17

प्रकीर्णन के मापक

अब तक आप केंद्रीय प्रवृत्ति (central tendency) के विभिन्न मापों से परिचित हो गए होंगे। केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप एक मान द्वारा पूरे आंकड़ों को निरूपित करने में सहायक होते हैं। क्या केंद्रीय प्रवृत्ति के मान आंकड़ों का पूरी तरह व समुचित रूप से वर्णन कर सकते हैं?

इसे समझने के लिए, आइए एक उदाहरण लें। दो कारखानों में काम कर रहे व्यक्तियों की दैनिक आय निम्नलिखित है:

कारखाना A	:	35	45	50	65	70	90	100
कारखाना B	:	60	65	65	65	65	65	70

यहां हम देखते हैं कि दोनों समूहों का आंकड़ा माध्य समान अर्थात् 65 है।

(i) समूह (A) के प्रेक्षण (observations), माध्य से अधिक प्रकीर्ण हैं।

(i) समूह (B) में लगभग सभी प्रकीर्ण माध्य के आसपास केंद्रित हैं।

निश्चित रूप से दोनों समूहों के माध्य समान होने पर भी दोनों में अन्तर है।

इस प्रकार, ऐसी स्थिति से ही समूहों के बीच भेद करने की ज़रूरत पैदा होती है। हमें कुछ अन्य मापों की भी ज़रूरत होती है जो प्रकीर्णता (या फैलाव) के माप से संबधित होते हैं।

इस पाठ में, हम परिक्षेपण के माप (measure of dispersion) का अध्ययन करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्न-लिखित में समर्थ हो जाएंगे :

- प्रकीर्णन के अर्थ उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करना
- विक्षेपण की विभिन्न मापों- परास (range), माध्य विचलन (mean deviation), प्रसरण (variance) तथा मानक विचलन को परिभाषित करना
- यथा प्राप्त और वर्गीकृत आंकड़ों का माध्य से माध्य विचलन को परिकलित करना
- यथा प्राप्त और वर्गीकृत आंकड़ों का माध्यक से माध्य विचलन परिकलित करना
- यथा प्राप्त और वर्गीकृत आंकड़ों के लिए प्रसरण और मानक विचलन को परिकलित करना
- प्रसरण और मानक विचलन के गुणों को उदाहरणों की सहायता से स्पष्ट करना
- समान माध्य वाले बारंबारता बंटनों का विश्लेषण करना

पूर्व ज्ञान

- वर्गीकृत आंकड़ों का माध्य
- अवर्गीकृत आंकड़ों का माध्यक

17.1 प्रकीर्णन का अर्थ

आइए प्रकीर्णन का अर्थ स्पष्ट करने के लिए एक उदाहरण लें।

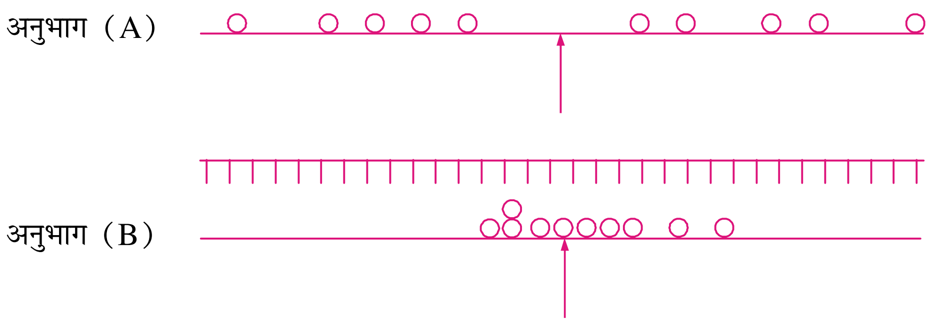
किसी स्कूल में दसवीं कक्षा के दो अनुभागों (सेक्शनों) में से 10 विद्यार्थियों (प्रत्येक सेक्सन से दस विद्यार्थी) की गणित की साधारण परीक्षा ली गई। अधिकतम 40 अंकों में से विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक इस प्रकार हैं:

अनुभाग (A)	6	9	11	13	15	21	23	28	29	35
अनुभाग (B)	15	16	16	17	18	19	20	21	23	25

अनुभाग (A) के औसत अंक 19 हैं

अनुभाग (B) के औसत अंक 19 हैं।

आइए अनुभाग (A) और (B) के लिए समान पैमाने पर बिन्दु चित्र (चित्र नीचे देखिए) बनाएं। चित्र में माध्य की स्थिति एक तीर के निशान से दर्शित है।



चित्र 17.1

स्पष्टतः प्रत्येक अनुभाग में आंकड़ों के फलाव या प्रकीर्णन का विस्तार अलग-अलग है। औसत के संबंध में दिए गए आंकड़ों के प्रकीर्ण का माप प्रकीर्णन कहलाता है।

इस पाठ में, आप निम्नलिखित प्रकीर्णन मापों के बारे में पढ़ेंगे।

(a) परास (range)

(b) माध्य से माध्य विचलन (mean deviation from mean)

(c) माध्यक से माध्य विचलन (mean deviation from median)

(d) प्रसरण (Variance)

(e) मानक विचलन (Standard deviation)

17.2 विभिन्न प्रकीर्णन मापों की परिभाषा

(A) परासः उपर्युक्त उदाहरण में, हमने देखा कि(i) अनुभाग (A) के सभी विद्यार्थियों के अंक 6 से 35 के बीच में हैं।

(ii) अनुभाग (B) के सभी विद्यार्थियों के अंक 15 से 25 के बीच में हैं।

दिए गये आंकड़ों के अधिकतम और न्यूनतम मान के बीच का अंतर बंटन का परास कहलाता है।

(B) माध्य से माध्य विचलनः चित्र 17.1 में हमने देखा कि अनुभाग (B) के अंक माध्य के आसपास हैं जबकि अनुभाग (A) के अंक माध्य से दूर फैले हैं। आइए माध्य से प्रत्येक प्रेक्षण का विचलन ले और ऐसे विचलनों को जोड़ें। यदि 'योग बड़ा' होगा तो प्रकीर्णन भी 'बड़ा होगा' और यदि योग 'छोटा होगा तो प्रकीर्णन भी 'छोटा' होगा।

आइए अनुभाग के अंकों के लिए माध्य अर्थात् 19 से विचलनों का योग, ज्ञात करें।

प्रेक्षण (x_i)	माध्य से विचलन $(x_i - \bar{x})$
6	–13
9	–10
11	–8
13	–6
15	–4
21	+2
23	+4
28	+9
29	+10
35	16
190	0

यहां योग शून्य है। यह योग न तो 'बड़ा' है न ही 'छोटा' है। क्या यह मात्र संयोग है। आइए अनुभाग (B) के अंकों के लिए माध्य अर्थात् 19 से, विचलनों का योग ज्ञात करें।

प्रेक्षण (x_i)	माध्य से विचलन $(x_i - \bar{x})$
15	–4
16	–3
16	–3
17	–2
18	–1
19	0
20	1
21	2
23	4
25	6
190	0

हमने देखा, यहां भी योग शून्य ही आता है। निश्चित रूप से यह संयोगवश नहीं है। वस्तुतः **हम यह पहले ही सिद्ध कर चुके हैं कि किन्हीं आंकडो़ं के समुच्चय के लिए, माध्य से लिया गया विचलनों का योग हमेशा शून्य होता है।**

ध्यान से जांच करने पर हम पाते हैं कि कुछ विचलनों के चिन्ह धनात्मक हैं और कुछ विचलनों के

चिन्ह ऋणात्मक हैं। शायद यही कारण है कि इनका योग हमेशा शून्य होता है।

दोनों स्थितियों में क्योंकि योग शून्य है, हम कोई निष्कर्ष नहीं निकाल सकते। परन्तु इससे बचा जा सकता है यदि हमें विचलनों का निरपेक्ष मान लें और तब योग करें।

इस विधि का अनुसरण करें तो, इससे हमें जो मान प्राप्त होगा वह माध्य से माध्य विचलन कहलाता है।

इस प्रकार माध्य विचलन प्रेक्षणों के माध्य से विचलन के निरपेक्ष का योग है। मानों के योग को प्रेक्षणों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है।

(C) प्रसरण : उपर्युक्त स्थिति में, हमने विचलनों के ऋणात्मक चिन्ह से छुटकारा पाने के लिए माध्य से लिए गये विचलनों का निरपेक्ष मान लिया है। अन्य विधि है विचलनों के वर्ग लेना। इसलिए आइये, माध्य से विचलनों को वर्ग करके उनका योग लें। यदि हम इस योग को प्रेक्षण की संख्याओं (अर्थात् बारम्बारताओं का योग) से विभाजित करते हैं तो हमें विचलनों का औसत प्राप्त होगा, जो प्रसरण कहलाता है।

प्रसरण को प्राय: चिन्ह σ^2 से दर्शाया जाता है।

(D) मानक विचलन : यदि हम प्रसरण का धनात्मक वर्गमूल लें तो हमें विचलनों के वर्गों के माध्य का वर्गमूल मान प्राप्त होता है। सरल भाषा में इसे हम मानक विचलन कहते हैं और इसे σ द्वारा दर्शाया जाता है।

17.3 यथाप्राप्त तथा वर्गीकृत आंकड़ों के लिए माध्य से माध्य विचलन

यथा प्राप्त आंकड़ों के लिए माध्य से माध्य विचलन $= \dfrac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|}{N}$

वर्गीकृत आंकड़ों के लिए माध्य से माध्य विचलन $= \dfrac{\sum_{i=1}^{n}[f_i|x_i - \bar{x}|]}{N}$

जहां $\quad N = \sum_{i=1}^{n} f_i, \bar{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(f_i x_i)$

माध्य विचलन ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित चरणों का अनुसरण कीजिए :

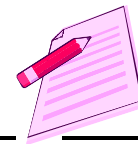
चरण 1: माध्य से विचलन का एक कॉलम बनाएँ यानि $(x_i - \bar{x})$ (वर्गीकृत आंकड़ों की स्थिति में x_i को वर्ग के मध्य मान (mid-value) के रूप में लें)

चरण 2 : प्रत्येक विचलन का निरपेक्ष मान लें और $|x_i - \bar{x}|$ वाले कॉलम में उस मान को लिखें।

यथा प्राप्त आंकड़ों के लिए माध्य से माध्य विचलन ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग कीजिए :

माध्य से माध्य विचलन $= \dfrac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|}{N}$

वर्गीकृत आकड़ों के लिए चरण 3 के अनुसार चलें।



चरण 3: चरण 2 की प्रत्येक प्रविष्टि को संगत बारंबारता से गुणा करें। हमें $f_i|(x_i - \bar{x})|$ प्राप्त होता है। इसे $f_i|x_i - \bar{x}|$ शीर्षक वाले कॉलम में लिखें

चरण 4: चरण 3 के कॉलम का योग ज्ञात कीजिए। हमें प्राप्त होता है $\sum_{i=1}^{n}[f_i|x_i - \bar{x}|]$

चरण 5: चरण 4 में प्राप्त योग को N से विभाजित करें।

आइए उपरोक्त चरणों को स्पष्ट रूप से समझने के लिए एक उदाहरण देखें।

उदाहरण 17.1 निम्नलिखित आंकड़ों का माध्य से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

वस्तुओं का आकार x_i	4	6	8	10	12	14	16
बारंबारता f_i	2	4	5	3	2	1	4

माध्य 9.7 लें।

हल :

x_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$\|x_i - \bar{x}\|$	$f_i\|x_i - \bar{x}\|$
4	2	−5.7	5.7	11.4
6	4	−3.7	3.7	14.8
8	5	−1.7	1.7	8.5
10	3	0.3	0.3	0.9
12	2	2.3	2.3	4.6
14	1	4.3	4.3	4.3
16	4	6.3	6.3	25.2
	21			69.7

माध्य से माध्य विचलन $= \dfrac{\sum[f_i|x_i - \bar{x}|]}{21} = \dfrac{69.7}{21} = 3.319$

उदाहरण 17.2. निम्नलिखित बंटन का माध्य से माध्य विचलन परिकलित कीजिए :

अंक	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
विद्यार्थियों की संख्या	5	8	15	16	6

अंकों का माध्य 27 है।

हल :

अंक	वर्ग-चिन्ह x_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$\|x_i - \bar{x}\|$	$f_i\|x_i - \bar{x}\|$
0 – 10	5	5	−22	22	110
10 – 20	15	8	−12	12	96
20 – 30	25	15	−2	2	30
30 – 40	35	16	8	8	128
40 – 50	45	6	18	18	108
कुल		50			472

माध्य से माध्य विचलन $= \dfrac{\sum [f_i |x_i - \bar{x}|]}{N} = \dfrac{472}{50} = 9.44$ अंक

देखें आपने कितना सीखा 17.1

1. नीचे दस लड़कियों की आयु दी गई है :

   3 5 7 8 9 10 12 14 17 18

   इसकी परास क्या है?

2. कक्षा 12 के 10 विद्यार्थियों का भार (किलो ग्राम) में नीचे दिया गया है :

   45 49 55 43 52 40 62 47 61 58

   इसकी परास क्या है?

3. निम्नलिखित आंकड़ों के लिए माध्य से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

   45 55 63 76 67 84 75 48 62 65

   दिया है : माध्य $= 64$ दिया है।

4. निम्नलिखित बंटन का माध्य से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

वेतन (रु. में)	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 100
कर्मचारियों की संख्या	4	6	8	12	7	6	4	3

दिया है : माध्य $= 57.2$ दिया है।

5. एक परीक्षा में 40 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों के निम्नलिखित आकड़ों के लिए माध्य विचलन परिकलित कीजिए :

प्राप्त अंक	20	30	40	50	60	70	80	90	100
विद्यार्थियों की संख्या	2	4	8	10	8	4	2	1	1

6. नीचे दिए गए आंकड़े एक कारखाने के 50 कर्मचारियों की आय को दर्शाते हैं :

आय (रूपयों में)	1200	1300	1400	1500	1600	1800	2000
कर्मचारियों की संख्या	4	6	15	12	7	4	2

   माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

7. 100 विद्यार्थियों के भारों का वितरण नीचे दिया गया है:

भार (किलो ग्राम में)	50–55	55–60	60–65	65–70	70–75	75–80
विद्यार्थियों की संख्या	5	13	35	25	17	5

माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

8. एक विशेष परीक्षा में 50 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक हैं:

अंक	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90	90–100
विद्यार्थियों की संख्या	4	6	9	12	8	6	4	1

उपरोक्त आंकड़ों के लिए माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

17.4 माध्यक

17.4.1 वर्गीकृत आँकड़ों का माध्यक

असतत बारम्बारता बंटन का माध्यक

चरण 1 : आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए।

चरण 2 : संचयी बारम्बारता ज्ञात कीजिए।

चरण 3 : $\frac{N}{2}$ ज्ञात कीजिए।

चरण 4 : प्रेक्षण जिसकी संचयी बारम्बारता $\frac{N}{2}$ से थोड़ी अधिक हो, आँकड़ों का माध्यक होता है।

उदाहरण 17.3. आँकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

x_i	8	9	10	12	14	16
f_i	6	2	2	2	6	8

हल : दिये गये आँकड़े पहले से ही आरोही क्रम में हैं। अब हमें प्रेक्षणों की संचयी बारम्बारता लिखनी है।

x_i	8	9	10	12	14	16
f_i	6	2	2	2	6	8
c.f.	6	8	10	12	18	26

$$N = 26, \qquad \therefore \frac{N}{2} = 13.$$

प्रेक्षण, जिसकी संचयी बारम्बारता (c.f.) 13 से अधिक 14 है (जिसकी संचयी बारंबारता 18 है)

$\therefore$ माध्यक = 14.

17.4.2 सतत बारम्बारता बंटन का माध्यक

चरण 1 : आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए।

चरण 2 : प्रेक्षणों की संचयी बारम्बारता लिखिए।

चरण 3 : उस वर्ग की जाँच कीजिए जिसकी संचयी बारम्बारता सटीक $\frac{N}{2}$ से बडी है। इस वर्ग–अन्तराल को माध्यक वर्ग कहिये।

चरण 4 : सूत्र, माध्यक = $l+\dfrac{\frac{N}{2}-C}{f}\times i$ द्वारा माध्यक ज्ञात कीजिए

जहाँ $l \rightarrow$ माध्यक वर्ग की निम्न सीमा

$N \rightarrow$ प्रेक्षणों की संख्या $N = \Sigma f_i$

$C \rightarrow$ माध्यक वर्ग से सटीक पहले वाले वर्ग की संचयी बारम्बारता

$f \rightarrow$ माध्यक वर्ग की बारम्बारता

$i \rightarrow$ माध्यक वर्ग का विस्तार

उदाहरण 17.4. नीचे 50 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों का बंटन दिया गया है, माध्यक ज्ञात कीजिए।

अंक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
छात्रों की संख्या	8	8	14	16	4

हल : दिये गये अन्तराल पहले से ही आरोही क्रम में हैं नीचे दी गयी सारणी में संचयी बारम्बारता, पंक्ति के संगत है।

अंक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
छात्रों की संख्या	8	8	14	16	4
संचयी बारम्बारता	8	16	30	46	50

$$N = 50,\ \frac{N}{2} = 25$$

संचयी बारंबारता के संगत वर्ग 20-30, सटीक 25 से बडा है

$\therefore$ माध्यक वर्ग 20-30 है।

जहाँ $l = 20$, $N = 50$, $C = 16$, $f = 14$, $i = 10$.

$$\therefore \quad \text{माध्यक} = l+\frac{\frac{N}{2}-C}{f}\times i = 20+\frac{25-16}{14}\times 10 = 20+\frac{9}{14}\times 10 = 20+6.43 = 26.43$$

उदाहरण 17.5. निम्नलिखित का माध्यक ज्ञात कीजिए :

अंक	छात्रों की संख्या
0 – 9	3
10 – 19	5
20 – 29	8
30 – 39	9
40 – 49	13
50 – 59	6

हल : दिये गये वर्ग अन्तराल समावेश शृंखला में हैं माध्यक ज्ञात करने से पहले हमें समावेशी शृंखला को सम्मिलित शृंखला में बदलते हैं।

एक समावेशी शृंखला को सम्मिलित शृंखला में बदलने की विधि :

(1) वर्ग की उच्च सीमा तथा क्रमागत अगले वर्ग की निम्न सीमा के अन्तर का आधा ज्ञात करते हैं।

(2) इस अन्तर के आधे को निम्न सीमा में से घटाते हैं तथा उच्च सीमा में जोड़ते हैं।

अंक		f.	c.f.
0-9	0.5-9.5	3	3
10-19	9.5-19.5	5	8
20-29	19.5-29.5	8	16
30-39	29.5-39.5	9	25
40-49	39.5-49.5	13	38
50-59	49.5-59.5	6	44

$$\frac{N}{2} = \frac{44}{2} = 22$$

$\therefore$ माध्यक वर्ग 29.5 – 39.5 है। इसकी c.f. 25 है जो कि 22 से सटीक बड़ी है।

अब, $l = 29.5$, N = 33, C = 16, f = 9, $i = 39.5 - 29.5 = 10$

$$\therefore \text{ माध्यक } = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times i = 29.5 + \frac{22-16}{9} \times 10$$

$$= 29.5 + \frac{6}{9} \times 10 = 29.5 + \frac{20}{3} = 29.5 + 6.66 = 36.16$$

देखें आपने कितना सीखा 17.2

निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए:

1.

x_i	6	11	16	21	26
f_i	5	3	6	4	7

2.

x_i	5	10	15	20	25
f_i	5	25	29	17	9

3.

अंक	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
बच्चों की संख्या	5	9	10	14	12

4.

आयु (वर्षों से)	17-21	21-26	26-31	31-36	36-41
बच्चों की संख्या	5	6	12	7	4

17.5 माध्यक के सापेक्ष माध्य विचलन

हम जानते हैं कि आँकड़ों के प्रेक्षण में केन्द्रीय प्रवृत्ति, हमें संगठित या सामूहिक आँकड़ों के मान देते हैं। यह भी जानना अतिआवश्यक है कि वास्तव में, केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप से और सभी प्रेक्षण कितने दूर हैं दूसरे शब्दों में, यह जानना आवश्यक है कि एक दिये गये बिन्दु

से प्रेक्षण कितने बिखरे हुए हैं (या केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप)। ज्यादातर स्थितियों में माध्य तथा माध्यक से माध्य विचलन हमें प्रेक्षणों का विचरण देता है। पुनःविचार कीजिए कि आंकड़ों के लिए माध्य विचलन, 'a' से विचरण के निरपेक्ष मान के माध्य से परिभाषित किया जाता है।

पुनः याद/विचार कीजिए कि स्थिर मान a से अन्तर $(x - a)$ प्रेक्षण x का प्रेक्षण a से विचलन कहलाता है।

इसलिए 'a' के सापेक्ष माध्य विचलन को M.D (a) से दर्शाया जाता है।

$$\text{M.D. (a)} = \frac{\text{'}a\text{' से विचलनों के निपरेक्ष मान का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$$

गणितीय रूप में हम लिख सकते हैं

$$\text{M.D.}(a) = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - a|}{n}$$

इस प्रकार
$$\text{M.D. (माध्य} = \overline{\text{X}}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$$

$$\text{M.D. (माध्यक} = \text{M}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \text{M}|$$

उदाहरण 17.6. प्रेक्षणों 7, 10, 15, 16, 8, 9, 5, 17, 14 के लिए माध्यक से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

हल : माध्यक का ज्ञात करने के लिए, दिये गये मानों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करते हैं, इसलिए हमें प्राप्त होता है

5, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 16, 17,

> माध्य/माध्यक से माध्य विचलन ज्ञात करने की विधि
>
> **चरण 1 :** आँकड़ों का माध्य अथवा माध्यक की गणना करें।
>
> **चरण 2 :** माध्य/माध्यक से प्रत्येक प्रेक्षण का विचलन ज्ञात करें।
>
> **चरण 3 :** विचलन का निरपेक्ष मान ज्ञात करें।
> निरपेक्ष मान, ऋण चिह्न हटाकर प्राप्त किया जाता है (यदि यह उसमें है)
>
> **चरण 4 :** विचलन के निरपेक्ष मान से माध्य की गणना करें। यह माध्य अभीष्ट माध्य विचलन होगा।

$n = 9$, माध्यक $= \frac{n+1}{2}$वाँ प्रेक्षण = 5वाँ प्रेक्षण, M = 10.

माध्यक 10, से प्रेक्षण के विचलन अर्थात्

	5–10	7–10	8–10	9–10	10–10	14–10	15–10	16–10	17–10	हैं।
i.e. x_i-M	–5	–3	–2	–1	0	4	5	6	7	हैं।
$\|x_i - \text{M}\|$	5	3	2	1	0	4	5	6	7	

$$\text{अब M.D. (M)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \text{M}|}{n} = \frac{5+3+2+1+0+4+5+6+7}{10} = \frac{33}{10} = 3.3.$$

17.5.1 वर्गीकृत आँकड़ों का माध्यक के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात करना

याद कीजिए कि निम्नलिखित रूप में निरूपित आँकड़े वर्गीकृत आँकड़े कहलाते हैं।

(a) असतत बारम्बारता बंटन

प्रेक्षण :	x_1	x_2	x_3	...	x_n
आवृतियाँ :	f_1	f_2	f_3	...	f_n

(b) संतत बारम्बारता विचरण :

प्रेक्षण	$l_1 - u_1$	$l_2 - u_2$	$l_3 - u_3$	...	$l_n - u_n$
बारम्बारता	f_1	f_2	f_3	...	f_n

उदाहरण के लिए, 50 छात्रों द्वारा प्राप्तांक

अंक	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
छात्रों की संख्या	8	6	12	10	10	4

अब हमें निम्नलिखित उदाहरण के द्वारा माध्यक के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात करना है।

उदाहरण 17.7. निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यक के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

x_i	25	20	15	10	5
f_i	7	4	6	3	5
c.f.	7	11	17	20	25

N = 25 तथा हम जानते हैं कि माध्यक $\frac{25+1}{2}$ = 13वाँ प्रेक्षण है। यह प्रेक्षण संचयी बारम्बारता 17 में स्थित हैं जिसका संगत प्रेक्षण 15 है।

$\therefore$ माध्यक M = 15

अब विचलन तथा उनके निरपेक्ष मान निम्नलिखित सारणी में दिये गये है :

x_i	f_i	$x_i - \text{M}$	$\lvert x_i - \text{M}\rvert$	$f_i\lvert x_i - \text{M}\rvert$
25	7	25 – 15 = 10	10	7 × 10 = 70
20	4	20 – 15 = 5	5	4 × 5 = 20
15	6	15 – 15 = 0	0	6 × 0 = 0
10	3	10 – 15 = – 5	5	3 × 5 = 15
5	5	5 – 15 = – 10	10	5 × 10 = 50
	$\text{N} = \Sigma f_i = 25$			$\Sigma f_i \lvert x_i - M\rvert = 155$

$$\therefore \quad \text{माध्य विचलन (M)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \lvert x_i - M \rvert}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{155}{25} = 6.2$$

उदाहरण 17.8. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्यक के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

ऊँचाई (सेमी. में)	95-105	105-115	115-125	125-135	135-145	145-155
लड़कियों की संख्या	9	15	23	30	13	10

हल : पहले माध्यक ज्ञात कीजिए

ऊँचाई (सेमी. में)	लड़कियों की संख्या (f)	संचयी बारम्बारता (c.f)
95-105	9	9
105-115	15	24
115-125	23	47
125-135	30	77
135-145	13	90
145-155	10	100

N = 100 $\Rightarrow \dfrac{N+1}{2} = \dfrac{101}{2} = 50.5$

$\dfrac{N}{2} = 50.5$ संचयी बारम्बारता 77 में स्थित है।

$\therefore$ माध्यक वर्ग संचयी बारम्बारता 77 के संगत है अर्थात् 125 – 135

अब माध्यक $= l + \dfrac{\dfrac{N}{2} - C}{f} \times i$

जहाँ l = माध्यक वर्ग की निम्न सीमा

N = बारम्बारताओं का योग

C = माध्यक वर्ग से सटीक पहले c.f. का वर्ग

f = माध्यक वर्ग की बारम्बारता

i = माध्यक वर्ग का विस्तार या वर्ग–साइज

यहाँ l = 125, N = 100, C = 47, f = 30, i = 10

$\therefore$ M = $125 + \dfrac{50-47}{30} \times 10 = 125 + \dfrac{3}{3} = 126$

निम्नलिखित रूप में दी गई सारणी से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

ऊँचाई (सेमी. में)	लड़कियों की संख्या (f)	ऊचाईयों का मध्यमान	निरपेक्ष विचलन $(x_i - M\|)$	$f_i\|x_i - M\|$
95-105	9	100	|100-126| = 26	9 × 26 = 234
105-115	15	110	|110-126| = 16	15 × 16 = 240
115-125	23	120	|120 – 126| = 6	23 × 6 = 138
125-135	30	130	|130-126| = 4	30 × 4 = 120
135-145	13	140	|140-126| = 14	13 × 14 = 182
145-155	10	150	|150-126| = 24	10 × 24 = 240
	Σf_i = 100			Σf_i |xi – M| = 1154

$\therefore$ माध्य विचलन (माध्यक) = M.D.(M) = $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i \,|\, x_i - M \,|}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \dfrac{1154}{100} = 11.54.$

17.5.2 माध्यक से सतत बारम्बारता बंटन का माध्य विचलन ज्ञात करने के चरण

चरण 1 : अंतरालों को आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए

चरण 2: संचयी बारम्बारता लिखिए

चरण 3 : उस वर्ग की जाँच कीजिए जिसकी संचयी बारम्बारता सटीक $\dfrac{N}{2}$ से बड़ी है जहाँ N प्रेक्षणों की संख्या है (अर्थात् सभी बारम्बारताओं का योग)

चरण 4 : माध्यक वर्ग के लिए संगत मान ज्ञात कीजिए तथा सूत्र में रखिए :

$$\text{माध्यक} = l + \dfrac{\dfrac{N}{2} - C}{f} \times i$$

जहाँ $l \rightarrow$ माध्यक वर्ग की निम्न सीमा

$N \rightarrow$ बारम्बारताओं का योग

$C \rightarrow$ माध्यक वर्ग से सटीक पहले, वर्ग की संचयी बारम्बारता

$f \rightarrow$ माध्यक वर्ग की बारम्बारता/आवृति

$i \rightarrow$ माध्यक वर्ग का विस्तार

चरण 5 : अब निम्नलिखित स्तम्भों के लिए सारणी बनाइए

दिये गये अन्तराल	बारम्बारता	मध्यमान x_i	माध्यक से निरपेक्ष विचलन $\|x_i - M)$	$f_i\|x_i - M\|$

चरण 6 : अब M.D.(M) = $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i \,|\, x_i - M \,|}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$ की गणना कीजिए

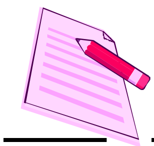
देखें आपने कितना सीखा 17.3

निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यक के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

1.

x_i	11	12	13	14	16	17	18
f_i	2	3	2	3	1	2	1

मॉड्यूल - V
सांख्यिकी एवं प्रायिकता



टिप्पणी

2.

x_i	3	6	7	9	11	13
f_i	3	9	11	8	9	6

3.

वजन/भार (किग्रा. में)	40-42	42-44	44-46	46-48	48-50
छात्रों की संख्या	9	13	24	28	6

4.

आय (रुपयों में)	1200	1300	1400	1500	1600	1800	2000
कर्मचारियों की संख्या	4	6	15	12	7	4	2

5.

आयु (वर्षों में)	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5
पोलियो ड्राप पीने वाले बच्चों की संख्या	100	155	210	315	65

17.6 यथाप्राप्त आंकड़ों का प्रसरण और मानक विचलन

यदि n प्रेक्षण $x_1, x_2 ...., x_n$ तब

प्रसरण $$\left(\sigma^2\right) = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + ... + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

या $$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}; \text{ जबकि } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

σ द्वारा दर्शाया गया मानक विचलन σ^2 का धनात्मक वर्गमूल है। इस प्रकार

$$\sigma = +\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

प्रसरण को परिकलित करने के लिए निम्नलिखित चरणों का अनुसरण किया जाता है।

हम यह मानकर चलते हैं कि माध्य को पहले ही परिकलित किया जा चुका है।

चरण 1: माध्य से विचलनों का एक कॉलम बनाएं यानी $x_i - \bar{x}$

चरण 2: (जांच) माध्य से विचलनों का योग शून्य होना चाहिए अर्थात् $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$

चरण 3: प्रत्येक विचलन का वर्ग कीजिए और $(x_i - \bar{x})^2$ शीर्षक वाले कॉलम में इसे लिखें।

चरण 4: चरण 3 के कॉलम (स्तंभ) का योग ज्ञात कीजिए।

चरण 5: चरण 4 में प्राप्त योग को प्रेक्षणों की संख्या से विभाजित करने पर हमें σ^2 प्राप्त होता है।

चरण 6: σ^2 का धनात्मक वर्गमूल लेने पर हमें मानक विचलन σ प्राप्त होता है।

उदाहरण 17.9. किसी दुकान में प्रतिदिन हुई चीनी की बिक्री नीचे दी गई है :

सोमवार	मंगलवार	बुधवार	बृहस्पतिवार	शुक्रवार	शनिवार
75 किग्राम	120 किग्राम	12 किग्राम	50 किग्राम	70.5 किग्राम	140.5 किग्राम

प्रतिदिन की औसत बिक्री 78 किलोग्राम है। उपरोक्त आंकड़ों के लिए प्रसरण और मानक विचलन परिकलित कीजिए।

हल : $\bar{x} = 78$ किलोग्राम (दिया है)

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
75	-3	9
120	42	1764
12	-66	4356
50	-28	784
70.5	-7.5	56.25
140.5	62.5	3906.25
	0	10875.50

इस प्रकार $\qquad \sigma^2 = \dfrac{\sum\limits_{i=1}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \dfrac{10875.50}{6} = 1812.58$ (लगभग)

और $\qquad \sigma = 42.57$ (लगभग)

उदाहरण 17.10 अंग्रेजी की परीक्षा में सेक्शन A के 10 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक नीचे दिए गए हैं:

7 10 12 13 15 20 21 28 29 35

प्रसरण और मानक विचलन परिकलित कीजिए।

हल : यहां $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{10} = \dfrac{190}{10} = 19$

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
7	-12	144
10	-9	81
12	-7	49
13	-6	36
15	-4	16
20	$+1$	1
21	$+2$	4
28	$+9$	81
29	$+10$	100
35	$+16$	256
	0	768

अतः $\qquad \sigma^2 = \dfrac{768}{10} = 76.8$, और $\sigma = +\sqrt{76.8} = 8.76$ (लगभग)

देखें आपने कितना सीखा 17.4

1. एक कारखाने के 10 कर्मचारियों की प्रतिदिन की आय है :

   50 60 65 70 80 45 75 90 95 100

   प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

2. अंग्रेजी की परीक्षा में कक्षा X के 10 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक नीचे दिए गए है:

   9 10 15 16 18 20 25 30 32 35

   प्रसरण और मानक विचलन का परिकलन कीजिए।

3. एक शहर में महीने के प्रथम दस दिनों के लिए सापेक्ष आद्रता के आंकड़े नीचे दिए गए हैं :

   90 97 92 95 93 95 85 83 85 75

   उपर्युक्त आंकड़ों के लिए प्रसरण और मानक विचलन परिकलित कीजिए।

4. दिए गए आंकड़ों के लिए मानक विचलन ज्ञात कीजिए :

   4 6 8 10 12 14 16

5. निम्नलिखित आंकड़ों के लिए प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात कीजिए :

   4 7 9 10 11 13 16

6. निम्नलिखित आंकड़ों के लिए मानक विचलन ज्ञात कीजिए :

   40 40 40 60 65 65 70 70 75 75 75 80 85 90 90 100

17.7 यथाप्राप्त आंकड़ों का मानक विचलन और प्रसरण-वैकल्पिक विधि

यदि $\overline{x}$ दशमलव में हो तो $\overline{x}$ से अन्य अवयवों का विचलन लेना और प्रत्येक विचलन का वर्ग करना और अधिक दशमलव आने के कारण कठिन हो जाता है। हम σ^2 ज्ञात करने के लिए नीचे एक अन्य सूत्र देते हैं जिसमें $\overline{x}$ ज्ञात करने को छोड़ा जा सकता है।

हम जानते हैं
$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\overline{x})^2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \frac{2\overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \overline{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \overline{x}^2 \qquad \left(\because \overline{x} = \frac{\sum x_i}{n}\right)$$

अर्थात,
$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}{n}$$

और
$$\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$$

अतः इस विधि से σ^2 व σ की गणना के निम्न चरण हैं :

चरण 1: प्रेक्षणों के वर्गों का स्तम्भ बनायें अर्थात् x_i^2

चरण 2: $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ प्राप्त करें

चरण 3: उपरोक्त सूत्र में $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ तथा $\sum_{i=1}^{n} x_i$ के मान रखने पर हमें σ^2 प्राप्त होगा।

चरण 4: σ^2 का धनात्मक वर्गमूल लेने पर σ प्राप्त हो जाता है।

उदाहरण 17.11. इस पाठ का उदाहरण 17.10 लीजिए और उपरोक्त विधि से प्रसरण और मानक विचलन पुनः परिकलित कीजिए।

हल :

x_i	x_i^2
7	49
10	100
12	144
13	169
15	225
20	400
21	441
28	784
29	841
35	1225
190	4378

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}{n} = \frac{4378 - \frac{(190)^2}{10}}{10}$$

$$= \frac{4378 - 3610}{10} = \frac{768}{10} = 76.8$$

और $\sigma = +\sqrt{76.8} = 8.76$ (लगभग)

हमें प्रत्येक विधि द्वारा σ^2 और σ का वही मान प्राप्त होता है।

17.8 वर्गीकृत आंकड़ों का मानक विचलन और प्रसरण विधि (I)

हमें k वर्ग और उनके संगत बारंबारताएं दी गई हैं। हम वर्गीकृत आंकड़ों के प्रसरण और मानक विचलन को क्रमशः σ_g^2 और σ_g द्वारा व्यक्त करेंगे। सूत्र नीचे दिया गया है :

$$\sigma_g^2 = \frac{\sum_{i=1}^{K}\left[f_i (x_i - \bar{x})^2 \right]}{N}, \qquad N = \sum_{i=1}^{K} f_i$$

और $$\sigma_g = +\sqrt{\sigma_g^2}$$

$\sigma_g{}^2$ और σ_g परिकलित करने के लिए निम्नलिखित चरण प्रयोग किए जाते हैं। यह माना गया है कि माध्य को पहले से ही परिकलित किया जा चुका है।

चरण 1: दिए हुए वर्गों के लिए वर्ग अंकों का एक स्तंभ (कॉलम) बनाइये, x_1 से नामांकित कीजिए।

चरण 2: माध्य से वर्ग अंकों के विचलनों के लिए एक स्तम्भ (कॉलम) बनाएँ तथा $x_i - \bar{x}$ से नामांकित कीजिए। वास्तव में इन विचलनों का योग शून्य होना आवश्यक नहीं है, क्योंकि x_1 मूल प्रेक्षण नहीं है।

चरण 3: चरण (2) में प्राप्त विचलनों के वर्गों का एक स्तंभ (कॉलम) बनाइये अर्थात $(x_i - \bar{x})^2$ तथा इसे स्तंभ $(x_i - \bar{x})^2$ में लिखिए।

चरण 4: चरण (3) में प्रत्येक प्रविष्टि को संगत बारंबारता से गुणा करके हम $f_i (x_i - \bar{x})^2$ प्राप्त करते हैं।

चरण 5: चरण (4) में स्तंभ (कॉलम) का योग ज्ञात कीजिए । हम $\sum_{i=1}^{k}\left[f_i (x_i - \bar{x})^2 \right]$ प्राप्त करते हैं।

चरण 6: चरण (5) में प्राप्त योग को N (बारंबारता की कुल संख्या) से विभाजित करें। हम $\sigma_g{}^2$ प्राप्त करते हैं।

चरण 7: $\sigma_g = +\sqrt{\sigma_g^2}$

उदाहरण 17.12. गेहूं की एक नई किस्म के प्रभाव की जांच के अध्ययन में, 50 प्रयोगिक खेतों के लिए एक प्रयोग किया गया और निम्नलिखित परिणाम प्राप्त हुए :

प्रति हेक्टेयर उत्पादन (क्विटल में)	खेतों की संख्या
31 – 35	2
36 – 40	3
41 – 45	8
46 – 50	12
51 – 55	16
56 – 60	5
61 – 65	2
66 – 70	2

प्रति हैक्टेयर माध्य उत्पादन 50 क्विंटल है। उपरोक्त वितरण के लिए प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

हल :

प्रति हेक्टेयर उत्पादन (क्विंटल में)	खेतों की संख्या	वर्ग चिन्ह	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
31 – 35	2	33	– 17	289	578
36 – 40	3	38	– 12	144	432
41 – 45	8	43	– 7	49	392
46 – 50	12	48	– 2	4	48
51 – 55	16	53	+3	9	144
56 – 60	5	58	+8	64	320
61 – 65	2	63	+13	169	338
66 – 70	2	68	+18	324	648
योग	50				2900

इस प्रकार $\sigma_g^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left[f_i(x_i - \bar{x})^2\right]}{N} = \dfrac{2900}{50} = 58$ और $\sigma_g = +\sqrt{58} = 7.61$ (लगभग)

17.9 वर्गीकृत आंकड़ों का मानक विचलन और प्रसरण विधि (II)

यदि $\bar{x}$ का मान न दिया गया हो और या $\bar{x}$ का मान दशमलव भिन्न हो तो उस स्थिति में गणना बहुत कठिन हो जाती है। तब हम $\sigma_g{}^2$ की गणना के लिए एक अन्य सूत्र का उपयोग करते हैं जो निम्न है:

$$\sigma_g^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left[f_i x_i^2\right] - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{k}[f_i x_i]\right)^2}{N}}{N}, \qquad N = \sum_{i=1}^{k} f_i$$

और $$\sigma_g = +\sqrt{\sigma_g^2}$$

और इस प्रकार इस विधि द्वारा $\sigma_g{}^2$ और σ_g के परिकलन में निम्नलिखित चरण प्रयोग में लाए जाते हैं।

चरण 1: दिए हुए वर्ग के अंकों का एक स्तंभ बनाइये, x_1 से नामांकित कीजिए।

चरण 2: प्रत्येक वर्ग अंक का संगत बारंबारता के साथ गुणनफलन ज्ञात कीजिए। f_1x_1 शीर्षक से गुणनफल स्तंभ (कॉलम) में लिखिए।

चरण 3: चरण (2) में प्राप्त प्रविष्टि जोड़ें। हम $\sum_{i=1}^{k}(f_i x_i)$ प्राप्त करते हैं।

चरण 4: वर्ग अंकों के वर्ग के लिए एक स्तम्भ (कॉलम) बनाइये, x_i^2 से नामांकित कीजिए।

चरण 5: चरण (4) में प्रत्येक प्रविष्टि का संगत बारंबारता के साथ गुणनफल ज्ञात कीजिए। हम $f_i x_i^{\,2}$ प्राप्त करते हैं।

चरण 6: चरण (5) में प्राप्त प्रविष्टियों का योग कीजिए। हम $\sum_{i=1}^{k}\left(f_i x_i^2\right)$ प्राप्त करते हैं।

चरण 7: $\sum_{i=1}^{k}\left(f_i x_i^2\right)$, N और $\left(\sum_{i=1}^{k}\left(f_i x_i\right)\right)$ के मान सूत्र में प्रतिस्थापित कीजिए और $\sigma_g^{\,2}$ प्राप्त कीजिए।

चरण 8: $\sigma_g = +\sqrt{\sigma_g^2}$.

उदाहरण 17.13. उदाहरण 17.12 के लिए प्रसरण और मानक विचलन उपरोक्त विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।

हल :

उत्पादन प्रति हैक्टेअर (क्विन्टल में)	f_i	x_i	$f_i x_i$	$x_i^{\,2}$	$f_i x_i^{\,2}$
31 – 35	2	33	66	1089	2178
36 – 40	3	38	114	1444	4332
41 – 45	8	43	344	1849	14792
46 – 50	12	48	576	2304	27648
51 – 55	16	53	848	2809	44944
56 – 60	5	58	290	3364	16820
61 – 65	2	63	126	3969	7938
66 – 77	2	68	136	4624	9248
योग	50		2500		127900

सूत्र में $\sum_{i=1}^{k}\left(f_i x_i^2\right)$, N और $\sum_{i=1}^{k}\left(f_i x_i\right)$ के मानों का प्रतिस्थापन करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\sigma_g^2 = \frac{127900 - \dfrac{(2500)^2}{50}}{50} = \frac{2900}{50} = 58 \text{ और } \sigma_g = +\sqrt{58} = 7.61 \text{ (लगभग)}$$

पुनः हम पाते हैं कि प्रत्येक विधि से हल करने पर हमें $\sigma_g^{\,2}$ मान वहीं प्राप्त होता है।

देखें आपने कितना सीखा 17.5

1. रोगियों के एक समूह पर एक दवाई के प्रभाव का अध्ययन करने में निम्नलिखित परिणाम प्राप्त हुए :

राहत का प्रतिशत %	0 – 20	20 – 40	40 – 60	60 – 80	80 – 100
रोगियों की संख्या	10	10	25	15	40

2. एक शहर में पहले बच्चे के जन्म पर माताओं की आयु का अध्ययन करने पर निम्नलिखित आंकड़े उपलब्ध थे :

पहले बच्चे के जन्म पर आयु (वर्षों में)	18 – 20	20 – 22	22 – 24	24 – 26	26 – 28	28 – 30	30 – 32
माताओं की संख्या	130	110	80	74	50	40	16

प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

3. 30 कर्मचारियों का दैनिक वेतन नीचे दिया गया है:

दैनिक वेतन (रुपए में)	0 – 50	50 – 100	100 – 150	150 – 200	200 – 250	250 – 300
कर्मचारियों की संख्या	3	4	5	7	8	3

उपरोक्त आंकड़ों के लिए मानक विचलन और प्रसारण ज्ञात कीजिए।

17.10 विचलन और प्रसरण पद विचलन विधि

उदाहरण 17.12 में हमने देखा कि परिकलन बहुत ही जटिल थे। परिकलनों को सरल बनाने के लिए हम एक अन्य विधि का प्रयोग करेंगे जो पद विचलन विधि कहलाती है। चूंकि अधिकांश बारंबारता बंटनों जिन पर हम विचार करेगें उनके वर्ग बराबर हैं। आइए वर्ग माप (class size) को h द्वारा दर्शाएं। अब हम यादृच्छिक चुने गए a से प्रत्येक वर्ग चिन्ह (class-mark) का न केवल विचलन लें, परन्तु प्रत्येक विचलनको h से विभाजित भी करें।

माना $$u_i = \frac{x_i - a}{h} \qquad .....(1)$$

तब $$x_i = hu_i + a \qquad .....(2)$$

हम जानते हैं कि $$\bar{x} = h\bar{u} + a \qquad .....(3)$$

(2) से (3) को घटाने पर हम प्राप्त करते हैं

$$x_i - \bar{x} = h(u_i - \bar{u}) \qquad .....(4)$$

(4) में दोनों तरफ का वर्ग करने पर f_1 से गुणा कीजिए और k योग प्राप्त कीजिए। हम प्राप्त करते हैं:

$$\sum_{i=1}^{k}\left[f_i(x_i - \bar{x})^2\right] = h^2\sum_{i=1}^{k}\left[f_i(u_i - \bar{u})^2\right] \qquad .....(5)$$

समीकरण (5) में दोनों तरफ को N से भाग दें। हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}\left[f_i(x_i - \bar{x})^2\right]}{N} = \frac{h^2}{N}\sum_{i=1}^{k}\left[f_i(u_i - \bar{u})^2\right]$$

अर्थात् $$\sigma_x^2 = h^2\sigma_u^2 \qquad .....(6)$$

जहां $\sigma_g{}^2$ मूल आंकड़ों का प्रसरण है और $\sigma_u{}^2$ कोडित आंकड़ों का प्रसरण या कोडित प्रसरण है। $\sigma_u{}^2$ का मान उस सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है जिसमें माध्य आता है अर्थात

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\left[f_i\,(u_i - \bar{u})^2\right], \qquad N = \sum_{i=1}^{k} f_i \qquad .....(7)$$

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left[f_i u_i^2\right] - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k}[f_i u_i]\right)^2}{N}}{N}, \qquad N = \sum_{i=1}^{k} f_i \qquad .....(8)$$

उदाहरण 17.14. हम फिर से उदाहरण 17.12 को लेते हैं और कोडित (coded) प्रसरण का प्रयोग करते हुए प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात करते हैं।

हल : यहां $h = 5$ और माना $a = 48$.

पैदावार प्रति हैक्टेयर (क्विंटल में)	खेतों की संख्या f_i	वर्ग चिन्ह x_i	$u_i = \frac{x_i - 48}{5}$	$f_i u_i$	u_i^2	$f_i u_i^2$
31 – 35	2	33	–3	–6	9	18
36 – 40	3	38	–2	–6	4	12
41 – 45	8	43	–1	–8	1	8
46 – 50	12	48	0	0	0	0
51 – 55	16	53	+1	16	1	16
56 – 60	5	58	+2	10	4	20
61 – 65	2	63	+3	6	9	18
66 – 70	2	68	+4	8	16	32
योग	50			20		124

अतः
$$\sigma_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i u_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} f_i u_i\right)^2}{N}}{N} = \frac{124 - \frac{(20)^2}{50}}{50} = \frac{124 - 8}{50} = \frac{58}{25}$$

मूल आकड़ों का प्रसरण $\sigma_x^2 = h^2\sigma_u^2 = 25 \times \frac{58}{25} = 58$ और $\sigma_x = +\sqrt{58} = 7.61$ (लगभग)

हम वास्तव में वही प्रसरण प्राप्त करते हैं और इस प्रकार पहले जैसा मानक विचलन भी।

उदाहरण 17.15. 230 व्यक्तियों के वेतन को दिखाने वाले निम्नलिखित बंटन के लिए मानक विचलन ज्ञात कीजिए :

वेतन (रुपयों में)	व्यक्तियों की संख्या	वेतन (रुपयों में)	व्यक्तियों की संख्या
70 – 80	12	110 – 120	50
80 – 90	18	120 – 130	45
90 – 100	35	130 – 140	20
100 – 110	42	140 – 150	8

हल :

वेतन (रुपये में)	व्यक्तियों की संख्या f_i	वर्ग चिन्ह x_i	$u_i = \frac{x_i - 105}{10}$	${u_i}^2$	$f_i u_i$	$f_i {u_i}^2$
70 – 80	12	75	–3	9	–36	108
80 – 90	18	85	–2	4	–36	72
90 – 100	35	95	–1	1	–35	35
100 – 110	42	105	0	0	0	0
110 – 120	50	115	+1	1	50	50
120 – 130	45	125	+2	4	90	180
130 – 140	20	135	+3	9	60	180
140 – 150	8	145	+4	16	32	128
योग	230				125	753

$$\sigma^2 = h^2\left[\frac{1}{N}\sum\left[f_i u_i^2\right] - \left(\frac{1}{N}\sum\left[f_i u_i\right]\right)^2\right]$$

$$= 100\left[\frac{753}{230} - \left(\frac{125}{230}\right)^2\right] = 100\,(3.27 - 0.29) = 298$$

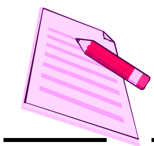
इसलिए मानक विचलन $\qquad \sigma = +\sqrt{298} = 17.3$ (लगभग)

देखें आपने कितना सीखा 17.6

1. नीचे दिए गए आंकड़े एक आटा मिल के 400 कर्मचारियों की साप्ताहिक आय को दर्शाते हैं:

साप्ताहिक आय (रुपयों में)	कर्मचारियों की संख्या
80 – 100	16
100 – 120	20
120 – 140	25
140 – 160	40
160 – 180	80
180 – 200	65
200 – 220	60
220 – 240	35
240 – 260	30
260 – 280	20
280 – 300	9

पद विचलन विधि का प्रयोग करते हुए प्रसरण और मानक विचलन परिकलित कीजिए।



टिप्पणी

2. एक शहर के एक स्कूल में काम करने वाले अध्यापकों की आयु के आंकड़े नीचे दिए गए हैं:

आयु (वर्षों में)	20–25	25–30	30–35	35–40
अध्यापकों की संख्या	25	110	75	120
आयु (वर्षों में)	40–45	45–50	50–55	55–60
अध्यापकों की संख्या	100	90	50	30

पद विचलन विधि का प्रयोग करते हुए प्रसरण और मानक विचलन परिकलित कीजिए।

3. निम्नलिखित आंकड़ों के लिए पद विचलन विधि का प्रयोग करते हुए प्रसरण और मानक विचलन परिकलित कीजिए :

आयु (वर्षों में)	25–30	30–35	35–40
व्यक्तियों की संख्या	70	51	47
आयु (वर्षों में)	40 –50	45–50	50–55
व्यक्तियों की संख्या	31	29	22

17.11 प्रसरण और मानक विचलन के गुण

गुण I: प्रसरण मूल बिन्दु के परिवर्तन से स्वतन्त्र है।

इस गुण को सत्यापित करने के लिए हम नीचे दिए गए उदाहरण को लेते हैं।

उदाहरण 17.16. एक विशेष परीक्षा में 10 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक निम्नलिखित हैं:

10 12 15 12 16 20 13 17 15 10

बाद में यह निश्चित किया गया कि प्रत्येक विद्यार्थी को 5 अतिरिक्त अंक प्रदान किए जाएगें। इन दोनों स्थितियों में प्रसरण और मानक विचलन की तुलना करो।

हल : स्थिति-I

x_i	f_i	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
10	2	20	–4	16	32
12	2	24	–2	4	8
13	1	13	–1	1	1
15	2	30	1	1	2
16	1	16	2	4	4
17	1	17	3	9	9
20	1	20	6	36	36
योग	10	140			92

यहां $$\bar{x} = \frac{140}{10} = 14$$

$$\text{प्रसरण} = \frac{\sum\left[f_i(x_i - \bar{x})^2\right]}{10} = \frac{92}{10} = 9.2$$

$$\text{मानक विचलन} = +\sqrt{9.2} = 3.03$$

स्थिति II : (प्रत्येक x_1 में 5 अंक जोड़ने पर)

x_i	f_i	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
15	2	30	−4	16	32
17	2	34	−2	4	8
18	1	18	−1	1	1
20	2	40	1	1	2
21	1	21	2	4	4
22	1	22	3	9	9
25	1	25	6	36	36
योग	10	190			92

$$\bar{x} = \frac{190}{10} = 19$$

$\therefore$
$$\text{प्रसरण} = \frac{92}{10} = 9.2$$

$$\text{मानक विचलन} = +\sqrt{9.2} = 3.03$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि यदि मूल बिन्दु को परिवर्तित कर दिया जाए तो दिए गए आंकड़ों के लिए प्रसरण और मानक विचलन में कोई परिवर्तन नहीं होता अर्थात यदि कोई स्थिरांक प्रक्षेणों में जोड़ दिया जाए तो प्रसरण और मानक विचलन में कोई अन्तर नहीं आता।

गुण II : प्रसरण पैमाने के परिवर्तन से स्वतन्त्र नहीं है।

उदाहरण 17.17. उपरोक्त उदाहरण में यदि प्रत्येक प्रेक्षण को 2 से गुणा कर दिया जा, तब प्रसरण और मानक विचलन में होने वाले परिवर्तन की विवेचना कीजिए।

हल : उपरोक्त स्थिति (1) में हमने देखा

प्रसरण $= 9.2$

मानक विचलन $= 3.03$

अब हम प्रसरण और मानक विचलन परिकलित करते हैं, जब प्रत्येक प्रेक्षण को 2 से गुणा किया जाए।

x_i	f_i	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
20	2	40	−8	64	128
24	2	48	−4	16	32
26	1	26	−2	4	4
30	2	60	2	4	8
32	1	32	4	16	16
34	1	34	6	36	36
40	1	40	12	144	144
	10	280			368

$$\bar{x} = \frac{280}{10} = 28$$

$$\text{प्रसारण} = \frac{368}{10} = 36.8$$

$$\text{मानक विचलन} = +\sqrt{36.8} = 6.06$$

यहां हम देखते हैं कि प्रसरण-वास्तविक प्रसरण का चार गुना होता है। परिणामस्वरूप मानक विचलन वास्तविक मानक विचलन का दुगुना होता है।

इसी प्रकार हम यह सत्यापित कर सकते हैं कि यदि प्रत्येक प्रेक्षण को किसी स्थिरांक से विभाजित किया जाए तब नए प्रेक्षण का प्रसरण उसी स्थिरांक के वर्ग से विभाजित हो जाता है। परिणामस्वरूप नए प्रेक्षण का मानक विचलन उसी स्थिरांक से विभाजित हो जाता है।

गुण III : सिद्ध कीजिए कि मानक विचलन न्यूनतम संभव माध्य वर्ग विचलन का वर्गमूल होता है।

हल: माना $\bar{x} - a = d$

परिभाषा से हमें प्राप्त हुआ

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum\left[f_i(x_i - a)^2\right] = \frac{1}{N}\sum\left[f_i(x_i - \bar{x} + \bar{x} - a)^2\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum f_i\left[(x_i - \bar{x})^2 + 2(x_i - \bar{x})(\bar{x} - a) + (\bar{x} - a)^2\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum f_i(x_i - \bar{x})^2 + \frac{2}{N}(\bar{x} - a)\sum f_i(x_i - \bar{x}) + \frac{(\bar{x} - a)^2}{N}\sum f_i$$

$$= \sigma^2 + 0 + d^2$$

($\because$ माध्य से विचलनों का बीजीय योग शून्य होता है)

या $$s^2 = \sigma^2 + d^2$$

स्पष्टत: S^2 न्यूनतम होगा जब d=0अर्थात $a = \bar{x}$ अत: माध्यवर्ग विचलन का वर्गमूल (root mean square Deviation) न्यूनतम होता है जब विचलनों की माप माध्य से की जाती है अर्थात् मानक विचलन माध्य वर्ग विचलन का वर्गमूल होता है।

गुण IV : दो (n_1 और n_2 संख्याओं वाले) समुच्चयों का उनके माध्य क्रमश: m_1 और m_2 से मापा गया। मानक विचलन σ_1 और σ_2 है।यदि दानों समुच्चयों को इकट्ठा कियाजाए अर्थात् $(n_1 + n_2)$ संख्याएं हों तो माध्य m से मापा गया मानक विचलन σ, निम्न द्वारा प्राप्त होता है :

$$\sigma^2 = \frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2}{n_1 + n_2} + \frac{n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}(m_1 - m_2)^2$$

उदाहरण 17.18. दो प्रतिदर्शों के मापों 50 और 100 के माध्य क्रमश: 54.1 और 50.3 हैं तथा मानक विचलन 8 और 7 हैं। दोनों प्रतिदर्शों को इकट्ठा करने पर 150 माप वाले प्रतिदर्श का मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

हल : यहां हमें दिया है

$$n_1 = 50, n_2 = 100, m_1 = 54.1, m_2 = 50.3$$

$$\sigma_1 = 8 \text{ और } \sigma_2 = 7$$

$$\sigma^2 = \frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2}{(n_1 + n_2)} + \frac{n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}(m_1 - m_2)^2$$

$$= \frac{(50 \times 64) + (100 \times 49)}{150} + \frac{50 \times 100}{(150)^2}(54.1 - 50.3)^2$$

$$= \frac{3200 + 4900}{150} + \frac{2}{9}(3.8)^2 = 57.21$$

इसलिए $\sigma = 7.56$ (लगभग)

उदाहरण 17.19. समान्तर श्रेढ़ी $a, a + d, a + 2\,d, \ldots\ldots, a + 2n.d$ के माध्य से माध्य विचलन और मानक विचलन ज्ञात कीजिए और यह सिद्ध कीजिए कि बाद वाला पहले से बड़ा है।

हल : समान्तर श्रेढ़ी में पदों की संख्या $(2n + 1)$ है।

$\therefore \qquad \bar{x} = a + nd$

माध्य से माध्य विचलन $= \dfrac{1}{(2n+1)}\displaystyle\sum_{r=0}^{2n}\left|(a + rd) - (a + nd)\right|$

$$= \frac{1}{(2n+1)}.2\left[nd + (n-1)d + \ldots\ldots + d\right]$$

$$= \frac{2}{(2n+1)}\left[1 + 2 + \ldots.. + (n-1) + n\right]d$$

$$= \frac{2n(n+1)}{(2n+1)2}.d = \frac{n(n+1)d}{(2n+1)} \qquad \ldots..(1)$$

अब $\sigma^2 = \dfrac{1}{(2n+1)}\displaystyle\sum_{r=0}^{2n}\left[(a + rd) - (a + nd)\right]^2$

$$= \frac{2d^2}{(2n+1)}\left[n^2 + (n-1)^2 + \ldots. + 2^2 + 1^2\right]$$

$$= \frac{2d^2}{(2n+1)} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)d^2}{3}$$

इसलिए $\sigma = d.\sqrt{\left(\dfrac{n(n+1)}{3}\right)} \qquad \ldots..(2)$

हमें प्राप्त है $(2) > (1)$

यदि $d\sqrt{\left(\dfrac{n(n+1)}{3}\right)} > \dfrac{n(n+1)}{(2n+1)}d$

या यदि $(2n+1)^2 > 3n(n+1)$

या यदि $n^2 + n + 1 > 0$, जो कि $n > 0$ के लिए सत्य है।

यही परिणाम है।

उदाहरण 17.20. हमें यह दिखाना है कि किसी विविक्त बंटन के लिए मानक विचलन, माध्य से माध्य विचलन से कम नहीं होता।

हल : हमें दिखाना है कि

मानक विचलन $\geq$ माध्य से माध्य विचलन

या (मानक विचलन)^2 $\geq$ (माध्य से माध्य विचलन)^2

अर्थात् $$\frac{1}{N}\sum\left[f_i(x_i-\bar{x})^2\right] \geq \left[\frac{1}{N}\sum\left[f_i\,|(x_i-\bar{x})|\right]\right]^2$$

या $$\frac{1}{N}\sum\left[f_i d_i^2\right] \geq \left[\frac{1}{N}\sum\left[f_i\,|d_i|\right]\right]^2, \text{ यहाँ } d_i = x_i - \bar{x}$$

या $$N\sum\left(f_i d_i^2\right) \geq \left[\sum\{f_i\,|d_i|\}\right]^2$$

या $$(f_1+f_2+....)\left(f_1 d_1^2 + f_2 d_2^2 + ...\right) \geq \left[f_1\,|d_1| + f_2\,|d_2| + ...\right]^2$$

या $$f_1 f_2\left(d_1^2 + d_2^2\right) + ... \geq 2f_1 f_2\, d_1 d_2 + ...$$

या $$f_1 f_2\,(d_1 - d_2)^2 + ... \geq 0$$

जो कि पूर्ण वर्ग होने के कारण सत्य है।

17.12 दो समान माध्य वाले बारम्बारता बंटनों का विश्लेषण

दो श्रृंखलाओं की विचरणता की तुलना तभी की जा सकती है जब विचरण की माप निरपेक्ष तथा इकाई से स्वतंत्र होती है। इसके लिए विचरण गुणांक (C.V.) प्राप्त करते हैं जिसे निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित किया गया है :

$$\text{विचरण गुणांक (C.V.)} = \frac{\sigma}{\bar{x}}\times 100,\ \bar{x}\neq 0$$

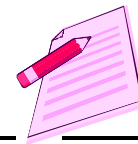
जहाँ σ तथा $\bar{x}$ क्रमशः आँकड़ों के मानक विचलन तथा माध्य हैं। दो श्रृंखलाओं की विचरणता जानने के लिए उनके विचरण गुणांक की तुलना की जाती है। श्रृंखला में, बड़े विचरण गुणांक वाली श्रृंखला को दूसरी से अधिक विचरण या बिखराव वाली श्रृंखला कहते हैं। कम विचरण गुणांक वाली श्रृंखला को दूसरे से अधिक संगत कहते हैं।

समान माध्य वाली श्रृंखलाओं के लिए, हम प्राप्त कर सकते हैं

$$\text{विचरण गुणांक (C.V.) (पहला बंटन)} = \frac{\sigma_1}{\bar{x}}\times 100 \qquad ...(1)$$

$$\text{विचरण गुणांक (C.V.) (दूसरा बंटन)} = \frac{\sigma_2}{\bar{x}}\times 100 \qquad ...(2)$$

जहाँ σ_1, σ_2 क्रमशः पहले और दूसरे बंटन के मानक विचलन, $\bar{x}$ बंटनों का समान माध्य है।



(1) और (2) से हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि दो विचरण गुणांकों की तुलना केवल σ_1 तथा σ_2 के मानों के आधार पर कर सकते हैं।

उदाहरण 17.21. दो बंटनों के मानक विचलन 21 तथा 14 है और उनका समान माध्य 35 है कौन से बंटन का अधिक विचरण होगा?

हल : मान लीजिए σ_1 = पहली श्रृंखला का मानक विचलन = 21

σ_2 = दूसरी श्रृंखला का मानक विचलन = 14

$$\bar{x} = 35$$

$$\text{C.V. (श्रृंखला I)} = \frac{\sigma_1}{\bar{x}} \times 100 = \frac{21}{35} \times 100 = 60$$

$$\text{C.V. (श्रृंखला II)} = \frac{\sigma_1}{\bar{x}} \times 100 = \frac{14}{35} \times 100 = 40$$

श्रृंखला I की C.V. > श्रृंखला II की C.V.

$\Rightarrow$ मानक विचलन = 21, वाली श्रृंखला का अधिक विचरण है।

उदाहरण 17.22. दो कारखानों A तथा B के कर्मचारियों को दिए गए मासिक वेतन तथा अन्य आंकड़े नीचे दिये गये हैं :

	कारखाना A	**कारखाना B**
मासिक वेतनों का माध्य	₹ 15550	₹ 15550
वेतनों के बंटनों का प्रसरण	100	121

व्यक्तिगत वेतन में किस कारखाने (A या B) में अधिक विचरण है?

हल : दिया है

$$\sigma_A = \sqrt{\text{प्रसरण}} = \sqrt{100} = 10$$

$$\sigma_B = \sqrt{\text{प्रसरण}} = \sqrt{121} = 11$$

$$\bar{x} = ₹\ 15550$$

अब, $$\text{C.V. (A)} = \frac{\sigma_A}{\bar{x}} \times 100 = \frac{10}{15550} \times 100 = 0.064$$

$$\text{C.V.(B)} = \frac{\sigma_B}{\bar{x}} \times 100 = \frac{11}{15550} \times 100 = 0.07$$

वास्तव में C.V. (B) > C.V.(A)

अतः कारखाने B में व्यक्तिगत वेतनों में अधिक विचरण है।

उदाहरण 17.23. नीचे दी गयीं श्रृंखला X और Y में कौन अधिक संगत है?

X	58	52	50	51	49	35	54	52	53	56
Y	101	104	103	104	107	106	105	105	107	108

हल : दिये गये आँकड़ों से हम निम्नलिखित सारणी प्राप्त करते हैं :

X	Y	$D_i = X - \bar{X}$	D_i^2	$d_i = Y - \bar{Y}$	d_i^2
58	101	7	49	–4	16
52	104	1	1	–1	1
50	103	–1	1	–2	4
51	104	0	0	–1	1
49	107	–2	4	2	4
35	106	–16	256	1	1
54	105	3	9	0	0
52	105	1	1	0	0
53	107	2	4	2	4
56	108	5	25	3	9
$\Sigma X = 510$	$\Sigma Y = 1050$		$\Sigma D_i^2 = 350$		$\Sigma d_i^2 = 40$

अब,
$$\bar{X} = \frac{\Sigma X_i}{10} = \frac{510}{10} = 51$$
$$\bar{Y} = \frac{\Sigma Y_i}{10} = \frac{1050}{10} = 105$$
$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma D_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{350}{10}} = 5.9$$
$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma(Y-\bar{Y})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{40}{10}} = 2$$

अब,
$$\text{C.V.(X)} = \frac{\sigma_X}{X} \times 100 = \frac{5.9}{51} \times 100 = 11.5$$
$$\text{C.V.(Y)} = \frac{\sigma_Y}{Y} \times 100 = \frac{2}{105} \times 100 = 1.9$$

वास्तव में C.V.(Y) < C.V.(X) $\therefore$ श्रृंखला Y अधिक संगत है।

देखें आपने कितना सीखा 17.7

1. निम्नलिखित आंकड़ों से बताइए कि इनमें से किस में अधिक विचरण हैं

अंक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
भाग A	9	10	40	33	8
भाग B	8	15	43	25	9

2. कौन–सा कारखाना मजदूरों को अधिक संगत वेतन देता है :

वेतन (₹ में) प्रतिदिन	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
कारखाना A	35	45	50	42	28
कारखाना B	16	50	55	13	46

3. दो विद्यालय एक ही वर्ष में बोर्ड परीक्षा का परिणाम निम्नलिखित दर्शाते हैं

	विद्यालय A	विद्यालय B
औसत प्राप्तांक	250	225
सम्मिलित छात्रों की संख्या	62	62
अंकों के बंटन का प्रसरण	2.25	2.56

व्यक्तिगत अंकों में किस विद्यालय का विचरण अधिक है?

आइये दोहराएँ

- परास दिए गए आंकड़ों के सब से बड़े और सब से छोटे मूल्य के बीच का अन्तर
- माध्य से माध्य विचलन $= \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(f_i|x_i - \bar{x}|)}{N}$ जहां $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$, $\bar{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(f_i x_i)$
- माध्यक से माध्य विचलन $= \dfrac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - M|}{N}$ जहां $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$, $M = l + \dfrac{\frac{N}{2} - C}{f} x_i$
- प्रसरण $\left(\sigma^2\right) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$ (यथा प्राप्त आंकड़ों के लिए)
- मानक विचलन $(\sigma) = +\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$
- वर्गीकृत आंकड़ों के लिए प्रसरण $\sigma_g^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k}\left[f_i(x_i - \bar{x})^2\right]}{N}$, x_i वर्ग का मध्य चिन्ह है।

तथा $\sigma_x{}^2 = h^2\sigma_u{}^2$ और $\sigma_u{}^2 = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\left[f_i\left(u_i - \bar{u}^2\right)\right]$

टिप्पणी

$$N = \sum_{i=1}^{k} f_i$$

या $$\sigma_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(f_i u_i^2\right) - \frac{\left[\sum_{i=1}^{k}\left(f_i u_i^2\right)\right]^2}{N}}{N}$$ जबकि $N = \sum_{i=1}^{k} f_i$

- वर्गीकृत आंकड़ों के लिए मानक विचलन $\sigma_g = +\sqrt{\sigma_g^2}$
- यदि दो बारंबारता बंटनों के माध्य समान हैं, तो बड़े विचरण गुणांक वाला बंटन दूसरे बंटन की तुलना में अधिक विचरण या बिखराव वाला होता है।

सहायक वेबसाइट

- *http:// en.wikipedia.org/wiki/Statistical_dispersion simon.cs.vt.edu/SoSci/converted/Dispersion_I/activity.html*

आइए अभ्यास करें

1. एक परीक्षा में 10 विद्यार्थियों द्वारा 100 में से प्राप्त अंकों के निम्नलिखित आंकड़ों के लिए माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

   55 45 63 76 67 84 75 48 62 65

2. एक कारखाने के 50 मजदूरों की आय को दर्शाने वाले आंकड़े नीचे दिए गए हैं :

आय (रुपयों में):	1200	1300	1400	1500	1600	1800
मजदूरों की संख्या:	4	7	15	12	7	5

   माध्य विचलन परिकलित कीजिए।

3. एक कारखाने के 50 कर्मचारियों के प्रतिदिन का वेतन निम्नलिखित आंकड़ों द्वारा दिया गया है:

वेतन (रुपयों में):	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
कर्मचारियों की संख्या	4	6	8	12
वेतन (रुपयों में):	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 100
कर्मचारियों की संख्या	7	6	4	3

   माध्य विचलन परिकलित कीजिए।

4. एक क्रिकेट खिलाड़ी के 50 पारियों के निम्नलिखित रनों (scores) के आंकड़ों के लिए औसत और माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

बनाए गए रन	0–20	20–40	40–60	60–80
पारियों की संख्या	6	10	12	18
बनाए गए रन	80–100	100–120		
पारियों की संख्या	3	1		

5. एक परीक्षा में 10 विद्यार्थियों के गणित के अंक नीचे दिए गए हैं :

6 10 12 13 15 20 24 28 30 32

उपरोक्त आंकड़ों के लिए प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

6. निम्नलिखित सारणी 10 अंडों के एक नमूने के द्रव्यमान (लगभग ग्राम में), दर्शाती है :

46 51 48 62 54 56 58 60 71 75

इस प्रतिदर्श के द्रव्यमानों का मानक विचलन परिकलित कीजिए।

7. एक कारखाने के 50 कर्मचारियों की साप्ताहिक आय (रुपयों में) नीचे दी गई है :

आय	400	425	450	500	550	600	650
कर्मचारियों की संख्या	5	7	9	12	7	6	4

उपरोक्त आंकड़ों का मानक विचलन परिकलित कीजिए।

8. निम्नलिखित आंकड़ों के लिए प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

वर्ग	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100
बारम्बरता	7	8	25	15	45

9. बंटन का मानक विचलन ज्ञात कीजिए जिसमें x के मान है।। 1,2,.....N। प्रत्येक की बारम्बारता एक है।

10. छात्रों की ऊँचाई तथा भार के लिए निम्नलिखित परिकलन किये गये हैं :

	भार	ऊँचाई
माध्य	52.5 किग्रा	160.5 सेमी
मानक विचलन	11.5	12.2

भार और ऊँचाई में से कौन अधिक विचरण दर्शाता है?

11. एक खिलाड़ी A (बौलर/गेंदबाज) द्वारा 20 मैचों में लिए गये विकेट निम्नलिखित हैं :

विकेटों की संख्या	0	1	2	3	4
मैचों की संख्या	2	6	7	4	1

बौलर/गेंदबाज B के लिए, 20 मैचों में लिए गए विकेटों का माध्य 1.6 है साथ ही मानक विचलन 1.25 है कौन–सा खिलाड़ी अधिक संगत है?

निम्नलिखित बंटनों का माध्यक ज्ञात कीजिए (12-14) :

12.

x_i	14	20	26	29	34	46
f_i	4	6	7	8	9	6

13.

आयु (वर्षों में)	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39
संख्या	8	7	9	11	5

14.

ऊँचाई (सेमी. में)	95-104	105-114	115-124	125-134	135-144
बच्चों की संख्या	10	8	18	8	16

माध्यक से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए (15-18):

15.

x_i	5	15	25	35	45	55
f_i	5	23	30	20	16	6

16.

x_i	105	107	109	111	113	115
f_i	8	6	2	2	2	6

17.

आय (प्रतिमाह) ₹ '000' में	0-5	6-10	11-15	16-20	21-25
सदस्यों की संख्या	5	6	12	14	26

18.

आयु (वर्षों में)	0-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40
सदस्यों की संख्या	5	6	12	14	26	32	16	29

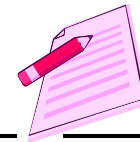
उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 17.1

1. 15
2. 22
3. 9.4
4. 15.44
5. 13.7
6. 136
7. 5.01
8. 14.4

देखें आपने कितना सीखा 17.2

1. 16
2. 15
3. 15.357 अंक
4. 28 वर्ष



देखें आपने कितना सीखा 17.3

1. 1.85
2. 2.36
3. 3.73
4. 0.977

देखें आपने कितना सीखा 17.4

1. प्रसरण = 311, मानक विचलन = 17.63
2. प्रसरण = 72.9, मानक विचलन = 8.5
3. प्रसरण = 42.6, मानक विचलन = 6.53
4. मानक विचलन = 4
5. प्रसरण 13.14, मानक विचलन = 3.62
6. मानक विचलन = 17.6

देखें आपने कितना सीखा 17.5

1. प्रसरण = 734.96, मानक विचलन = 27.1
2. प्रसरण = 12.16, मानक विचलन = 3.49
3. प्रसरण = 5489, मानक विचलन = 74.09

देखें आपने कितना सीखा 17.6

1. प्रसरण = 2194, मानक विचलन = 46.84
2. प्रसरण = 86.5, मानक विचलन = 9.3
3. प्रसरण = 67.08, मानक विचलन = 8.19

देखें आपने कितना सीखा 17.7

1. विभाग A
2. कारखाना A
3. विद्यालय B

आइए अभ्यास करें

1. 9.4
2. 124.48
3. 15.44
4. 52, 19.8
5. प्रसरण = 72.29, मानक विचलन = 8.5
6. 8.8
7. प्रसरण = 5581.25, मानक विचलन = 74.7
8. प्रसरण = 840, मानक विचलन = 28.9

9. मानक विचलन $= \sqrt{\dfrac{N^2 - 1}{12}}$

10. भार

11. खिलाड़ी B

12. 29

13. 27.27

14. 121.16

15. 10.3

16. 3.38

17. 5.2

18. 0.62