिरछा काटते हैं, यह बचाते हुए कि चाकू आधार से होकर न जाए तो हम क्या देखते हैं ?

आपको ऐसी आकृति का सामना तब भी हुआ होगा जब आप उबले अण्डे को ऊर्ध्वाधरतः काटते हैं।

ऐसे प्राप्त स्लाइस एक दीर्घवृत्त को निरूपित करता है। आइए, हम दीर्घवृत्त को गणितीय रूप में निम्न प्रकार से परिभाषित करें:

" दीर्घवृत्त किसी एक ऐसे बिन्दु का बिन्दुपथ है जो इस प्रकार एक तल में चलता है कि इसकी एक स्थिर बिन्दु से दूरी तथा एक स्थिर रेखा से दूरी का अनुपात स्थिर रहता है तथा यह अनुपात इकाई से कम होता है।"

16.2.1 दीर्घवृत्त का मानक समीकरण

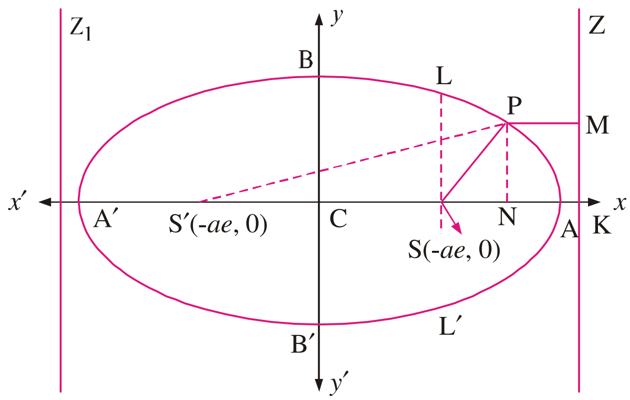
मान लीजिए नाभि S, नियता ZK तथा चर बिन्दु P है। S से नियता पर लम्ब SK खींचिए। माना उत्केन्द्रता e है।

SK का अन्तः तथा बाह्तः विभाजन (KS को बढ़ाने पर) क्रमशः बिंदुओं A तथा A' पर अनुपात e:1 में करें। चूंकि e<1 है,

$$SA = e.AK \qquad \cdots (1)$$

तथा $SA' = e.A'K \qquad \cdots (2)$

चूंकि A तथा A' ऐसे बिन्दु हैं जिनकी नाभि से दूरियों तथा नियता से क्रमशः दूरियों का अनुपात स्थिर e $(e < 1)$ है, अतः वे दीर्घवृत्त पर हैं। इन्हें दीर्घवृत्त के शीर्ष कहते हैं।



चित्र 16.4

माना AA', $2a$ के बराबर है तथा C इसका मध्यबिन्दु है, अर्थात $CA = CA' = a$ है।

C को दीर्घवृत्त का केन्द्र कहते हैं।

(1) और (2) का योग करने पर हमें प्राप्त होता है:

$$SA + SA' = e.AK + e.A'K$$

या $\quad AA' = e(CK - X'A + A'C + CK)$

या $\quad 2a = e.2CK$

या $\quad CK = \dfrac{a}{e} \qquad \cdots (3)$ Y

(2) में से (1) को घटाने पर हम प्राप्त करते हैं

$$SA' - SA = e(A'K - AK)$$

या $\quad (SC + CA') - (CA - CS) = e.A'A$

या $\quad 2\ CS = e.2a$

या $\quad CS = ae \qquad \cdots (4)$

अब हम C को मूलबिन्दु, CAX को x-अक्ष तथा CY, जो CX के लम्बवत रेखा है, को y- अक्ष लेते हैं।

$\therefore$ S के निर्देशांक $(ae, 0)$ होंगे तथा नियता का समीकरण $x = \dfrac{a}{e}$ होगा।

माना चर बिन्दु P के निर्देशांक (x, y) हैं। SP को मिलाइये, $PM \perp ZK$. खींचिए।

परिभाषा से $SP = e.PM$

या $SP^2 = e^2 . PM^2$

या $SN^2 + NP^2 = e^2.(NK)^2$

या $(CN - CS)^2 + NP^2 = e^2.(CK - CN)^2$

या $(x - ae)^2 + y^2 = e^2\left(\frac{a}{e} - x\right)^2$

या $x^2(1-e^2) + y^2 = a^2(1-e^2)$

या $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$ [$a^2(1-e^2)$ से भाग देने पर]

$a^2(1-e^2) = b^2$ रखने पर, हम दीर्घवृत्त का निम्न मानक समीकरण प्राप्त करते हैं:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

दीर्घ अक्ष : शीर्षों A' और A को मिलाने वाले रेखाखण्ड अर्थात A'A को दीर्घ अक्ष कहते हैं और इसकी लम्बाई $2a$ होती है।

लघु अक्ष : केन्द्र से जाने वाले और दीर्घअक्ष के लम्बवत रेखाखण्ड अर्थात B'B को लघुअक्ष कहते हैं और इसकी लम्बाई $2b$ होती है।

मुख्य अक्ष : दीर्घ अक्ष तथा लघु अक्ष इकट्ठे दीर्घवृत्त के मुख्य अक्ष कहलाते हैं

नाभि लम्ब : रेखा खण्ड LL' की लम्बाई को नाभि लम्ब कहते हैं।

नियताओं के समीकरण : $x = \pm\frac{a}{e}$

उत्केन्द्रता : e को $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ के द्वारा प्राप्त करते हैं।

उदाहरण 16.1. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभि (1,–1), उत्केन्द्रता $e = \frac{1}{2}$ तथा नियता $x - y = 3$ है।

हल: मान लीजिए कि दीर्घवृत्त पर कोई बिन्दु $P\ (h,k)$ है। तो परिभाषा से,

इस की नाभि से दूरी = $e \times$ इसकी नियता से दूरी

या $SP^2 = e^2.PM^2$ (M, *बिन्दु P से नियता पर डाले गए लम्ब का पाद है*)

या $(h-1)^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{h-k-3}{\sqrt{1+1}}\right)^2$

या $7(h^2+k^2)+2hk-10h+10k+7=0$

$\therefore$ P का बिन्दुंपथ है:

$7(x^2+y^2)+2xy-10x+10y+7=0$ है, जो दीर्घवृत्त का अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 16.2. दीर्घवृत्त $3x^2+4y^2=12$ की उत्केन्द्रता, नाभियों के निर्देशांक और अक्षों की लम्बाइयां ज्ञात कीजिए।

हल: दीर्घवृत्त की समीकरण को निम्न रूप में लिख सकते हैं:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

दीर्घवृत्त के मानक समीकरण से इसकी तुलना करने पर हम प्राप्त करते हैं

$a^2=4$ तथा $b^2=3$

तब

(i) $e^2=1-\frac{b^2}{a^2}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4} \Rightarrow e=\frac{1}{2}$

(ii) नाभियों के निर्देशांक $(1,0)$ तथा $(-1,0)$ हैं। [क्योंकि निर्देशाक $(\pm ae, 0)$]

(*iii*) दीर्घ अक्ष की लम्बाई $=2a=2\times 2=4$ तथा

लघु अक्ष की लम्बाई $=2b=2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

देखें आपने कितना सीखा 16.1

1. केन्द्र (0,0) के संदर्भ में दीर्घवृत्त के समीकरण ज्ञात कीजिए:

   (a) जिसका नाभिलम्ब 5 तथा उत्केन्द्रता $\frac{2}{3}$ है।

   (b)जिसका लघुअक्ष, नाभियों के बीच की दूरी के बराबर है और जिसका नाभिलम्ब 10 है।

   (c)जिसकी नाभियां (4,0) तथा (–4,0) और उत्केन्द्रता $\frac{1}{3}$ है।

2. यदि दीर्घवृत्त का नाभिलम्ब लघुअक्ष का आधा है तो इसकी उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए।

16.3 परवलय

गाजर की स्लाइस के क ाटने को पुन: याद करें। जब हम इसे तिरछा काटते हैं तथा चाकू को आधार से हो कर जाने दें, तो हम क्या देखते हैं? जब एक बल्लेबाज गेंद को हवा में मारता है तो क्या आपने कभी गेंद द्वारा अनुरेखित पथ पर ध्यान दिया है?

क्या, गाजर के स्लाइस और उपर्युक्त दिए हुए उदाहरण में गेंद द्वारा अनुरेखित पथ में कोई उभयनिष्ठ गुण है?

हाँ, ऐसी स्लाइस तथा गेंद के पथ की आकृति समान है जिसे हम परवलय कहते हैं। आइए, परवलय को गणितीय रुप में परिभाषित करें।

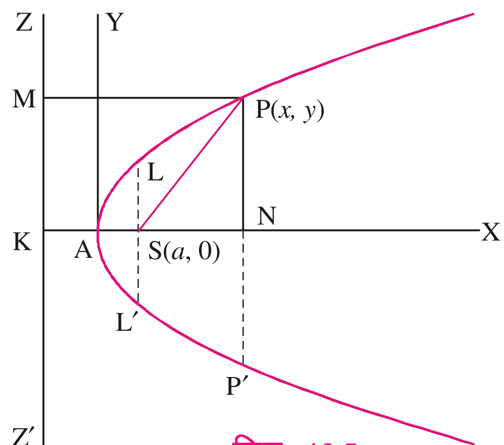
"परवलय एक ऐसे बिन्दु का बिन्दुपथ है जो एक तल में इस प्रकार से चलता है कि इस की तल में एक स्थिर बिन्दु से दूरी, तल में एक स्थिर रेखा से दूरी के बराबर है"

16.3.1 परवलय का मानक समीकरण

माना S स्थिर बिन्दु है, और ZZ' परवलय की नियता है। ZZ' के लम्बवत SK खींचिए। SK को A पर समद्विभाजित कीजिए।

चूंकि $SA = AK$, परवलय की परिभाषा से, A परवलय पर स्थित एक बिंदु है। A को परवलय का शीर्ष कहते हैं।

A को मूल बिन्दु लीजिए, AX को x-अक्ष और A से जाने वाली तथा AX के लम्बवत AY को y-अक्ष लीजिए।



चित्र 16.5

माना $KS = 2a$ है। $\therefore AS = AK = a$

$\therefore$ A तथा S के निर्देशांक क्रमशः (0,0) तथा $(a,0)$ हैं।

माना $P(x,y)$ परवलय पर कोई बिन्दु है। $PN \perp AS$ बढ़ाकर (खींचिए)

$\therefore$ $AN = x$ तथा $NP = y$

SP को मिलाइए तथा $PM \perp ZZ'$ खींचिए

$\therefore$ परवलय की परिभाषा से

$SP = PM$

या $SP^2 = PM^2$

या $(x-a)^2 + (y-0)^2 = (x+a)^2$ $\qquad [\because PM = NK = NA + AK = x + a]$

या $(x-a)^2 - (x+a)^2 = -y^2$ या $y^2 = 4ax$

यही परवलय का मानक समीकरण है।

टिप्पणी: परवलय के इस समीकरण में,

(*i*) शीर्ष (0,0) है। (*ii*) नाभि $(a,0)$ है।

(*iii*) अक्ष का समीकरण $y = 0$ है। (*iv*) नियता का समीकरण $x + a = 0$ है।

(*v*) नाभिलम्ब की लम्बाई $= 4a$

परवलय के अन्य रूप

परवलय के समीकरण क्या होंगे जब

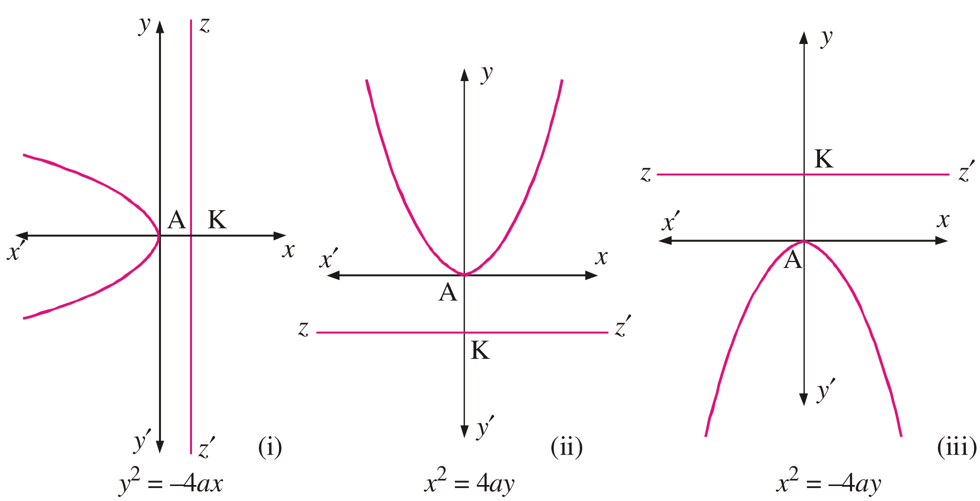
(*i*) नाभि $(-a,0)$ तथा नियता $x - a = 0$ है, (*ii*) नाभि$(0,a)$ तथा नियता $y + a = 0$ है,

(*iii*) नाभि $(0, -a)$ तथा नियता $y - a = 0$ है।

यह आसानी से दर्शाया जा सकता है कि उपर्युक्त प्रतिबन्धों के अन्तर्गत परवलय के समीकरण निम्न रूप के होंगे:

(*i*) $y^2 = -4ax$ (*ii*) $x^2 = 4ay$ (*iii*) $x^2 = -4ay$

परवलय के उपर्युक्त समीकरणों के लिए चित्र नीचे दिए गए हैं।



चित्र 16.6

परवलय के उपर्युक्त रूपों के संगत परिणाम निम्नलिखित हैं :

रूप	$y^2 = 4ax$	$y^2 = -4ax$	$x^2 = 4ay$	$x^2 = -4ay$
शीर्ष के निर्देशांक	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
नाभि के निर्देशांक	$(a,0)$	$(-a,0)$	$(0,a)$	$(0,-a)$
नियता का समीकरण	$x = -a$	$x = a$	$y = -a$	$y = a$
अक्ष का समीकरण	$y = 0$	$y = 0$	$x = 0$	$x = 0$
नाभिलम्ब की लम्बाई	$4a$	$4a$	$4a$	$4a$

उदाहरण 16.3. उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभि मूलबिन्दु है तथा नियता रेखा $2x+y-1=0$ है।

हल : माना नाभि S (0,0) है तथा ZZ' नियता है जिसका समीकरण $2x+y-1=0$ है।

माना परवलय पर कोई बिन्दु $P(x, y)$ है।

माना PM नियता पर लम्ब है (चित्र 16.5 देखिए)

$\therefore$ परिभाषा से $SP = PM$

या $\quad SP^2 = PM^2$ या $x^2+y^2 = \dfrac{(2x+y-1)^2}{\left(\sqrt{2^2+1}\right)^2}$

या $\quad 5x^2+5y^2 = 4x^2+y^2+1+4xy-2y-4x$

या $\quad x^2+4y^2-4xy+2y+4x-1=0$

यही परवलय का वांछित समीकरण है।

उदाहरण 16.4. उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसका नाभि बिन्दु $(2,3)$ तथा नियता रेखा $x-4y+3=0$ है।

हल : दिया है कि नाभि $S(2,3)$ है तथा नियता का समीकरण $x-4y+3=0$ है।

$\therefore$ उपर्युक्त उदाहरण की तरह

$$(x-2)^2+(y-3)^2 = \left\{\frac{x-4y+3}{\sqrt{1^2+4^2}}\right\}^2$$

या $\quad 16x^2+y^2+8xy-74x-78y+212=0$

जो कि परवलय का वांछित समीकरण है।

देखें आपने कितना सीखा 16.2

1. परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभि (a, b) और नियता $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ है।

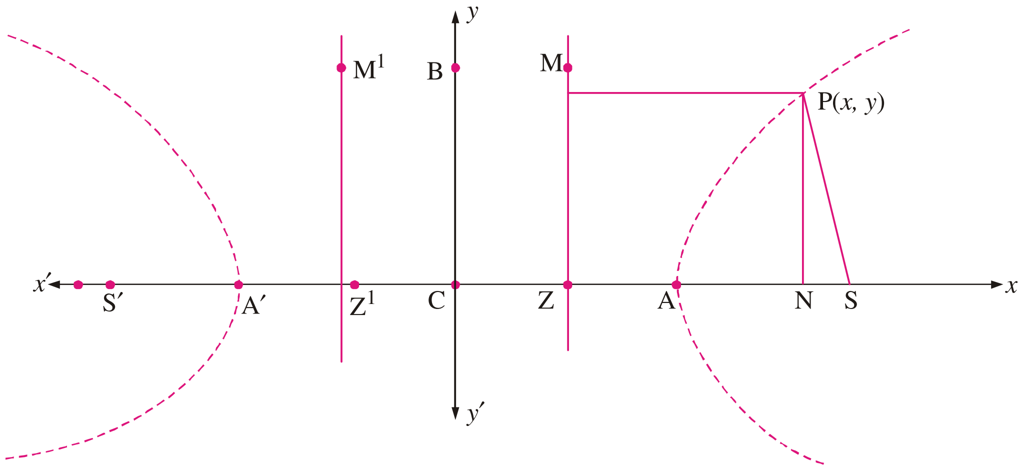
2. परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभि (2,3) तथा नियता $3x+4y=1$ है।

16.4 अतिपरवलय

अतिपरवलय एक ऐसे बिन्दु का बिन्दुपथ है जो एक समतल में इस प्रकार भ्रमण करता/घूमता है कि इसकी एक निश्चित बिन्दु तथा उसी समतल में स्थित एक निश्चित सरल रेखा से दूरी का अनुपात 1 से बड़ा होता है।

अर्थात् अतिपरवलय एक ऐसा शांक्व है जिसकी उत्केंद्रता 1 से अधिक है। निश्चित बिंदु को नाभि तथा निश्चित सरल रेखा को नियता कहते हैं।

अतिपरवलय का मानक रूप में समीकरण :



मान लीजिए S नाभि तथा ZM नियता है। S से नियता पर SZ लंब खींचा। हम SZ को $e:1$ $(e>1)$ के अनुपात में अन्तः और बाहयतः विभाजित कर सकते हैं माना A तथा A′ विभाजन बिन्दु हैं जैसा कि उपर्युक्त चित्र में दर्शाया गया है। मान लीजिए कि C, AA′ का मध्यबिन्दु है। अब CZ को x-अक्ष तथा C पर लम्ब को y-अक्ष लीजिए।

माना $\quad AA' = 2a$

अब $\quad \dfrac{SA}{AZ} = e \ (e>1)$ और $\dfrac{SA'}{A'Z} = e \ (e>1).$

अर्थात् $\quad SA = eAZ \qquad ...(i)$

$\quad SA' = eA'Z \qquad ...(ii)$

(i) और (ii) को जोड़ने पर हमें प्राप्त होता हैं

$$SA + SA' = e(AZ + A'Z)$$

$$(CS - CA) + (CS + CA') = eAA'$$

$\Rightarrow \quad 2CS = e.2a \ (\because CA = CA')$

$\Rightarrow \quad CS = ae$

अतः नाभि बिन्दु $(ae, 0)$ है।

(ii) से (i) घटाने पर हमें प्राप्त होता है।

$$SA' - SA = e(A'Z - AZ)$$

अर्थात् $\quad AA' = e\left[(CZ + CA') - (CA - CZ)\right]$

अर्थात् $\quad AA' = e[2CZ] \ \ (\because CA' = CA)$

अर्थात् $\quad 2a = e(2CZ)$

$$\Rightarrow \qquad CZ = \frac{a}{e}$$

$\therefore$ नियता का समीकरण $x = \dfrac{a}{e}$ है।

मान लीजिए अतिपरवलय पर कोई बिन्दु P(x, y) है। P से नियता तथा x-अक्ष पर लम्ब क्रमशः PM तथा PN हैं।

इस प्रकार $$\frac{SP}{PM} = e \qquad \Rightarrow SP = ePM$$

$$\Rightarrow \qquad (SP)^2 = e^2(PM)^2$$

अर्थात् $$(x-ae)^2+(y-0)^2 = e^2\left(x-\frac{a}{e}\right)^2$$

अर्थात् $$x^2+a^2e^2-2aex+y^2 = e^2\left(\frac{e^2x^2+a^2-2aex}{e^2}\right)$$

अर्थात् $$x^2+a^2e^2+y^2 = e^2x^2+a^2$$

अर्थात् $$(e^2-1)x^2-y^2 = a^2(e^2-1)$$

अर्थात् $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1$$

मान लीजिए $$a^2(e^2-1) = b^2$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1$$

जो कि मानक रूप में अतिपरवलय का समीकरण है।

- अब माना y-अक्ष के सापेक्ष S का प्रतिबिम्ब S′ तथा ZM का प्रतिबिम्ब Z′M′ है। S′ को नाभि तथा Z′M′ को नियता लेने पर, यह देख सकते हैं कि अतिपरवलय की संगत समीकरण $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ है। अतः प्रत्येक अतिपरवलय के लिए, दो नाभियां और दो नियताएँ होती है।
- हमें $b^2=a^2(e^2-1)$ तथा $e > 1$ ज्ञात है $\Rightarrow e = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}$
- यदि हम अतिपरवलय की समीकरण में $y = 0$ रखें तो हमें प्राप्त होता है
  $x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a$
  $\therefore$ अतिपरवलय x-अक्ष को A(a, 0) तथा A′($-a$, 0) पर काटता है।
- यदि अतिपरवलय की समीकरण में हम $x = 0$ रखें तो हमें प्राप्त होता है
  $y^2 = -b^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{-1}.b = \pm ib$
  जिसका कार्तीय तल में अस्तित्व नहीं है।
  $\therefore$ अतिपरवलय y-अक्ष पर प्रतिच्छेद नहीं करता है।

- AA′ = $2a$, x-अक्ष की दिशा में अतिपरवलय की अनुप्रस्थ अक्ष कहलाती है। तथा BB′ = $2b$ y-अक्ष की दिशा में अतिपरवलय की संयुग्मी अक्ष कहलाती है। ध्यान रहे अतिपरवलय संयुग्मी अक्ष पर नहीं मिलता है।
- दीर्घवृत्त की तरह, अतिपरवलय की भी दो नाभियाँ

  S(ae, 0), S′($-ae$, 0) और दो नियताएँ $x=\pm\dfrac{a}{e}$ होती हैं।
- C अतिपरवलय का केन्द्र कहलाता है।
- अतिपरवलय की नाभिलम्ब जीवा, अनुप्रस्थ अक्ष पर लम्बवत एक रेखाखण्ड है जो किसी नाभि से होकर जाता है तथा उसका अन्त बिन्दु अतिपरवलय पर स्थित होता है। दीर्घवृत की तरह, इसे सिद्ध कर सकते हैं कि अतिपरवलय की नाभिलम्ब जीवा भी $\dfrac{2b^2}{a}$ होती है।
- अतिपरवलय दोनों अक्षों के सममित होता है।
- अतिपरवलय की नाभियाँ हमेशा अनुप्रस्थ अक्ष पर होतीं हैं। धनात्मक पद के हर से अनुप्रस्थ अक्ष प्राप्त होता है उदाहरण के लिए $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$, x-अक्ष की दिशा में अनुप्रस्थ अक्ष पर होता है तथा अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई 6 इकाई है। जबकि $\dfrac{y^2}{25}-\dfrac{x^2}{16}=1$ अनुप्रस्थ अक्ष पर y-अक्ष की दिशा में है जिसकी लम्बाई 10 इकाई है।
- अतिपरवलय, जिसकी अनुप्रस्थ तथा संयुग्मी अक्ष क्रमशः किसी दिए गए अतिपरवलय के संयुग्मी तथा अनुप्रस्थ अक्ष हों तो यह अतिपरवलय दिए गए अतिपरवलय का संयुग्मी अतिपरवलय कहलाता है जिसका समीकरण $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$ है।

इस स्थिति में : अनुप्रस्थ अक्ष y-अक्ष की ओर तथा संयुग्मी अक्ष x-अक्ष की ओर होती है।

- अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई = $2b$.
- संयुग्मी अक्ष की लम्बाई = $2a$
- नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई = $\dfrac{2a^2}{b}$.
- नियताओं की समीकरण $y=\pm\dfrac{b}{e}$.
- शीर्ष $(0, \pm b)$
- नाभियाँ $(0, \pm be)$
- केन्द्र (0, 0)
- उत्केन्द्रता $e=\sqrt{\dfrac{b^2+a^2}{b^2}}$.

16.5 समकोणीय अतिपरवलय

यदि किसी अतिपरवलय में अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई संयुग्मी अक्ष की लम्बाई के बराबर हो, तो वह अतिपरवलय समकोणीय अतिपरवलय कहलाता है।

इसकी समीकरण $x^2 - y^2 = a^2$ या $y^2 - x^2 = b^2$ $(\because\ a = b)$

इस स्थिति में $e = \sqrt{\dfrac{a^2+a^2}{a^2}}$ या $\sqrt{\dfrac{b^2+b^2}{b^2}} = \sqrt{2}$

अर्थात् समकोणीय अतिपरवलय की उत्केन्द्रता $\sqrt{2}$ होती है।

उदाहरण 16.5. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ के लिए निम्नलिखित ज्ञात कीजिए (i) उत्केन्द्रता (ii) नाभियाँ (iii) शीर्ष (iv) नियताएँ (v) अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई (vi) संयुग्मी अक्ष की लम्बाई (vii) नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई (viii) केन्द्र।

हल : यहाँ $a^2 = 16$ तथा $b^2 = 9$, $\Rightarrow a = 4$ तथा $b = 3$.

(i) उत्केन्द्रता (e) = $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}} = \sqrt{\dfrac{16+9}{16}} = \dfrac{5}{4}$

(ii) नाभि = $(\pm\ ae, 0) = \left(\pm 4\times\dfrac{5}{4}, 0\right) = (\pm 5, 0)$

(iii) शीर्ष = $(\pm\ a,\ 0) = (\pm\ 4,\ 0)$

(iv) नियताएँ $x = \pm\dfrac{a}{e} \Rightarrow x = \pm\dfrac{4}{5/4} \Rightarrow x = \pm\dfrac{16}{5}$.

(v) अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई = $2a = 2 \times 4 = 8$.

(vi) संयुग्मी अक्ष की लम्बाई = $2b = 2 \times 3 = 6$

(vii) नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई = $\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2\times 9}{4} = \dfrac{9}{2}$.

(viii) केन्द्र = (0, 0)

उदाहरण 16.6. उस अतिपरवलय की समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $(\pm\ 2,\ 0)$ तथा नाभि $(\pm\ 3,\ 0)$ है।

हल : यहाँ $a = 2$ और $ae = 3$.

$\therefore$ $e = 3/2$.

हम जानते हैं कि $b^2 = a^2(e^2-1)$

$\Rightarrow$ $b^2 = 4\left(\dfrac{9}{4}-1\right) = 5$

$\therefore$ अतिपरवलय की समीकरण $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$ है।

उदाहरण 16.7. अतिपरवलय $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{27} = 1$ के लिए, निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

(i) उत्केन्द्रता (ii) केन्द्र (iii) नाभियाँ (iv) शीर्ष (v) नियताएँ (vi) अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई (vii) संयुग्मी अक्ष की लम्बाई (viii) नाभिलम्ब जीवा।

हल : यहाँ $b^2 = 9$ तथा $a^2 = 27 \Rightarrow b = 3$ तथा $a = 3\sqrt{3}$.

(i) $e = \sqrt{\dfrac{27+9}{9}} = \sqrt{4} = 2.$ (ii) केन्द्र $= (0, 0)$

(iii) नाभियाँ $= (0, \pm be) = (0, \pm 3 \times 2) = (0, \pm 6).$

(iv) शीर्ष $= (0, \pm b) = (0, \pm 3).$

(v) नियताएँ $y = \pm \dfrac{b}{e} \Rightarrow y = \pm \dfrac{3}{2}.$

(vi) अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई $= 2b = 2 \times 3 = 6$

(vii) संयुग्मी अक्ष की लम्बाई $= 2a = 2 \times 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

(viii) नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई $= \dfrac{2a^2}{b} = \dfrac{2 \times 27}{3} = 18.$

देखें आपने कितना सीखा 16.3

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

1. (i) अतिपरवलय $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{16}$ की अनुप्रस्थ अक्ष की दिशा है ....

   (ii) अतिपरवलय $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ की उत्क्रेन्द्रता है ....

   (iii) समकोणीय अतिपरवलय की उत्क्रेन्द्रता है ....

   (iv) अतिपरवलय $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ के नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई है ....

   (v) अतिपरवलय $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ की नाभियों की स्थितियां है ....

   (vi) अतिपरवलय $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ की नियताओं की समीकरण हैं ....

   (vii) अतिपरवलय $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ के शीर्ष हैं ....

2. अतिपरवलय $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ के लिए, निम्नलिखित की पूर्ति कीजिए :

   (i) उत्क्रेन्द्रता (e) = ... (ii) केन्द्र = ...

   (iii) नाभियाँ = ... (iv) शीर्ष = ...

   (v) नियताओं की समीकरण, y = ... (vi) नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई = ...

   (vii) अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई = ... (viii) संयुग्मी अक्ष की लम्बाई = ...

   (ix) अनुप्रस्थ अक्ष की दिशा है .... (x) संयुग्मी अक्ष .... की ओर है

आइये दोहराएँ

- **शंकु परिच्छेद**

"शंकु परिच्छेद एक बिन्दु P का बिन्दुपथ है जो इस प्रकार चलता है कि इसकी किसी एक स्थिर बिन्दु से दूरी तथा एक स्थिर सरल रेखा से लम्बवत दूरी का अनुपात सदैव स्थिर रहता है".

(*i*) **नाभि :** स्थिर बिन्दु को नाभि कहते हैं।

(*ii*) **नियता :** स्थिर सरल रेखा को नियता कहते हैं।

(*iii*) **अक्ष:** नाभि से जाने वाली तथा नियता के लम्बवत सरल रेखा को अक्ष कहते हैं।

(*iv*) **उत्केन्द्रता :** उर्पयुक्त स्थिर अनुपात को उत्केन्द्रता कहते हैं।

- (*v*) **नाभि लम्ब :** नाभि से जाने वाली तथा नियता के समान्तर द्विकोटि को नाभिलम्ब कहते हैं। (चित्र 16.5 में LSL' नाभिलम्ब है)

- **दीर्घवृत्त का मानक समीकरण :** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ है।

(*i*) दीर्घ अक्ष $=2a$ (*ii*)लघु अक्ष $=2b$

(*iii*) नियता का समीकरण $x=\pm\frac{a}{e}$ (*iv*) नाभियां : $(\pm ae, 0)$

(*v*) उत्केन्द्रता अर्थात e को $e^2=1-\frac{b^2}{a^2}$ के द्वारा प्राप्त करते हैं

- **परवलय का मानक समीकरण** $y^2=4ax$ है।

(*i*)शीर्ष (0,0) है। (*ii*) नाभि $(a,0)$ है।

(*iii*) परवलय का अक्ष $y=0$ है। (*iv*)परवलय की नियता $x+a=0$ है।

(*v*) नाभिलम्ब $=4a$

- **परवलय के अन्य रूप हैं.**

(*i*) $y^2=-4ax$ (बाईं ओर अवतल)

(*ii*) $x^2=4ay$ (ऊपर की ओर अवतल)

(*iii*) $x^2=-4ay$ (नीचे की ओर अवतल)

- अतिपरवलय का समीकरण, जिसकी अनुप्रस्थ अक्ष x-अक्ष की ओर तथा संयुग्मी अक्ष y-अक्ष की ओर है, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ है।

  इस अतिपरवलय के लिए (i) $e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}$.

  (ii) केन्द्र = (0, 0) (iii) नाभियाँ = $(\pm ae, 0)$

  (iv) शीर्ष = $(\pm a, 0)$ (v) नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई = $\frac{2b^2}{a}$

  (vi) अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई = $2a$

  (vii) संयुग्मी अक्ष की लम्बाई = $2b$

  (viii) नियता का समीकरण $x=\pm\frac{a}{e}$ द्वारा दी जातीं हैं।

- उस अतिपरवलय का समीकरण जिसमें, अनुप्रस्थ अक्ष y-अक्ष की ओर तथा संयुग्मी अक्ष x-अक्ष की ओर हों, $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ है।

  इस अतिपरवलय के लिए

  (i) शीर्ष = $(0, \pm b)$ (ii) केन्द्र = (0, 0)

  (iii) नाभियाँ = $(0, \pm be)$ (iv) $e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}}$

  (v) नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई = $\frac{2a^2}{b}$.

  (vi) अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई = $2b$.

  (vii) संयुग्मी अक्ष की लम्बाई = $2a$.

  (viii) नियताओं की समीकरण $y=\pm\frac{b}{e}$ द्वारा दी जाती हैं।

सहायक वेबसाइट

- *https://www.youtube.com/watch?v=ikzoI7K5q3o*
- *https://www.youtube.com/watch?v=Auv-yHdjA6Q*
- *https://www.youtube.com/watch?v=UOeCoMGeEI8*
- *https://www.youtube.com/watch?v=-AB5gXQWaJE*
- *https://www.youtube.com/watch?v=aWj5cW-8T2E*
- *https://www.youtube.com/watch?v=XHPgDnJOkWM*
- *https://www.youtube.com/watch?v=P3K6dHYZfTw*

आइए अभ्यास करें

1. निम्न स्थितियों में दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए, जब

   (a) नाभि (0, 1), नियता $x + y = 0$ तथा $e = \frac{1}{2}$ है।

   (b) नाभि (–1, 1), नियता $x - y + 3 = 0$ तथा $e = \frac{1}{2}$ है।

2. निम्न दीर्घवृत्तों की नाभियों तथा उत्केन्द्रता के निर्देशांक ज्ञात कीजिएः

   (a) $4x^2 + 9y^2 = 1$ (b) $25x^2 + 4y^2 = 100$

3. उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभि (–8, –2) तथा नियता $y - 2x + 9 = 0$ है।

4. अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभियाँ (± 5, 0) है तथा अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई 8 इकाई है।

5. अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (0, ± 6) तथा $e = \frac{5}{3}$ है।

6. अतिपरवलय (i) $25x^2 - 9y^2 = 225$ (ii) $16y^2 - 4x^2 = 1$ की उत्केन्द्रता, अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई, संयुग्मी अक्ष की लम्बाई, शीर्ष, नाभियाँ, नियताओं की समीकरण तथा नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

7. उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभियाँ $(0, \pm\sqrt{10})$ तथा वह बिन्दु (2, 3) से होकर जाता है।

8. उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभि (± 4, 0) तथा नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई 12 है।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 16.1

1. (a) $20x^2 + 36y^2 = 405$ (b) $x^2 + 2y^2 = 100$

   (c) $8x^2 + 9y^2 = 1152$

2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

देखें आपने कितना सीखा 16.2

1. $(ax - by)^2 - 2a^3x - 2b^3y + a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0.$

2. $16x^2 + 9y^2 - 94x - 142y - 24xy + 324 = 0$

देखें आपने कितना सीखा 16.3

1. (i) y-अक्ष (ii) $\frac{5}{3}$ (iii) $\sqrt{2}$ (iv) $\frac{2b^2}{a}$

 (v) $(\pm ae, 0)$ (vi) $x = \pm\frac{a}{e}$ (vii) $(\pm a, 0)$

2. (i) $\sqrt{\frac{b^2+a^2}{b^2}}$ (ii) (0, 0) (iii) $(0, \pm be)$

 (iv) (0, ± b) (v) $\frac{\pm b}{e}$ (vi) $\frac{2a^2}{b}$

 (vii) $2b$ (viii) $2a$ (ix) y-अक्ष

 (x) x-अक्ष

आइए अभ्यास करें

1. (a) $7x^2+7y^2-2xy-16y+8=0$

 (b) $7x^2+7y^2+2xy+10x-10y+7=0$

2. (a) $\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{6},0\right);\ \frac{\sqrt{5}}{3}$ (b) $\left(0\ ,\pm\sqrt{21}\right);\ \frac{\sqrt{21}}{5}$

3. $x^2+4y^2+4xy+116x+2y+259=0$

4. $9x^2-16y^2=144$

5. $16y^2-9x^2=576$

6. (i) उत्केन्द्रता = $\frac{\sqrt{34}}{3}$, अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई = 6 संयुग्मी अक्ष की लम्बाई = 10, शीर्ष (± 3, 0), नाभि $(\pm\sqrt{34},0)$ नियताओं का समीकरण $x=\pm\frac{1}{\sqrt{34}}$, नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई = $\frac{50}{3}$.

 (ii) उत्केन्द्रता = $\sqrt{5}$, अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई = $\frac{1}{2}$, संयुग्मी अक्ष की लम्बाई = 1, शीर्ष $\left(0,\pm\frac{1}{4}\right)$, नाभि $\left(0,\pm\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$, नियताओं का समीकरण $y=\frac{1}{4\sqrt{5}}$, नाभिलम्ब = 2

7. $y^2-x^2=5$ 8. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$