



टिप्पणी

यादृच्छिक प्रयोग तथा घटनाएँ

किसी क्रिकेट मैच के आरम्भ होने से पहले अपने दैनिक जीवन में हम देखते हैं कि दोनों टीमों के कप्तान एक सिक्का उछालते हैं। सिक्का उछालने की क्रिया के केवल दो परिणाम हो सकते हैं, चित या पट (यह अनुमान लगाकर कि सिक्का अपने किनारे पर खड़ा नहीं होगा) यदि एक पासे को उछालते हैं तो इस क्रिया में इसका कोई सा एक पृष्ठ अर्थात 1,2,3,4,5 या 6 ऊपर आ सकता है।

ऐसी क्रिया, जो परिणाम को दर्शाती है, को प्रयोग कहते हैं। प्रायः एक प्रयोग में कई परिणाम होते हैं, पर यह संयोग की बात है कि प्रयोग करते हुए कौन सा परिणाम सामने आ जाए। इस पाठ में हम विभिन्न प्रयोग तथा उनके परिणामों का अध्ययन करेंगे।



उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित करने में समर्थ हो जायेंगे :

- यादृच्छिक प्रयोग की परिभाषा देना तथा इसके उदाहरण देना
- प्रयोग में संयोग का कार्य बताना
- दिए गए प्रयोग के लिए प्रतिदर्श समष्टि (sample space) की परिभाषा लिखना
- कई प्रकार के परिणाम जैसे समप्रायिक, परस्पर अपवर्जी, निश्शेष, स्वतन्त्र और निर्भर में अन्तर बताना

पूर्व ज्ञान

- प्रायिकता का मूल ज्ञान

18.1 यादृच्छिक प्रयोग

अब हम निम्नलिखित क्रियाओं पर विचार करते हैं :

1. एक सिक्का उछालिए और परिणाम देखिए, या तो चित (H) आएगा या पट (T) आएगा।
2. यदि हम एक पासे को, जिसके 6 फलक होते हैं, फेंकें तो 6 में से कोई एक फलक 1, 2, 3, 4, 5, 6 ऊपर आएगा।
3. एक के बाद एक दो सिक्के उछालिए और परिणामों को लिखिए। इसके चार परिणाम होंगे: HH, HT, TH, TT

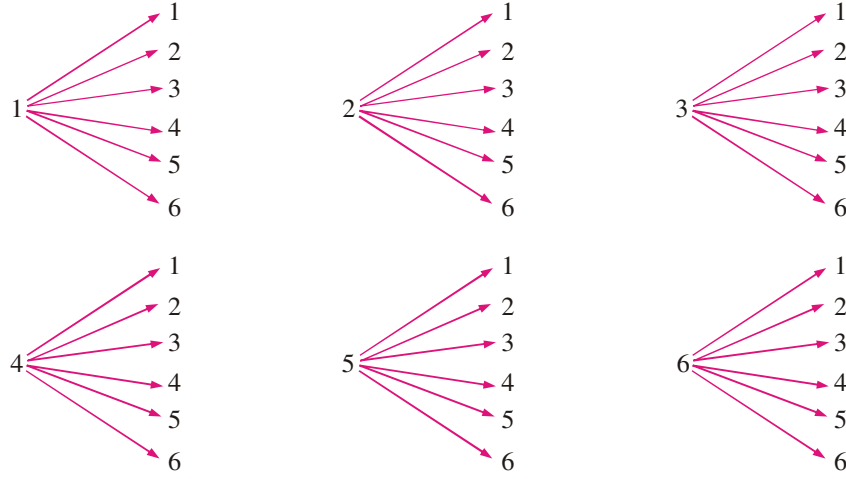
मॉड्यूल - V

सांख्यिकी एवं प्रायिकता



टिप्पणी

4. यदि हम दो पासों को फेंकें तो 36 संभावित परिणाम होते हैं जिन्हें नीचे दिखाया गया है :



अर्थात् परिणाम हैं (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)

(2,1), (2,2), ..., (2,6)

: : :

(6,1), (6,2), ..., (6,6)

ऊपर लिखी क्रियाएं निम्नलिखित दो शर्तों को पूरा करती हैं :

(a) एक जैसी स्थितियों के लिए कोई भी क्रिया दोबारा हो सकती है।

(b) किसी भी क्रिया का परिणाम पहले से नहीं बताया जा सकता है।

ऐसी क्रिया (i) जो एक जैसी शर्तों के लिए दोबारा की जा सकती है और (ii) जिसका परिणाम पहले से ज्ञात न हो, को यादृच्छ प्रयोग कहते हैं।

उदाहरण 18.1. क्या अच्छी तरह फेंटी गई ताश की गड्डी में से एक पत्ता निकालना यादृच्छिक प्रयोग है।

हल : (a) यह क्रिया दोबारा हो सकती है क्योंकि ताश को बार-बार फेंट सकते हैं।

(b) यादृच्छिक 52 पत्तों में से कोई भी पत्ता निकल सकता है, इसलिए हमें पहले से परिणाम ज्ञात नहीं है।

अतः यह एक यादृच्छिक प्रयोग है।

उदाहरण 18.2. 100 कुर्सियों में से एक कुर्सी का चयन किसी वरीयता के बिना करना एक यादृच्छिक प्रयोग है। सिद्ध कीजिए ।

हल : (a) समान स्थितियों में प्रयोग को दोहराया जा सकता है।

(b) क्योंकि किसी कुर्सी का चयन बिना किसी वरीयता के है, इसलिए प्रत्येक कुर्सी के चयन का बराबर संयोग है। इसलिए हमें परिणाम पहले से ज्ञात नहीं है।

यह एक यादृच्छिक प्रयोग है

अब हम ऐसी क्रिया पर विचार करते हैं जो यादृच्छिक न हो।

1. मनीष का जन्म: यह ऐसी क्रिया है जो दोबारा नहीं हो सकती।

2. यदि 8 को 4 से केलकुलेटर पर गुणा करते हैं। यह क्रिया है जो दोबारा तो हो सकती है, पर पहले से हमें इसका परिणाम ज्ञात है, जो 32 है। अतः यह यादृच्छिक प्रयोग नहीं है।

18.2 सेम्पल स्पेस (प्रतिदर्श समष्टि)

यदि हम पासा फेंकें तो क्या परिणाम होगा? साफ है कि पासा फेंकने पर कोई एक फलक ऊपर आ सकता है। अतः प्रत्येक फलक का ऊपर आना एक संभव परिणाम है।

पासा फेंकने के परिणामों के समुच्चय को हम निम्न प्रकार लिख सकते हैं

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

इस तरह एक सिक्का फेंकने के परिणामों का समुच्चय निम्न प्रकार होगा

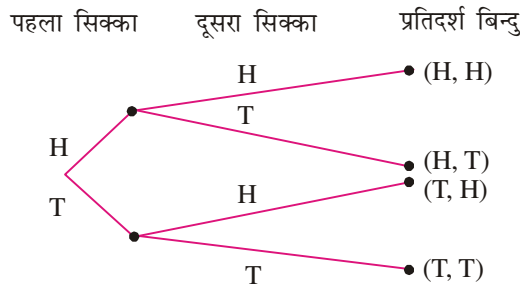
$$S = \{H, T\}.$$

ऐसा समुच्चय जो निम्न गुणों को सन्तुष्ट करता है एक प्रतिदर्श समष्टि कहलाता है।

- समुच्चय का प्रत्येक अवयव किसी एक परिणाम को दर्शाता है।
- परिणाम का कोई एक परीक्षण फल समुच्चय के सिर्फ एक अवयव के साथ अनुकूल होता है। S को प्रयोग का सेम्पल स्पेस (Sample Space) कहते हैं तथा समुच्चय S के अवयवों को प्रतिदर्श बिन्दु कहते हैं।

उदाहरण 18.3. दो सिक्के एक साथ उछाले गए, प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

हल: मान H = चित और T = पट



$$S = \{ (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) \}.$$

टिप्पणी:

यदि दो सिक्के एक साथ उछाले जाएँ तो सेम्पल स्पेस

$$S = \{ HH, HT, TH, TT \}.$$

उदाहरण 18.4. एक प्रयोग का प्रतिदर्श समष्टि लिखिए जिसमें पहले पासा फेंका जाता है और फिर सिक्का उछाला जाता है।

हल : पासा फेंकने के परिणाम होंगे। 1, 2, 3, 4, 5, 6 और सिक्का उछालने के परिणाम होंगे चित और पट ।

माना H (चित) = 0 और T (पट) = 1

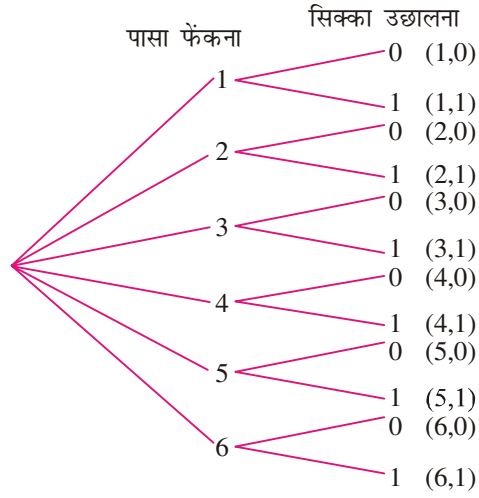


मॉड्यूल - V

सांख्यिकी एवं प्रायिकता



टिप्पणी

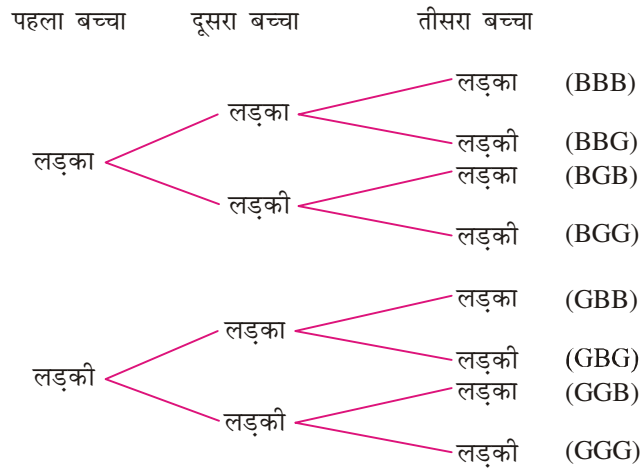


$$S = \{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1), (4, 0), (4, 1), (5, 0), (5, 1), (6, 0), (6, 1)\}$$

$$\therefore n(S) = 6 \times 2 = 12$$

उदाहरण 18.5. हम उन परिवारों को लेते हैं जिनमें 3 बच्चे हैं। हम प्रयोग करते हैं जिसमें हम तीनों बच्चों के लिंग के बारे में पूछते हैं। इस प्रयोग का प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।

हल : माना लड़का B और लड़की G । तो निम्न चित्र बनाइए



प्रतिदर्श समष्टि

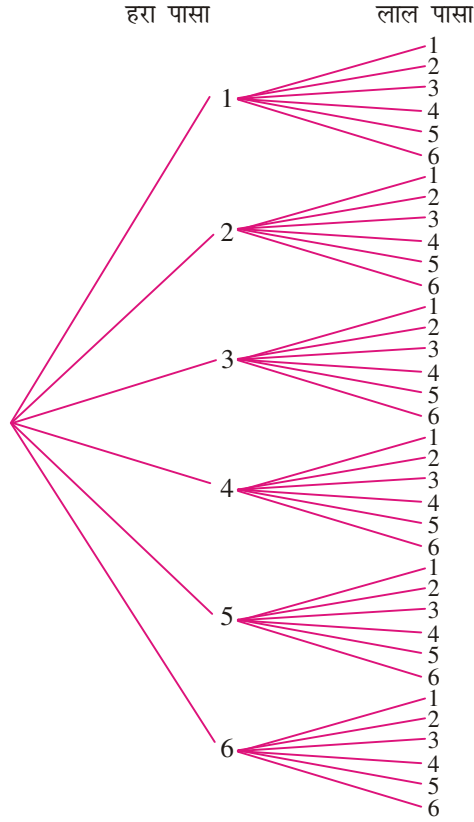
$$S = \{BBB, BBG, BGB, BGG, GBB, GBG, GGB, GGG\}$$

इस प्रकार लिखने का एक लाभ है, हम प्रश्न पूछ सकते हैं क्या दूसरा बच्चा एक लड़की है: कितने परिवारों में पहला बच्चा लड़का हो सकता है। इस प्रकार के प्रश्नों का उत्तर आसानी से दिया जा सकता है।



उदाहरण 18.6. एक प्रयोग है जिसमें पहले हरा और लाल पासा फेंका गया। इसका प्रतिदर्श समिष्ट ज्ञात कीजिए।

हल : इस प्रयोग को हम वृक्ष चित्र द्वारा दिखा सकते हैं :



माना g_i और r_j अंक है (1 से 6) जो पासा हरा या लाल फेंकने पर ऊपर आते हैं तो इस प्रयोग का परिणाम एक क्रमित युग्म होगा। (g_i, r_j) यहां i और j , 1 से 6 तक कोई भी मान ले सकते हैं।

इस प्रयोग का प्रतिदर्श समिष्ट होगा $S = \{(g_i, r_j) : 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\}$.

गणना के नियम के अनुसार इस प्रतिदर्श समिष्ट के 36 अवयव होंगे क्योंकि g और r के लिए 6,6 विकल्प हैं और $6 \times 6 = 36$

उदाहरण 18.7. निम्नलिखित प्रयोगों में प्रत्येक का प्रतिदर्श समिष्ट लिखिए :

- एक सिक्का तीन बार उछाला गया तथा प्रत्येक बार परिणाम नोट किया गया।
- पांच खिलाड़ियों A, B, C, D तथा E में से एक मैच के लिए दो खिलाड़ियों को चुना गया।
- छः बीज बोए गए तथा उगने वाले बीजों के संख्या को नोट किया गया।
- एक सिक्का दो बार उछाला गया। यदि दूसरी बार उछालने पर चित आए तो एक पासा फेंका गया अन्यथा एक सिक्का उछाला गया।

हल : (i) $S = \{ TTT, TTH, THT, HTT, HHT, HTH, THH, HHH \}$

मॉड्यूल - V

सांख्यिकी एवं प्रायिकता



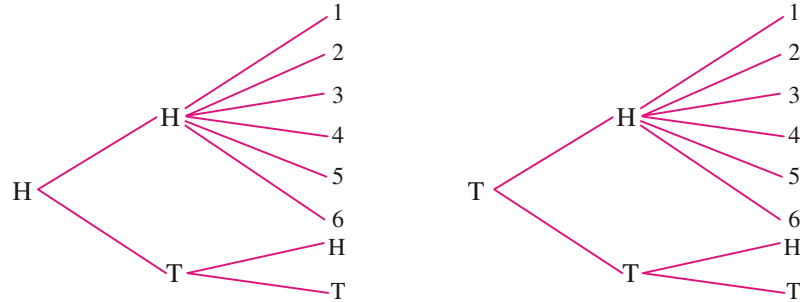
टिप्पणी

प्रतिदर्श समष्टि के अवयवों की संख्या है $2 \times 2 \times 2 = 8$

(ii) $S = \{ AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE \}$ यहाँ $n(S) = 10$

(iii) $S = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ यहाँ $n(S) = 7$

(iv) इस प्रयोग को हम निम्नलिखित वृक्ष चित्र द्वारा दिखा सकते हैं :



$\therefore S = \{ HH1, HH2, HH3, HH4, HH5, HH6, HTH, HTT, TH1, TH2, TH3, TH4, TH5, TH6, TTH, TTT \}$

अर्थात् इस प्रयोग के 16 परिणाम हैं।

18.3 विभिन्न पदों की परिभाषा

(Event) घटना: सिक्का उछालने के प्रयोग में हम चाहते हैं कि चित आए, तो चित इस प्रयोग की घटना होगी।

पासा फेंकने के प्रयोग में यदि हम चाहते हैं कि सम संख्या आए तो इस प्रयोग का परिणाम होगा 2, 4 और 6 तथा यह एक घटना होगी।

हमने देखा कि ऐसे प्रयोग जो समान प्रतिबन्धों में करने पर एक परिणाम नहीं देते परन्तु परिणामों में से एक परिणाम देते हैं, प्रतिदर्श समष्टि बनाते हैं।

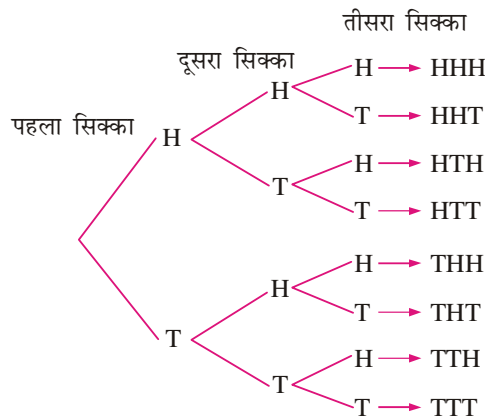
प्रतिदर्श समष्टि के कुछ निष्कर्ष जो किसी खास शर्त को सन्तुष्ट करते हैं परिणाम कहलाते हैं।

किसी परिणाम को हम A,B,C द्वारा दर्शाते हैं।

उदाहरण 18.8. एक प्रयोग E किया गया जिसमें 3 सिक्कों को एक साथ उछालते हैं। इस प्रयोग के संभव निष्कर्ष लिखिए और वे परिणाम घटनाएं लिखिए :

(i) जब चितों को संख्या पटों से ज्यादा हो (ii) जब दो चित आएँ

हल:



$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

$$= \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8\}$$

माना E_1 परिणाम (घटना) है जिसमें चितों की संख्या पटों की संख्या से ज्यादा है।

तब $E_1 = \{w_1, w_2, w_3, w_5\}$

और E_2 वह घटना है जिसमें चित दो बार आता है।

$$E_2 = \{w_2, w_3, w_5\}$$

18.3.1 समप्रायिक घटनाएँ

किसी प्रयोग के निष्कर्ष समप्रायिक, होते हैं यदि दो में से किसी एक को वरीयता न दी जाए।

- उदाहरण :**
1. सिक्का उछालने के निष्कर्ष चित या पट समप्रायिक घटनाएँ हैं।
 2. पासा फेंकने के परिणाम सभी 6 पृष्ठ भी समप्रायिक होते हैं।
 3. पूरी ताश के 52 पत्तों में से एक पत्ता निकालना भी समप्रायिक परिणाम है।

18.3.2 परस्पर अपवर्जी घटनाएँ

वे घटनाएँ परस्पर अपवर्जी होती हैं जिनमें एक के घटित होने पर दूसरी घटित न हो। (एक ही प्रयोग में दो घटनाएँ एक साथ घटित न हों)

- उदाहरण :**
- (i) पासा फेंकने के प्रयोग में 6 फलक (1-6) परस्पर अपवर्जी हैं, क्योंकि एक बार पासा फेंकने पर एक ही फलक ऊपर आएगा तथा दूसरे किसी की संभावना समाप्त हो जाती है।
 - (ii) दो सिक्कों के उछालने में दोनों पट हों या कम से कम एक चित हो परस्पर अपवर्जी हैं। गणित की गणना के अनुसार घटनाएँ परस्पर अपवर्जी कहलाती हैं यदि इनका प्रतिच्छेदन एक रिक्त समुच्चय हो।

18.3.3 निश्शेष घटनाएँ

किसी एक गुण के आधार पर हम कुछ घटनाएँ एकत्र करते हैं। किसी प्रयोग के कितने भी निष्कर्ष हों, एकत्र की गई घटनाओं में से एक जरूर घटित होनी चाहिए।

ऐसी एकत्र की गई घटनाओं को निश्शेष घटनाएँ कहते हैं।

- उदाहरण :**
1. यदि पासा फेंका जाए तो यह जरूरी है कि या तो सम संख्या ऊपर आएगी या विषम संख्या आएगी अर्थात् सम संख्या या विषम संख्या की घटनाएँ निश्शेष हैं।
 2. यदि दो सिक्के फेंके जाएं तो यह जरूरी है कि या तो चित आए या पट आए अर्थात् या तो चित या पट आने की घटनाएँ निश्शेष हैं।

गणित की गणना के अनुसार एकत्र की गई घटनाएँ निश्शेष कहलाती हैं यदि इनके संघ का समुच्चय पूरा प्रतिदर्श समष्टि हो।

18.3.4 स्वतन्त्र और आश्रित घटनाएँ

घटनाओं का समुच्चय स्वतन्त्र कहलाता है यदि कुछ घटनाएँ घटित होती हैं और इनका असर दूसरी घटित घटनाओं पर नहीं होता। दूसरी ओर यदि एक घटित घटना का असर दूसरी घटना पर होता है तो ये घटनाएँ आश्रित घटनाएँ कहलाती हैं।



मॉड्यूल - V

सांख्यिकी एवं
प्रायिकता



टिप्पणी

उदाहरण : बार-बार सिक्का उछालने की घटनाएँ स्वतंत्र होती हैं।

ताश में से एक पत्ता निकाला जाए और उसको वापस रख कर फिर एक पत्ता निकाला जाए तो ये स्वतंत्र घटनाएँ हैं। यदि एक पत्ता निकालने के बाद इसको वापस न रखें और दूसरा पत्ता निकालें तो यह निर्भर घटनाएँ होंगी।



देखें आपने कितना सीखा 18.1

1. बिना किसी वरीयता के स्कूल के एक बच्चे का चयन करना एक यादृच्छिक प्रयोग है, सिद्ध कीजिए।
2. केलकुलेटर द्वारा दो संख्याओं का योग ज्ञात करना एक यादृच्छिक प्रयोग नहीं है, सिद्ध कीजिए।
3. एक समय में तीन सिक्के उछाले गए, इसका प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।
4. एक सिक्का तथा एक पासा दोनों उछाले गये। इसका प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।
5. यदि दो पासे एक साथ फेंके जाएं और ये जरूरी हो कि हर बार ऊपर वे फलक आएँ जिसमें 6 का अंक हो। क्या ये परस्पर अपवर्जी हैं ?
6. दो पासे एक साथ फेंके गए घटनाएँ A, B, C, D हैं :
 - A) पहले पासे पर सम संख्या का आना
 - B) पहले पासे पर विषम संख्या का आना
 - C) दोनों पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग < 7 आना
 - D) दोनों पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग > 7 आना।
 बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य
 - (i) A तथा B परस्पर अपवर्जी हैं।
 - (ii) A तथा B परस्पर अपवर्जी तथा निश्शेष हैं।
 - (iii) A तथा C परस्पर अपवर्जी हैं।
 - (iv) A तथा D परस्पर अपवर्जी तथा निश्शेष हैं।
7. एक बक्से में 6 लाल, 4 सफेद और 5 नीली गेंदें हैं। इस बक्से से एक गेंद यादृच्छ रूप से निकाली गई। इसका प्रतिदर्श समष्टि लिखिए। इसमें कितने प्रतिदर्श बिन्दु हैं ?
8. एक बार दो पासे फेंकने के अवयव लिखिए और प्रतिदर्श बिन्दु भी लिखिए।
9. कुछ ऐसे परिवार हैं जिनमें सिर्फ 2 बच्चे हैं। इन परिवारों के पहले और दूसरे बच्चे के लिंग के बारे में पूछा जाता है। इसका प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।



आइये दोहराएँ

- ऐसी क्रिया जिसका कोई परिणाम हो उसे प्रयोग कहते हैं।
- एक ऐसी क्रिया, जो समान स्थितियों में दोबारा की जाये और जिसका परिणाम पहले से ज्ञात न हो, को यादृच्छिक प्रयोग कहते हैं।

यादृच्छिक प्रयोग तथा घटनाएँ

- किसी यादृच्छिक प्रयोग के परिणामों के समुच्चय को प्रतिदर्श समष्टि कहते हैं और इस समुच्चय के अवयवों को प्रतिदर्श समष्टि बिन्दु कहते हैं।
- प्रतिदर्श समष्टि के वे परिणाम, जो किसी शर्त को सन्तुष्ट करते हैं, घटना कहलाते हैं।
- उन घटनाओं को समप्रायिक कहते हैं जब किसी एक घटना के लिए दूसरी को वरीयता न दी जाए।
- यदि एक घटना के घटित होने से दूसरी घटना घटित नहीं होती तो ये परस्पर अपवर्जी घटनाएँ होती हैं।
- किसी परीक्षण के कुल परिणामों को निश्शेष घटनाएँ कहते हैं।
- घटनाओं का वह समुच्चय स्वतन्त्र कहलाता है जिसकी किसी घटना के घटित होने का प्रभाव दूसरी घटित घटना पर नहीं होता और यदि एक घटित घटना का असर दूसरी पर होती है, तो ये निर्भर घटनाएँ कहलाती हैं।

मॉड्यूल - V

सांख्यिकी एवं प्रायिकता



टिप्पणी



सहायक वेबसाइट

- www.math.uah.edu/stat/prob/Events.html
- [http://en.wikipedia.org/wiki/Experiment_\(probability_theory\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Experiment_(probability_theory))



आइए अभ्यास करें

1. एक चाय सेट में चार कप और चार प्लेटें हैं। यदि कप प्लेटों पर यादृच्छ रूप से रखे जाएँ तो प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।
2. यदि चार सिक्के उछाले जाएँ तो इस प्रयोग का प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।
3. यदि एक के बाद एक n सिक्के उछाले जाएँ तो कितने प्रतिदर्श समष्टि अवयव बनेंगे।
[संकेत : $n = 1, 2, 3, 4, \dots$]
4. दो पासों को एक साथ उछाला गया। इसमें कितने प्रतिदर्श बिन्दु होंगे?



उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 18.1

1. दोनों गुण संतुष्ट होते हैं।
2. परिणाम का पूर्व ज्ञान हो सकता है?
3. $S = \{ HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT \}$
4. $\{ H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6 \}$
5. नहीं

मॉड्यूल - V

सांख्यिकी एवं
प्रायिकता

टिप्पणी

6. (i) सत्य (ii) सत्य (ii) असत्य (iv) सत्य 7. 15
8. $\{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)$
 $(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)$
 $(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)$
 $(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)$
 $(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)$
 $(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \}$
9. $\{MM, MF, FM, FF\}$

आइए अभ्यास करें

1. $\{C_1S_1, C_1S_2, C_1S_3, C_1S_4, C_2S_1, C_2S_2, C_2S_3, C_2S_4,$
 $C_3S_1, C_3S_2, C_3S_3, C_3S_4, C_4S_1, C_4S_2, C_4S_3, C_4S_4 \}$
2. $2^4 = 16, \{HHHH, HHHT, HHTH, HTHH, HHTT, HTHT, HTTH, HTTT,$
 $THHH, THHT, THTH, THTT, TTHH, TTHT, TTTH, TTTT \}$
3. 2^n 4. $6^2 = 36$