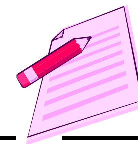


19

प्रायिकता

आप दैनिक जीवन में प्राय: ऐसे कथन सुनते रहते हैं कि 'आज वर्षा हो सकती है' या 'संभवत: भारत मैच जीत जाए' या 'मैं संभवत: इस पद के लिए चुना जाऊं'। इन कथनों में अनिश्चितता का तत्व सम्मिलित है। अनिश्चितता को हम कैसे माप सकते हैं? गणित की वह शाखा जिसमें यह अनिश्चितता मापी जाती है, प्रायिकता का सिद्धान्त कहलाती है। किसी घटना के घटने की अनिश्चितता को मापने के लिए प्रायिकता के सिद्धान्त को बनाया गया है। शब्द कोष में प्रायिकता का अर्थ है 'संभवत: घटित हो परन्तु निश्चित नहीं'। इसलिए जब एक सिक्का उछाला जाता है तो चित्त आ सकता है परन्तु न भी आए। इसी प्रकार जब एक पासा फेंका जाता है, तो यह संख्या 6 दिखाए या ना दिखाए।

इस पाठ में हम, प्रायिकता की कुछ मूलभूत अवधारणाओं, योग प्रमेय, पराश्रित एवं स्वतंत्र घटनाएं, गुणन प्रमेय, बेज प्रमेय, यादृच्छिक चर और इसकी प्रायिकता बंटन एवं द्विपद बंटन का अध्ययन करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाएंगे :

- किसी घटना के घटने की प्रायिकता को परिभाषित करना,
- उदाहरणों द्वारा स्थापित करना कि किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता एक ऋणेतर भिन्न है जो कि एक से बड़ी नहीं है।
- प्रायिकता के प्रश्नों को हल करने में क्रमचय तथा संचय का उपयोग करना,
- प्रायिकता के योग के प्रमेय का कथन देना तथा इसे सिद्ध करना,
- प्रायिकता की योग प्रमेय का परस्पर अपवर्जी घटनाओं के लिए व्यापीकरण करना।
- पराश्रित एवं स्वतन्त्र घटनाओं के लिए गुणन नियम को समझना और इस पर आधारित प्रश्नों को हल करना
- प्रतिबंधी प्रायिकता को समझना और संबंधित प्रश्नों को हल करना
- बेज प्रमेय को समझना और संबंधित प्रश्नों को हल करना
- यादृच्छिक चर को परिभाषित करना और इस की प्रायिकता बंटन ज्ञात करना
- यादृच्छिक चर के माध्य एवं प्रसरण को समझना एवं ज्ञात करना
- द्विपद बंटन को समझना और इस पर आधारित प्रश्नों को हल करना

पूर्व ज्ञान

- यादृच्छिक प्रयोग तथा घटनाओं का ज्ञान
- प्रतिदर्श समष्टि का अर्थ
- एक मानक ताश की गड्डी में 52 पत्ते होते हैं जो कि 13 पत्तों के चार रंग (सूट), हुकुम, चिड़ी,ईंट तथा पान में बटे होते हैं। जब कि प्रत्येक सूट में इक्का, बादशाह, बेगम, गुलाम 10,9,8,7,6,5,4,3 तथा 2 के पत्ते होते हैं। बादशाह, बेगम तथा गुलाम को तस्वीर वाला पत्ता (फेस कार्ड) कहते हैं। बाकी पत्तों को नम्बर कार्ड कहते हैं।

19.1 घटनाएं तथा उनकी प्रायिकता

इससे पहले पाठ में हमने अध्ययन किया कि कोई क्रियाकलाप यादृच्छिक प्रयोग है अथवा नहीं। प्रायिकता का अध्ययन सदैव यादृच्छिक प्रयोग से ही संबंधित होता है। अत: भविष्य में 'प्रयोग' शब्द का उपयोग केवल यादृच्छिक प्रयोग के लिए होगा।

उस पाठ में हमने विभिन्न प्रकार की घटनाओं जैसे समप्रायिक, परस्पर अपवर्जी को परिभाषित किया है कुल संभव परिणामों की, स्वतन्त्र तथा आश्रित घटनाओं और उपर्युक्त घटनाओं के उदाहरण भी दिए हैं यहां हमारी रूचि किसी विशिष्ट घटना के घटित होने की संभावना में है, जबकि एक प्रयोग किया गया हो। आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

एक सिक्के को उछालने पर चित्त (Head) आने की संभावना क्या है? यहां केवल दो समप्रायिक परिणाम हैं, चित्त अथवा पट (Tail)। दैनिक भाषा में हम कहते हैं कि चित्त आने की संभावना दो में से एक है। तकनीकी भाषा में हम कहते हैं कि चित्त की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है।

इसी प्रकार, एक पासे को फेंकने के प्रयोग में छ: समप्रायिक परिणाम 1, 2, 3, 4, 5, 6 है। अंक 1 वाले फलक के आने की संभावना 6 में से 1 है। इसलिए हम कहते हैं कि 1 आने की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ है।

ऊपरी प्रयोग में मान लीजिए एक पासा फेंकने पर हम एक सम संख्या के आने की प्रायिकता जानना चाहते हैं। स्पष्ट है कि सम्भव संख्याएँ 2, 4 तथा 6 है। तथा सम संख्या आने की संम्भावना 6 में से 3 है इसलिए हम कहते हैं कि सम संख्या की प्रायिकता $\frac{3}{6}$ अर्थात $\frac{1}{2}$ है। इस से हमें प्रायिकता की निम्नलिखित परिभाषा मिलती है :

यदि n सभी संभव समप्रायिक तथा परस्पर अपवर्जी परिणाम वाले एक प्रयोग में, किसी घटना A के अनुकूल (पक्ष में) m परिणाम हों तो घटना A के घटित होने की प्रायिकता P को निम्नलिखित संबंध से प्राप्त किया जाता है :

$$p = \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{m}{n} \quad \text{....(i)}$$

चूंकि घटना A के न घटित होने के अनुकूल परिणामों की संख्या (n–m) है तो A के न घटित होने की प्रायिकता q होगी :

$$q = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n}$$

$$= 1 - p \qquad \text{[(i) का उपयोग करने पर]}$$

$$\therefore \qquad p + q = 1.$$

स्पष्टत: p तथा q भी धनात्मक हैं और इनके मान 1 से अधिक नहीं हो सकते।

अर्थात् $\quad 0 \le p \le 1, \quad 0 \le q \le 1$

इस प्रकार किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता 0 से 1 के तक स्थित होती है।

टिप्पणी

1. किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता p को सफलता की प्रायिकता, तथा घटना के न घटित होने की प्रायिकता q को असफलता की प्रायिकता भी कहते हैं।
2. (a) यदि $P(A) = 1$, तो A एक निश्चित घटना कहलाती है, अर्थात घटना A का घटित होना अवश्यंभावी है।

   (b) यदि $P(A) = 0$ तो A एक असंभव घटना कहलाती है, अर्थात घटना का घटित होना असंभव है।
3. एक घटना के अनुकूल (पक्ष) के परिणामों की संख्या (m) उसके कुल परिणामों की संख्या (n) से अधिक नहीं हो सकती।

आइए हम कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 19.1. दो सिक्के एक साथ उछाले जाते हैं (i) दो 'चित्त' आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए (ii) केवल एक 'चित्त' आने की प्रायिकता क्या है?

हल : यहां कुल संभव परिणाम 4 हैं अर्थात कुल संभव परिणामों की संख्या = 4.

HH, HT, TH, TT.

(i) घटना (दो चित्त) के अनूकूल परिणामों की संख्या = 1

अतः $$P(2 \text{ चित्त}) = \frac{1}{4}.$$

(ii) अब केवल एक 'चित्त' के अनुकूल परिणाम HT तथा TH है।

$$\therefore \quad P(\text{केवल 1 चित्त}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

उदाहरण 19.2. दो पासे फेंके जाते हैं। योग 9 आने की प्रायिकता क्या है?

हल : दो पासों को एक बार फेंकने पर आने वाले कुल संभव परिणाम $6 \times 6 = 36$ हैं। हम उन्हें निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

अब हम योग 9 कैसे प्राप्त कर सकते हैं? हमारे पास हैं :

$$3 + 6 = 9, \; 4 + 5 = 9$$
$$5 + 4 = 9, \; 6 + 3 = 9$$

दूसरे शब्दों में (3, 6), (4, 5), (5, 4) तथा (6,3) दी हुई घटना के अनुकूल परिणाम हैं।

अतः $P(\text{योग } 9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

उदाहरण 19.3. यादृच्छिक चुने गए लीप वर्ष में 53 रविवार होने का संयोग क्या है ?

हल : लीप वर्ष में दिनों की संख्या = 366

अब 366 दिन = 52 सप्ताह और 2 दिन, अत: लीप वर्ष में 52 रविवार हैं अगले 2 दिन के संभव संचय नीचे दिये गए हैं:

(i) रविवार तथा सोमवार

(ii) सोमवार तथा मंगलवार

(iii) मंगलवार तथा बुधवार

(iv) बुधवार तथा बृहस्पतिवार

(v) बृहस्पतिवार तथा शुक्रवार

(vi) शुक्रवार तथा शनिवार

(vii) शनिवार तथा रविवार

यादृच्छिक चुने गए लीप वर्ष में 53 रविवार होने के लिए, अगले 2 दिन में एक रविवार अवश्य होना चाहिए। चूँकि उपर्युक्त सात संभावनाओं में इस घटना के दो अनुकूल परिणाम हैं।

$$\therefore \text{ प्रायिकता } = \frac{2}{7}$$

देखें आपने कितना सीखा 19.1

1. एक पासा एक बार फेंका जाता है। 3 प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
2. एक सिक्का एक बार उछाला जाता है। पट (टेल) प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?
3. एक पासे पर 3 से बड़ी संख्या आने की प्रायिकता क्या है?
4. दो सिक्कों को एक साथ उछालने पर कम से कम एक पट (टेल) प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
5. एक थैले में से जिस में 15 लाल तथा 10 नीली गेंदे है, एक गेंद यादृच्छिक रूपसे निकाली जाती है। निकाली गई गेंद के (i) लाल होने की प्रायिकता क्या है? (ii) नीली होने की प्रायिकता क्या है?
6. यदि दो पासे फेंके जाते हैं तो योग (i) 6 (ii) 8 (iii)10 (iv)12 होने की प्रायिकता क्या हैं?
7. दो पासे फेंके गए। दोनों फलकों की संख्याओं के योग के 3 या 4 से विभाजित होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
8. यदि दो पासे फेंके जाएं तो दोनों फलकों की संख्याओं का योग 10 से अधिक आने की प्रायिकता क्या होगी?
9. एक अच्छी प्रकार फेंकी गई 52 पत्तों की ताश की गड्डी से एक लाल पत्ता निकालने की प्रायिकता क्या है?
10. एक अच्छी प्रकार फेंटी गई 52 पत्तों की ताश की गड्डी में से एक पत्ता खींचा गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

    (i) हुकुम के पत्ते की (ii) बादशाह की (iii) हुकुम के बादशाह की

11. पासों का एक युग्म फेंका गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि :

    (i) योग एक अभाज्य संख्या हो

    (ii) एक द्विक (अर्थात दोनों पासों पर समान संख्या) आए

    (iii) एक पासे पर 2 का गुणज तथा दूसरे पर 3 का गुणन आए।

12. तीन सिक्के एक साथ उछाले गए। प्रायिकता ज्ञात कीजिए :

    (i) कोई चित्त ना आए (ii) कम से कम एक चित्त आए (iii) सभी चित्त आएं।

19.2 संचय विन्यास (क्रमचय तथा संचय) का उपयोग करके प्रायिकता का परिकलन

पिछले अनुच्छेद में हमने किसी घटना की प्रायिकता उसके सभी संभव परिणामों को तथा उस घटना के अनुकूल परिणामों को लिख कर परिकलित की थी। यह तभी संभव है जबकि परिणामों की संख्या छोटी हो, अन्यथा यह प्रक्रिया कठिन हो जाती है और इसमें समय भी अधिक लगता है। सामान्य रूप में हमें सभी परिणामों को लिखने की आवश्यकता नहीं है। हमें केवल सभी संभव परिणामों की संख्या और दी हुई घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या की आवश्यकता होती है। अनेक स्थितियों में इनको क्रमचय तथा संचय के ज्ञान का उपयोग करके ज्ञात किया जा सकता है जिसे आप पहले पढ़ चुके हैं।

आइए, निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 19.4. एक थैले में 3 लाल, 6 सफेद और 7 नीली गेंदें हैं। दो गेंदे निकाली जाती हैं उनके एक सफेद और एक नीली होने की प्रायिकता क्या है?

हल : कुल गेंदों की संख्या $= 3 + 6 + 7 = 16$

अब, 16 गेंदों में से 2 गेंद $^{16}C_2$ विधियों से निकाली जा सकती है। सभी संभव परिणामों की संख्या

$$= {}^{16}C_2 = \frac{16 \times 15}{2} = 120.$$

6 सफेद गेंदों में से 1 गेंद $^{6}C_1$ विधियों से निकाली जा सकती है। और 7 नीली गेंदों में से 1 गेंद $^{7}C_1$ विधियों से निकाली जा सकती है। चूँकि पूर्व की प्रत्येक स्थितियां बाद की प्रत्येक स्थितिं से संबद्ध है इसलिए कुल अनुकूल स्थितियों की संख्या ${}^{6}C_1 \times {}^{7}C_1 = 6 \times 7 = 42$ है।

$$\therefore \text{ अभीष्ट प्रायिकता } = \frac{42}{120} = \frac{7}{20}$$

टिप्पणी :

एक थैले में से जिसमें अनेक गेंद रखी हैं जब दो अथवा अधिक गेंद निकाली जाए, तो ऐसा दो विधियों से किया जा सकता है :

(i) **बिना वापस रखे :** जब दूसरी गेंद निकाली जाती है तो उसके पूर्व पहली गेंद वापस नहीं रखी गई। तीसरी गेंद भी पहली दो गेंदों को बिना वापस रखे निकाली जाती है, इत्यादि। स्पष्ट है कि बिना वापस रखे गेंदों के निकालने की स्थिति इस के समान है कि उन सभी गेंदों को एक साथ निकाला जाए।

(ii) **वापस रखकर :** इस स्थिति में, अगली गेंद निकालने से पहले पिछली गेंद को थैले में वापस रख दिया जाता है। यहां जब भी गेंद बाहर निकाली जाती है, तो थैले में गेंदों कीसंख्या समान रहती है।

इस प्रकार के प्रश्नों में जब तक दिया ना हो हम उसे बिना वापस रखे वाला ही प्रश्न मानेगें।

उदाहरण 19.5. 52 पत्तों वाली ताश की गड्डी में से 6 पत्ते यादृच्छिक रूप से निकाले गए। 3 लाल व 3 काले पत्ते होने की प्रायिकता क्या है?

हलः अच्छी प्रकार से फेंटी गई ताशों की गड्डी में से 6 पत्ते $^{52}C_6$ विधियों से निकाले जा सकते हैं अर्थात् संभव परिणामों की कुल संख्या = $^{52}C_6$ । 3 लाल पत्ते $^{26}C_3$ विधियों से निकाले जा सकते हैं। 3 काले पत्ते $^{26}C_3$ विधियों से निकाले जा सकते हैं।

अनुकूल स्थितियों की कुल संख्या $= {}^{26}C_3 \times {}^{26}C_3$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $= \dfrac{{}^{26}C_3 \times {}^{26}C_3}{{}^{52}C_6} = \dfrac{13000}{39151}$

उदाहरण 19.6. 3 पुरुषों, 2 स्त्रियों तथा 4 बच्चों में से चार व्यक्तियों को यादृच्छिक रूप से चुनना है। दर्शाइए कि उनमें ठीक दो बच्चे सम्मिलित होने की प्रायिकता $\dfrac{10}{21}$ है।

हल : समुदाय में व्यक्तियों की संख्या $= 3 + 2 + 4 = 9$. चार व्यक्तियों को यादृच्छिक चुना जाता है, यदि उनमें से 2 बच्चे हैं, तब शेष दो 5 व्यक्तियों (3 पुरुषों +2 स्त्रियों) में से चुने जा सकते हैं।

4 बच्चों में से 2 बच्चे $^4C_2$ विधियों से चुने जा सकते हैं। $^4C_2 = \dfrac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6$

5 व्यक्तियों में से 2 व्यक्तियों के चुनने की कुल विधियाँ $= {}^5C_2 = \dfrac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10$ है।

9 व्यक्तियों में से 4 व्यक्तियों के चुनने की कुल विधियाँ $= {}^9C_4 = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 126$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $= \dfrac{{}^4C_2 \times {}^5C_2}{{}^9C_4} = \dfrac{6 \times 10}{126} = \dfrac{10}{21}$

देखें आपने कितना सीखा 19.2

1. एक थैले में 3 लाल, 6 सफेद तथा 7 नीली गेंद हैं। दो निकाली गई गेंदों के सफेद होने की प्रायिकता क्या है?
2. एक थैले में 5 लाल, 8 नीली गेंद हैं। दो निकाली गई गेंदों में एक लाल तथा एक नीली होने की प्रायिकता क्या है?
3. एक थैले में 20 सफेद तथा 30 काली गेंद हैं। यादृच्छया निकाली गई दोनों गेंदो के सफेद होने की प्रायिकता क्या है, (a) वापस रखते हुए (b) बिना वापस रखते हुए ?
4. अच्छी तरह फेंटी गई 52 पत्तों वाली ताश की एक गड्डी में से तीन ताश के पत्ते खीचे जाते हैं। तीनों पत्तों के गुलाम होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
5. अच्छी तरह फेंटी गई 52 पत्तों की ताश की गड्डी में से दो पत्ते खीचें जाते हैं। दर्शाइए, कि उनके इक्के होने की प्रायिकता $\dfrac{1}{221}$ है।

6. एक विद्यालय में 10 होनहार विद्यार्थी हैं, जिस में 6 लड़के तथा 4 लड़कियां हैं। 3 विद्यार्थियों का वाद विवाद प्रतियोगिता के लिए यादृच्छया चुनाव करना है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि चुने गये विद्यार्थियों में :

   (i) एक लड़का तथा दो लड़कियां हों, (ii) सभी लड़के हों, (iii) सभी लड़कियां हों।

7. 21 टिकटों, जिन पर 1 से 21 तक संख्याएँ अंकित हैं, में से तीन यादृच्छिया निकाली जाती है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि उन पर अंकित संख्याएं संमातर श्रेणी में हैं।

8. 1 से 8 तक संख्याओं वाले 8 कार्डों में से 2 कार्ड यादृच्छिक रुप से लिए गये यदि दोनों कार्ड इकट्ठे निकाले गए तो संख्याओं का योग विषम आने की प्रायिकता क्या होगी?

9. 6 लड़कों तथा 8 लड़कियों के एक समूह में से 5 खिलाड़ियों की एक टीम का चयन किया गया। इस टीम में 2 लड़के तथा 3 लडकियों के चुने जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि चयन यादृच्छिक रूप से किया गया हो।

10. पहले 200 घनात्मक पूर्णांकों में से एक पूर्णांक चुना गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह पूर्णांक 6 या 8 से विभाजित होता है।

19.3 घटनाओं में संबंध

19.3.1 एक घटना का पूरक

आइए एक उदाहरण लें। जब एक पासा फेंका जाता तो इसका प्रतिदर्श समष्टि होगा:

$$S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

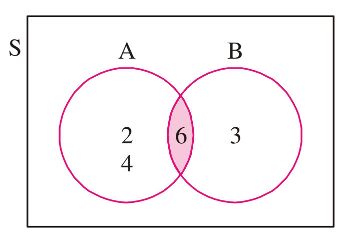
मान लीजिए कि A ऐसी घटना है जिसमें सम संख्या आनी चाहिए तो घटना A प्रतिदर्श अवयव 2, 4, 6, आने पर घटित होगा और 1, 3, 5 आने पर घटित नहीं होगा।

जिन परिणामों में घटना A घटित नहीं होती वे A के पूरक कहलाते हैं।

पूरक A में वे परिणाम आते हैं जो घटना A के अनुकूल नहीं है और इनको 'नहीं A' अथवा $\bar{A}$ द्वारा लिखा जाता है।

19.3.2 घटना A या B

एक पासा फेंका गया। माना घटना A में वे फलक ऊपर आते हैं जिन पर 2 के गुणज हैं और घटना B में वे फलक ऊपर आते हैं जिन पर 3 के गुणज हैं। इसलिए 2, 4, 6 घटना A के अनुकूल हैं और 3,6 घटना B के अनुकूल हैं।



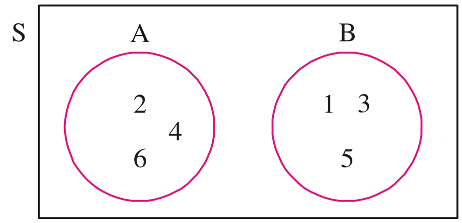
चित्र 19.1

A या B का घटित होना

$$A \cup B = \{ 2, 3, 4, 6 \}$$

फिर यदि घटना A में सम संख्या आए और B में विषम संख्या आए तो

$$A = \{ 2, 4, 6 \}, \qquad B = \{ 1, 3, 5 \}$$



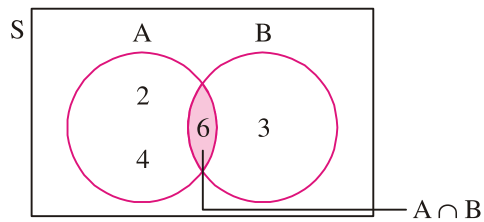
चित्र 19.2

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

इन उदाहरणों में हमने देखा कि यदि A तथा B दो घटनाऐं हैं तो A या B अर्थात् $(A \cup B)$ में वे सभी परिणाम होंगे जो या तो A के अनुकूल हैं, या B के अनुकूल हैं या दोनो के अनुकूल हैं।

19.3.3 घटना A और B

पुराने प्रयोग को एक बार फिर से याद करते हैं जिससे पासा फेंकने पर घटना A में 2 के गुणज और घटना B में 3 गुणज ऊपर आते हैं। घटना A के परिणाम हैं 2, 4, 6, और घटना B के परिणाम हैं 3, 6.



चित्र 19.3

इन दोनों घटनाओं से पता चलता है कि परिणाम 6 दोनों में एक अनुकूल परिणाम है।

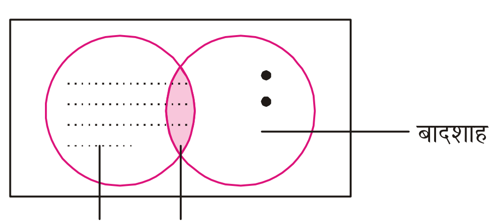
ताश की गड्डी में से एक पत्ता निकाला। घटनाएं A तथा B निम्नलिखित है :

घटना A = एक लाल पत्ता आना

घटना B = एक बादशाह आना

हमें ज्ञात है कि पूरी ताश की गड्डी में 26 लाल पत्ते होते हैं और 4 बादशाह होते हैं, उन 4 बादशाहों के पत्तों में से दो लाल होते हैं। इस पूरे प्रयोग में 2 लाल वाले राजा के पत्ते दोनों घटनाओं में अनुकूल हैं। इसलिए A और B में वे परिणाम आते हैं जो दोनों में अनुकूल होते हैं।

$\therefore A \cap B =$ {ताश में आने वाले बादशाह जो लाल हैं}



चित्र 19.4

अत: A और B में वे परिणाम आते हैं जो A और B दोनों में अनुकूल होते हैं, अर्थात् घटना A और B घटित होती है जबकि A और B साथ-साथ घटित होते हैं। संकेतन रूप में इसे $A \cap B$ लिखा जाता है।

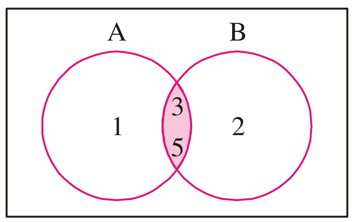
19.4 प्रायिकता के योग का नियम

एक पासा फेंकने के प्रयोग में मान लीजिए कि घटना A के परिणाम हैं विषम संख्याऐं और घटना B के परिणाम हैं अभाज्य संख्यायें। इस प्रयोग की क्या प्रायिकता होगी कि एक विषम संख्या या एक अभाज्य संख्या आए।

एक पासा फेंकने का प्रतिदर्श समष्टि S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } है।

घटना A के परिणाम = { 1, 3, 5 }

घटना B के परिणाम = { 2, 3, 5 }



चित्र 19.5

घटना A या B के परिणाम

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}.$$

इसलिए एक विषम संख्या या एक अभाज्य संख्या की प्रायिकता P(A या B) $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

इसको हम दूसरी तरह भी हल कर सकते हैं जैसे

घटना A के अनुकूल परिणाम = 1, 3, 5

$\therefore$ A की प्रायिकता $P(A) = \frac{3}{6}$

घटना B के अनुकूल के परिणाम = 2, 3, 5.

B की प्रायिकता $P(B) = \frac{3}{6}$

A और B के अनुकूल परिणाम = 3, 5.

$\therefore$ A और B की प्रायिकता P (A और B) $= \frac{2}{6}$

अब P(A) + P(B) − P (A और B) $= \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6}$

$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ = P (A या B)

अब हम योग के नियम को लिखते हैं जिसमें हम घटनाओं के संघ की (Union) प्रायिकता निकाल सकते हैं।

किसी प्रतिदर्श समष्टि की दो घटनाओं A और B के लिए

P (A या B) = P (A) + P (B) − P (A और B)

या $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad .....(ii)$$

उदाहरण 19.7. अच्छी तरह फेंटी गई ताश की गड्डी में से एक पत्ता निकाला गया, प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि या तो हुकम का पत्ता आए या बादशाह का पत्ता आए।

हल : यादृच्छिक रूप से यदि ताश में से एक पत्ता निकाला जाए तो प्रत्येक पत्ते के निकलने की बराबर संभावना है अर्थात इसके प्रतिदर्श स्मष्टि में 52 अवयव होगें।

अब यदि घटना A के परिणाम हैं हुकम का पत्ता और घटना B का परिणाम है बादशाह तो घटना A में 13 प्रतिदर्श अवयव होगें और घटना B में 4 प्रतिदर्श अवयव होगें।

$$\therefore \qquad P(A) = \frac{13}{52}, \qquad P(B) = \frac{4}{52}$$

घटना A और B का एक प्रतिदर्श अवयव होगा

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

अत: हुकम का पत्ता या बादशाह आने की प्रायिकता

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52}$$

$$= \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

उदाहरण 19.7. एक प्रयोग में दो पासे फेंके गए जिसमें

घटना A: ऊपर आए फलकों के अंकों का योग 8 आये।

घटना B: जब दोनों बार एक जैसा अंक आए।

इस प्रयोग में A या B की प्रायिकता क्या है?

हल : इस प्रयोग के प्रतिदर्श समष्टि में $6 \times 6 = 36$ प्रतिदर्श अवयव होगें।

घटना A के अनुकूल परिणाम

$$A = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$$

घटना B के अनुकूल परिणाम

$$B = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

घटना A और B दोनों के अनुकूल परिणाम

$$A \cap B = \{(4,4)\}.$$

अब $\quad P(A) = \frac{5}{36}, \quad P(B) = \frac{6}{36}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{36}$

A या B की प्रायिकता

अर्थात $\quad P(A \cup B) = \frac{5}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36}$

$$= \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

19.5 परस्पर अपवर्जी घटनाओं की प्रायिकता के योग का नियम

हम जानते हैं दो घटनाएं परस्पर अपवर्जी होती हैं यदि उनका कोई भी परिणाम उभयनिष्ठ न हो।

यानि कि P (A और B) = 0 .....(iii)

इसका मान योग के नियम में रखने पर

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

इसलिए दो परस्पर अपवर्ती घटनाओं के लिए

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

उदाहरण 19.9. एक ही बार में दो पासे फेंके गए। यदि अंको का योग 9 या 11हो तो इस प्रयोग की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : एक घटना में अंकों का योग 9 और एक घटना में अंकों का योग 11 आए, ये दोनों परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं।

P (योग 9 या योग 11)= P (योग 9) + P (योग 11)

घटना (योग 9) के परिणाम = {(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)}

घटना (योग 11) के परिणाम = (5,6) , (6,5)

P (योग 9) = $\frac{4}{36}$, P (योग 11) = $\frac{2}{36}$

P(योग 9 या योग 11)= $\frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{1}{6}$

उदाहरण 19.10. सिद्ध कीजिए कि एक घटना जो घटित न हुई हो उसकी प्रायिकता $1 - P(A)$ है।

अर्थात $\Rightarrow$ P (A नहीं) = 1 – P (A)

या $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

हल : हम जानते हैं कि किसी भी प्रयोग के प्रतिदर्श समष्टि S की प्रायिकता 1 होती है। हम यह भी जानते हैं कि यदि एक प्रयोग में घटना A घटित होती है तो $(\bar{A})$ घटित नहीं होती। ये परस्पर अपवर्जी घटनाएं हैं। इन दोनों घटनाओं के प्रतिदर्श समष्टि अवयव मिलकर प्रतिदर्श समष्टि बनाते हैं।

अर्थात् $A \cup \bar{A} = S$

$\therefore$ $P(A \cup \bar{A}) = P(S)$

$\Rightarrow P(A) + P(\bar{A}) = 1$

$\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$,

इसे कोटिपूरक नियम कहते हैं।

कोटिपूरक नियम: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

उदाहरण 19.11. यदि वर्षा होने की प्रायिकता 0.3 है। वर्षा के अनुकूल और वर्षा के प्रतिकूल संयोगानुपात ज्ञात कीजिए।

हल : माना A घटना है कि वर्षा होगी

$\therefore \qquad P(A) = 0.3$

कोटिपूरक नियम के अनुसार

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$= 1 - 0.3 = 0.7$$

अब वर्षा का अनुकूल संयोगातुपात

$$\frac{0.3}{0.7} \text{ या } 3 \text{ से } 7 \text{ (या } 3:7).$$

वर्षा का प्रतिकूल संयोगनुपात

$$\frac{0.7}{0.3} \text{ या } 7 \text{ से } 3.$$

यदि किसी घटना का अनुकूल या प्रतिकूल संयोगानुपात दिया गया हो तो उसकी प्रायिकता निम्नलिखित नियम से निकाली जा सकती है।

यदि A का अनुकूल संयोगनुपात $a:b$ है तो

$$P(A) = \frac{a}{a+b}.$$

यदि A का प्रतिकूल संयोगानुपात $a:b$ है तो

$$P(A) = \frac{b}{a+b}.$$

हम ऊपर लिखे नियम को सिद्ध कर सकते हैं।

माना A का संयोगानुपात $a:b$ है तो संयोगानुपात की परिभाषा अनुसार:

$$\frac{P(A)}{P(\bar{A})} = \frac{a}{b}.$$

कोटिपूरक नियम द्वारा

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$\frac{P(A)}{1-P(A)} = \frac{a}{b} \quad \text{या} \quad b\,P(A) = a - a\,P(A)$$

$$\text{या} \quad b\,P(A) + a\,P(A) = a \quad \text{या} \quad (a+b)\,P(A) = a$$

$$\boxed{P(A) = \frac{a}{a+b}}$$

इसी तरह से हम सिद्ध कर सकते हैं

$$P(\bar{A}) = \frac{b}{a+b}$$ जब घटना A का प्रतिकूल संयोगानुपात b : a है।

उदाहरण 19.12. क्या निम्नलिखित प्रायिकताएं तर्क संगत हैं। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए :

(a) $P(A) = P(B) = 0.6$, $P(A \text{ और } B) = 0.05$

(b) $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.4$, $P(A \text{ और } B) = 0.1$

(c) $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.7$, $P(A \text{ और } B) = 0.4$

हल : (a) $P(A \text{ या } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ और } B) = 0.6 + 0.6 - 0.05 = 1.15$

क्योंकि $P(A \text{ या } B) > 1$ संभव नहीं है इसलिए इसकी प्रायिकता तर्कसंगत नहीं है।

(b) $P(A \text{ या } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ और } B) = 0.5 + 0.4 - 0.1 = 0.8$

$P(A \text{ या } B) < 1$

और $P(A \text{ और } B) < P(A)$

$P(A \text{ और } B) < P(B)$

इसलिए ये प्रायिकताएं तर्कसंगत हैं।

(c) इस भाग में $P(A \text{ और } B) = .4$ जो कि $P(A) = .2$ से बड़ी है इसलिए यह प्रायिकता तर्कसंगत नहीं है।

उदाहरण 19.13. एक बॉक्स में 8 सफेद गेंद और दो हरी गेंद हैं इसमें से तीन गेंद यादृच्छिक रूप से निकाली गईं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाली गई गेंदों में से कम से कम एक हरी गेंद हो।

हल : बक्से में 8 सफेद और दो हरी गेंद हैं।

तीन गेंद $^{10}C_3$ प्रकार से निकाली जा सकती हैं। ($^{10}C_3 = 120$)

मान लीजिए कि घटना A = कम से कम एक हरी गेंद। हम घटना A के विभिन्न परिणामों की गणना करते हैं।

1. एक हरी गेंद 2 सफेद गेंदें
2. दो हरी गेंदे और एक सफेद गेंद

1. के लिए अनुकूल परिणाम $= {}^2C_1 \times {}^8C_2 = 2 \times 28 = 56$

2. के लिए अनुकूल परिणाम है $= {}^2C_2 \times {}^8C_1 = 1 \times 8 = 8$

∴ कम से कम एक हरी गेंद आने की प्रायिकता

P(कम से कम एक हरी गेंद) = P (एक हरी गेंद) + P (दो हरी गेंदें)

$$= \frac{56}{120} + \frac{8}{120}$$

$$= \frac{64}{120} = \frac{8}{15}$$

उदाहरण 19.14. एक बॉक्स में से यादिृच्छिक रूप से एक- एक करके दो गेंद प्रतिस्थापना सहित निकाली जाती हैं इस बॉक्स में 5 नीली और 10 लाल गेंद हैं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि या तो दोनों गेंद नीली हों या दोनों लाल।

हल : मान लीजिए कि घटना A = दोनों नीली गेंद, घटना B = दोनों लाल गेंद

घटना A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएं हैं।

गणना के मूलभूत सिद्धान्त के अनुसार घटना A के अनुकूल परिणाम

$$A = 5 \times 5 = 25.$$

घटना B के अनुकूल परिणाम $\quad B = 10 \times 10 = 100.$

इस पूरी घटना के कुल अनुकूल परिणाम $= 15 \times 15 = 225$

$\therefore \qquad P(A) = \dfrac{25}{225} = \dfrac{1}{9}$ और $P(B) = \dfrac{100}{225} = \dfrac{4}{9}.$

क्योंकि घटनाएं परस्पर अपवर्जी हैं P (A या B) = P(A) + P(B)

$$= \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

P (दो नीली गेंद या दो लाल गेंद) $= \dfrac{5}{9}$

देखें आपने कितना सीखा 19.3

1. ताश की गड्डी में से एक पत्ता निकाला गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह पत्ता या तो बेगम या पान का हो।
2. एक ही बार में दो पासे फेंके गए। अंकों का योग 7 या 12 होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
3. भारतीय क्रिकेट टीम का 2010 विश्वकप में जीतने के अनुकूल संयोगानुपात 9 से 7 है। भारतीय टीम की विजय की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
4. टीम A के जीतने का प्रतिकूल संयोगानुपात 5 से 7 है। टीम के जीतने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
5. दो पासे फेंके गए और सफल घटना वह है जब अंकों का योग 4 या 5 से विभाजित होता हो। सफल घटना की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
6. पूरी ताश में से दो पत्ते पुर्नस्थापना सहित निकाले गए। इसकी क्या प्रायिकता है कि दोनों पत्ते काले हों या दोनों लाल।
7. एक अच्छी तरफ फेंटी गई ताश की गड्डी में से एक पत्ता निकाला गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाला गया पत्ता इक्का हो या काले रंग का हो।
8. दो पासे फेंके गए। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पहले पासे में 3 का गुणज आए या दोनों में आने वाले अंकों का योग 8 हो।

9 (a) एक साथ दो पासे फेंके जाने पर अंकों का योग 5 या 7 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(b) A और B दो परस्पर अपवर्जी घटनाऐं है: जबकि $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$ तो (A या B) ज्ञात कीजिए।

10. एक बक्से में 12 बल्ब हैं जिनमें से 5 खराब हैं, सारे बल्ब एक जैसे हैं और उनको चुनने की समान प्रायिकता है। 3 बल्ब यादृच्छिक रूप से निकाले जाते हैं, कम से कम दो बल्ब खराब आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

11. दो पासे एक साथ फेंके गए। प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब
    (a) दोनों पर अलग-अलग अंक आएं
    (b) दोनों पर आने वाले अंकों का योग कम से कम 3 हो।

12. एक पति-पत्नी के तीन बच्चे हैं। इसकी क्या प्रायिकता होगी कि कम से कम एक लड़का हो और एक लड़की हो।

13. नीचे दी गई प्रायिकता के लिए अनुकूल और प्रतिकूल संयोगानुपात ज्ञात कीजिए।

    (a) $P(A) = 0.7$ (b) $P(A) = \frac{4}{5}$

14. A की प्रायिकता ज्ञात कीजिए जबकि
    (a) A के अनुकूल संयोगानुपात है 7 से 2 (b) A के प्रतिकूल संयोगानुपात है 10 से 7 है।

15. नीचे लिखी गई प्रायिकताओं में से कौन असंगत है?
    (a) $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$, $P(A$ और $B) = 0.4$
    (b) $P(A) = P(B) = 0.4$, $P(A$ और $B) = 0.2$
    (c) $P(A) = 0.85$, $P(B) = 0.8$, $P(A$और $B) = 0.61$

17. एक थैला जिसमें 5 सफेद और 10 हरी गेंद हैं, में से दो गेंद यादृच्छिक रूप से निकाली गईं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि कम से कम 1 सफेद गेंद हो।

18. अच्छी तरह फेंटी गई ताश की गड्डी में से दो पत्ते यादृच्छिक रूप से निकाले गए जो पुन: रखे जाते हैं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि दोनों पत्ते एक जैसे (सूट के) हों।

    अत: दो स्वतंत्र घटनाओं के एक साथ घटित होने की प्रायिकता उनकी अलग-अलग प्रायिकताओं के गुणनफल के समान होती हैं।

19.6 स्वतन्त्र घटनाओं के लिए प्रायिकता का गुणात्मक नियम

आइए स्वतन्त्र घटनाओं की परिभाषा याद करें

दो घटनाएं A और B स्वतन्त्र घटनाऐं होती हैं जब एक के घटित होने का दूसरी घटना पर प्रभाव न हो। पहला सिक्का फेंकने पर चित्त आए और दूसरा सिक्का फेंकने पर पट आए। ये दोनों स्वतन्त्र घटनाऐं हैं। इसी तरह से यदि एक ही सिक्का हो और पहली बार फेंकने पर चित आ जाए और दूसरी बार फेंकने पर पट आ जाये तो भी ये स्वतन्त्र घटनाएं हैं। अब यदि हम ताश की गड्डी में से एक इक्का निकालना चाहते हैं और उसको वापस रखे बिना दूसरी बार इक्का निकालना चाहते हैं तो दोनों घटनाएं स्वतन्त्र नहीं हैं। पहली घटना की प्रायिकता $\frac{4}{52}$ है, जब की दूसरी घटना की प्रायिकता $\frac{4}{51}$ होगी क्योंकि पहला पत्ता पुन: नहीं रखा गया।

टिप्पणी:

यदि पत्ता पुन: रख कर दूसरा पत्ता खींचा जाए तो दोनों घटनाएं स्वतंत्र होंगी।

क्या कोई ऐसा नियम है जिससे हम बता सकते हैं कि घटनाएं स्वतन्त्र हैं?

दो स्वतन्त्र घटनाओं की जो एक बार एक घटित होती हैं उनकी प्रायिकता कैसे निकाली जाए।

यदि A और B दो स्वतन्त्र घटनाऐं है तो

$$P\ (A \text{ और } B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\text{और } \ P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$$

इसलिए दो स्वतन्त्र घटित होने वाली समक्षणिक घटनाओं की प्रायिकता, दोनों घटनाओं की अलग-अलग प्रायिकताओं के गुणनफल के बराबर होती है।

ऊपर का नियम दो से अधिक स्वतन्त्र घटनाओं के लिए भी उपयोग में लाया जा सकता है। अर्थात

$$P(A \cap B \cap C...) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)...$$

विलोमत: यदि घटना A और B की प्रायिकता घटना A और घटना B की प्रायिकता के गुणनफल के बराबर हो तो दोनों घटनाएं स्वतन्त्र होती हैं।

उदाहरण 19.15. एक पासा दो बार फेंका गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि हर पासे पर 4 से बड़ा अंक आए।

हल : माना घटना A = 4 से बड़ा अंक पहले पासे पर और घटना B = 4 से बड़ा अंक दूसरे पासे पर।

साफ है कि घटना A और B स्वतन्त्र हैं।

पहला पासा फेंकने के अनुकूल परिणाम = 5,6

$$\therefore \qquad P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

इसी तरह से $P(B) = \frac{1}{3}$

$$P\ (A \text{ और } B) = P\ (A) \times P(B)$$

$$\text{जब} \qquad = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

उदाहरण 19.16. अरूण और तरूण ने नौकरी के लिए एक परीक्षा दी। अरूण के पास होने की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ और तरूण के पास होने की प्रायिकता $\frac{1}{5}$ है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(a) दोनों पास हो जाएं

(b) कोई भी पास न हो

(c) कम से कम एक पास हो

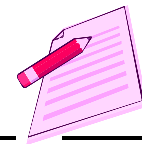
(d) दोनों में से केवल एक पास हो

हल : अरूण के पास होने की प्रायिकता $= P(A) = \frac{1}{3}$

तरूण के पास होने की प्रायिकता $= P(T) = \frac{1}{5}$

(a) जब दोनों पास हो जाएंगे $= P(A)\ P(T) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$

(b) (P) कोई भी पास न हो : P (दोनों नहीं होंगे) $= P(\bar{A})P(\bar{T})$



$$= \left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{3}\times\frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

(c) P (कम से कम एक पास हो) $= 1 - P$ (कोई भी पास न हो)

$$= 1 - P(\bar{A})P(\bar{T}) = 1-\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$$

$$= 1-\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\right) = 1-\frac{8}{15} = \frac{7}{15}$$

(d) P (दोनों में से एक पास होगा)

$$= P(A)P(\bar{T}) + P(\bar{A})\ P(T)$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

उदाहरण 19.17. तीन बच्चों को एक प्रश्न हल करने को दिया गया । इस प्रश्न को हल करने की तीनों की प्रायिकताएं क्रमशः $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ और $\frac{1}{4}$ हैं। प्रश्न के हल होने की प्रयिकता ज्ञात कीजिए।

हल : $p_1 = \frac{1}{2},\ p_2 = \frac{1}{3},\ p_3 = \frac{1}{4}$

(1) यदि तीनों में से एक प्रश्न को हल कर ले तो P (कम से कम एक प्रश्न हल करता है)

=1–P (जब कोई भी हल नहीं करता)........(1)

P (जब कोई भी हल नहीं करता)

$$= (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

यह मान (1) में रखने पर

P (कम से कम एक बच्चा प्रश्न हल करता है) $= 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

प्रश्न के हल होने की प्रायिकता $\frac{3}{4}$ है।

उदाहरण 19.18. पुनः वापस रखते हुए एक बक्से से दो गेंद यादृच्छिक रूप से निकाली जाती हैं। इसमें 15 लाल और 10 सफेद गेंद हैं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(a) दोनों गेंदे लाल हो

(b) पहली गेंद लाल और दूसरी सफेद हो

(c) दोनों में एक सफेद और एक लाल हो।

हल : (a) माना घटना A = जब प्रथम गेंद लाल हो, घटना B = जब द्वितीय गेंद लाल हो। क्योंकि गेंद पुनः वापस रखते हुए निकाले गये हैं, इसलिए

$$P(A) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5},\ P(B) = \frac{3}{5}$$

क्योंकि A और B दोनों स्वतन्त्र घटनाएँ हैं

$$P(\text{दोनों लाल}) = P(A \text{ और } B)$$

$$= P(A) \times P(B) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

(b) माना घटना A= प्रथम निकाली गई गेंद लाल हो, B = द्वितीय निकाली गई गेंद सफेद हो।

$$\therefore \quad P(A \text{ और } B) = P(A) \times P(B) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$$

क्योंकि A और B दोनों स्वतन्त्र घटनाएँ हैं।

(c) माना घटना WR= पहले सफेद गेंद फिर लाल गेंद और घटना RW= पहले लाल गेंद फिर सफेद गेंद तो WR और RW परस्पर अपवर्जी घटनायें हैं।

$$\therefore \quad P(\text{एक सफेद और एक लाल}) = P(WR \text{ या } RW) = P(WR) + P(RW)$$

$$= P(W)\,P(R) + P(R)\,P(W)$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}$$

उदाहरण 19.19. एक पासा तीन बार फेंका गया। अंक 5 या 6 आने पर सफलता मानी जाती है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि जब (a) तीनों बार सफलता मिले (b) दो बार सफलता मिले (c) ज्यादा से ज्यादा दो बार सफलता मिले (d) कम से कम दो बार सफलता मिले।

हल : माना पासा फेंकने पर S = सफलता, F = असफलता

$$P(S) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(F) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(a) क्योंकि ये घटनाएँ स्वतंत्र हैं इसलिए स्वतंत्र घटनाओं के लिए गुणात्मक प्रमेय द्वारा

$$P(SSS) = P(S)\; P(S)\; P(S)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

(b)

$$P(SSF) = P(S)\,P(S)\,P(F)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$$

दो सफलताएँ ${}^3C_2$ तरह से प्राप्त हो सकती हैं।

$$\therefore \quad P(\text{दो सफलता के लिए}) = {}^3C_2 \times \frac{2}{27} = \frac{2}{9}$$

(c) $P(\text{ज्यादा से ज्यादा दो सफलता}) = 1 - P(3 \text{ सफलता})$

$$= 1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}$$

(d) $P(\text{कम से कम दो सफलता}) = P(\text{दो सफलता}) + P(3 \text{ सफलता})$

$$= \frac{2}{9} + \frac{1}{27} = \frac{7}{27}$$

उदाहरण 19.20. ताश की गड्डी में से किसी एक पत्ते को चुनना समप्रायिक है। बताइए कि निम्न में से कौन सी घटनायें स्वतन्त्र हैं?

(i) A: निकाला गया पत्ता हुकम का है B: निकाला गया पत्ता इक्का है।

(ii) A: निकाला गया पत्ता काले रंग का है B: निकाला गया पत्ता बादशाह है।

(iii) A: निकाला गया पत्ता बादशाह या बेग़म है B: निकाला गया पत्ता बेग़म या गुलाम है।

हल: (i) 52 ताश के पत्तों में हुकम के 13 पत्ते होते हैं।

$$\therefore \quad P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

52 ताश के पत्तों में 4 इक्के होते हैं

$$\therefore \quad P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

(A और B) = (हुकम का इक्का)

$$\therefore \quad P(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

अब $\quad P(A)\; P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{52}$

$$P(A \cap B) = P(A).\, P(B)$$

$\therefore$ घटनाएँ A और B स्वतन्त्र हैं।

(ii) ताश में 26 काले रंग के पत्ते होते हैं।

$$\therefore \quad P(A) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

ताश में चार बादशाह होते हैं

$$P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

(A और B) यानि कि $A \cap B = \{$2 काले पत्ते वाले बादशाह$\}$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$

अब, $\quad P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{26}$

$$P(A \cap B) = P(A)\; P(B)$$

$\therefore$ घटनाएँ स्वतन्त्र हैं।

(iii) ताश में चार बादशाह और चार बेग़म के पत्ते होते हैं।

$\therefore$ घटना A के अनुकूल परिणाम = 8

$$\therefore \quad P(A) = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$$

इसी तरह $P(B) = \dfrac{2}{13}$

$A \cap B$ = बेग़म (वाले पत्ते)

$\therefore \quad P(A \cap B) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$

$\therefore \quad P(A) \times P(B) = \dfrac{2}{13} \times \dfrac{2}{13} = \dfrac{4}{169}$

$P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$

इसलिए घटनाएँ A और B स्वतन्त्र नहीं हैं।

देखें आपने कितना सीखा 19.4

1. एक पति-पत्नि किसी नौकरी के लिए साक्षात्कार के लिए बुलाए जाते हैं। पति के सफल होने की प्रायिकता $\frac{1}{7}$ है और पत्नी की सफल होने की प्रायिकता $\frac{1}{5}$ है। क्या प्रायिकता है कि
   (a) दोनों में से केवल एक सफल होगा।
   (b) दोनों सफल हो जाएंगे।
   (c) दोनों में से कोई भी सफल नहीं होगा
   (d) कम से कम एक सफल होगा।

2. किसी प्रश्न को स्वतन्त्र रूप से हल करने की राजू और सोमा की प्रायिकता क्रमशः $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ है। यदि दोनों स्वतन्त्र रूप से समस्या को हल करते हैं तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब
   (a) समस्या हल हो जाए
   (b) दोनों में से केवल एक ही समस्या को हल कर सके।

3. एक पासा दो बार फेंका गया। प्रत्येक बार 3 से बड़ा अंक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

4. सीता एक साक्षात्कार में दो पदों A तथा B के लिए आती है। दोनों पदों का चयन स्वतन्त्र है। पहले पद के चयन के लिए उसकी सफलता की प्रायिकता $\frac{1}{5}$ है और दूसरे पद के चयन के लिए उसकी सफलता की प्रायिकता $\frac{1}{7}$ है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि
   (a) उसका चयन दोनों पदों के लिए हो।
   (b) उसका चयन कम से कम एक पद के लिए हो।

5. A,B,C द्वारा किसी प्रश्न को हल करने की प्रायिकतायें क्रमशः $\frac{1}{3}, \frac{2}{7}$ और $\frac{3}{8}$ है। यदि तीनों उस प्रश्न को एक साथ हल करने का प्रयास करें तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि केवल एक ही उस प्रश्न को हल कर सकेगा।

6. A ताश की गड्डी में से दो पत्ते निकालता है (पहला पत्ता वापस रखते हुए) और इसी समय B दो पासे फेंकता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब

   (a) A को दो पत्ते एक जैसे सूट के मिलते हैं और B को दो अंकों का योग 6 मिलता है।

   (b) A के दोनों गुलाम के पत्ते निकले और B के दोनों अंक एक जैसे आएं।

7. माना A जो इस समय 35 वर्ष का है के 65 वर्ष तक जीने का प्रतिकूल संयोगनुपात 9:7 है। B जो इस समय 45 वर्ष का है के 75 वर्ष तक जीने का प्रतिकूल संयोगानुपात 3:2 है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए की कम से कम एक अगले 30 वर्ष तक जीवित रहेगा।

8. एक बैग में 13 गेंदे हैं जिन पर 1 से 13 तक अंक लिखे हैं। इस घटना की सफलता एक सम संख्या आना है। दो गेंदें बैग में से निकाली जाती (एक निकालने के बाद पुनः वापस रखी जाएगी) हैं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि (a) दोनों बार सफलता मिले। (b) केवल एक बार सफलता मिले (c) कम से कम एक बार सफलता मिले (d) सफलता न मिले।

9. एक अच्छी तरह फेंटी गई ताश की गड्डी में से एक पत्ता निकाला गया। प्रत्येक पत्ते का चयन समप्रायिक है। निम्न में से कौन सी घटनाएं स्वतन्त्र हैं।

   (a) (A) निकाला गया पत्ता लाल है (B) निकाला गया पत्ता रानी है।

   (b) (A) निकाला गया पत्ता दिल है (B) निकाला गया पत्ता तस्वीर वाला पत्ता है।

19.7 प्रतिबंधी प्रायिकता (संभाव्यता)

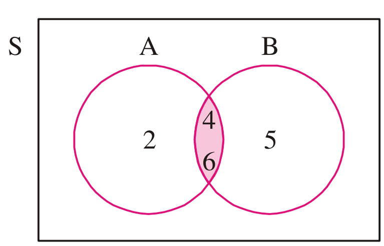
माना एक पासा फेंका गया और उसका परिणाम लिखा गया। माना घटना A है जब परिणाम सम संख्या है।

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

अब यदि हमें बता दिया जाए कि परिणाम 3 से बड़ा है तो इस सूचना का P (A) पर क्या प्रभाव पड़ेगा। माना इस परिणाम की घटना B है तो $B = \{4, 5, 6\}$। जब घटना B घटित होती है तो अंक 3 या उससे छोटे अंक आने की कोई संभावना नहीं रहती। घटना B के प्रतिदर्श समष्टि में 3 अवयव हैं। इन तीन अवयवों में दो सम संख्याऐं हैं। इसलिए यदि यह सूचना मिल जाए कि घटना B घटित हो गई है तो

$$P(A) = \frac{2}{3}$$



चित्र 19.7

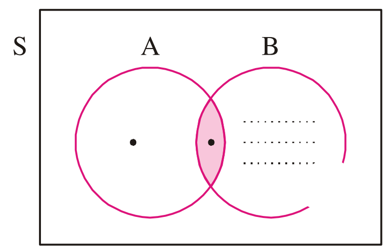
इस पूरी घटना की संभाव्यता को $P(A/B)$ द्वारा लिख सकते हैं। अब एक और घटना पर विचार करते है। एक प्रयोग में ताश की गड्डी में से एक पत्ता निकाला गया, हम चाहते हैं, ये पत्ता इक्का हो जिसका रंग काला हो। अब 52 समप्रायिक परिणाम संभव है और 2 काले इक्के हैं।

इसलिए इस घटना की संभाव्यता $P(A) = \frac{2}{52}$ है।

अब माना कि एक पत्ता निकाला गया और सूचना दी गई कि पत्ता हुकम का है। अब बताइए इस सूचना का घटना A पर क्या प्रभाव हुआ। यदि घटना B घटित हो जाती है (जिसमें हुकम का पत्ता निकला) तो प्रतिदर्श समष्टि के अवयव 52 से घट कर 13 रह जायेंगे। अब काले इक्के जो निकाले जाने हैं उनकी संख्या एक रह गई। अब घटना A की प्रायिकता नए प्रतिदर्श समष्टि के अनुसार गणना करने पर:

$$P(A/B) = \frac{1}{13}$$

ऊपर की घटना को एक बार फिर से समझते है। घटना A में एक काला इक्का निकाला जाता है। अब हम A की संभाव्यता निकालते हैं जब कि घटना B घटित हो चुकी है। B को सार्वत्रिक समुच्चय माना जाता है। इसलिए हमें A का सिर्फ वही हिस्सा गणना में लाना चाहिए जो B में हो। यानि कि हम $A \cap B$ की गणना करते हैं। (देखिये चित्र 31.8)



चित्र 19.8

A की प्रायिकता जबकि B घटित हो गई हो, को $A \cap B$ तथा B सम्मुचय की प्रविष्टियों के अनुपात से व्यक्त किया जाता है।

क्योंकि $n(A \cap B) = 1$ तथा $n(B) = 13$

तब, $$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{13}$$

ध्यान दें: $$n(A \cap B) = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

$$n(B) = 13 \Rightarrow P(B) = \frac{13}{52}$$

$$\therefore \quad P(A \mid B) = \frac{1}{13} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{13}{52}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

अब हम प्रतिबंधी प्रायिकता (संभाव्यता) की परिभाषा निम्न प्रकार से दे सकते हैं।

माना किसी प्रतिदर्श समष्टि के लिए घटना A और B परिभाषित है। माना $P(B) > 0$ तो घटना A की प्रतिबंधी प्रायिकता जब घटना B घटित हो चुकी हो, की गणना निम्न प्रकार होती है :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

इसी तरह $$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) > 0$$

घटना A प्रायिकता जब घटना B घटित हो चुकी हो। [$P(A/B)$ को सामान्यत: पढते हैं : "A की प्रायिकता जब B" दिया है]

उदाहरण 19.21. ऐसे परिवार लेते हैं जिनमें दो बच्चे (जुडवां नहीं) हैं। माना कि इन परिवारों का प्रतिदर्श समष्टि $\{BB, BG, GB, GG\}$ समप्रायिक होगा (यहां पर उदाहरण के लिए BG जन्म अनुक्रम 'लड़का लड़की' को दर्शाता है) माना घटना A में दोनों लड़के सफल परिणाम हैं और घटना B में कम से कम एक लड़का सफल परिणाम है। $P(A/B)$ ज्ञात कीजिए।

हल :
$$A = \{BB\}$$
$$B = \{BB, BG, GB\}$$
$$A \cap B = \{BB\}$$

$$\Rightarrow \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \quad P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

उदाहरण 19.22. एक स्कूल में लड़के और लड़कियों की संख्या समान है। लड़को की संख्या का 5% फुटबाल के खिलाड़ी हैं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि यादृच्छिक चयन में लड़का फुटबाल का खिलाड़ी हो।

हल : माना M = लड़का और F = फुटबाल का खिलाड़ी

हम $P(M \cap F)$ ज्ञात करना चाहते हैं

$$P(M) = \frac{1}{2} \quad (\because \text{लड़के और लड़कियों की संख्या बराबर है})$$

$$P(F \mid M) = 0.05$$

प्रतिबंधी प्रायिकता द्वारा

$$P(F \mid M) = \frac{P(M \cap F)}{P(M)}$$

या $$P(M \cap F) = P(M) \times P(F \mid M) = \frac{1}{2} \times 0.05 = 0.025$$

उदाहरण 19.23. यदि A और B दो घटनायें हों और

$P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.6$, $P(A \cap B) = 0.5$ तो निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $P(A \cup B)$ (ii) $P(B \mid A)$ (iii) $P(A \mid B)$.

हल : (i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8 + 0.6 - 0.5 = 0.9$

(ii) $$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.5}{0.8} = \frac{5}{8}$$

(iii) $$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.5}{0.6} = \frac{5}{6}$$

उदाहरण 19.24. एक सिक्का तब तक उछाला जाता है जब तक कि चित न आ जाए या फिर 3 बार उछाला जा चुका हो। अगर दिया जाए कि पहली बार में चित नहीं आया तो क्या प्रायिकता है कि सिक्का 3 बार उछाला गया है।

हल : दिया गया है कि चित्त पहली उछाल में नहीं आया, तो या तो दूसरी उछाल में आएगा या तीसरी में, या चित ना भी आए।

माना घटना B = पहली उछाल में चित नहीं'

$$B = \{TH, TTH, TTT\}$$

ये परस्पर अपवर्ती घटनायें हैं।

$\therefore$ $$P(B) = P(TH) + P(TTH) + P(TTT) \qquad .....(1)$$

अब $P(TH) = \frac{1}{4}$ ($\because$ इस घटना की समष्टि में चार अवयव हैं।)

और $P(TTH) = P(TTT) = \frac{1}{8}$ ($\because$ इस घटना की समष्टि में आठ अवयव हैं।)

ये मान (1) में रखने पर

$$P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

माना घटना A = जब सिक्का 3 बार उछाला गया।

$$A = \{TTH, TTT\}$$

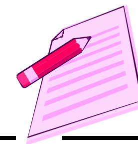
$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

यहाँ $(A \cap B) = A$

$\therefore$ $$P(A \mid B) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

देखें आपने कितना सीखा 19.5

1. ताश की गड्डी में से दो पत्ते पुर्नस्थापना रहित निकाले गए। क्या प्रायिकता है कि पहला पत्ता लाल हो ओर दूसरा काला हो?



2. एक परिवार का चयन करते हैं जिसमें 3 बच्चे हैं। इसका प्रतिदर्श समष्टि निम्न प्रकार का है:

$$\{ BBB, BBG, BGB, GBB, BGG, GBG, GGB, GGG \}$$

माना घटना A = परिवार में केवल दो लड़के हैं।

घटना B = पहला बच्चा लड़का है।

क्या प्रायिकता है कि परिवार में दो लड़के हों जबकि पहला बच्चा लड़का है।

3. ताश की गड्डी में से दो पत्ते निकाले गए (पहला पत्ता वापस नहीं रखते हुए) प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पहला पत्ता पान का है और दूसरा लाल रंग का।

4. यदि A और B दो घटनायें हैं और $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.2$, $P(A \cap B) = 0.1$ तो A की प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब B दिया हो। $P(B/A)$ भी ज्ञात कीजिए।

5. एक बक्से में 4 सफेद, 3 पीली और 1 हरी गेंद है। इसमें से वापस रखे बिना दो गेंदें निकाली जाती हैं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब एक सफेद और एक पीली गेंद निकले।

19.8 प्रायिकता और प्रतिबंधी प्रायिकता के गुणनफल नियम पर प्रमेय

प्रमेय 1: दो घटनाओं A और B के लिए

$$P(A \cap B) = P(A).P(B \mid A),$$

और

$$P(A \cap B) = P(B).P(A \mid B),$$

यहां $P(B/A) =$ B की प्रतिबंधी संभाव्यता जब A घटित हो गई।

$P(A/B) =$ A की प्रतिबंधी संभाव्यता जब B घटित हो गई।

उपपति : माना $n(S) =$ कुल समप्रायिक परिणाम, $n(A) =$ घटना A के अनुकूल परिणाम, $n(B) =$ घटना B के अनुकूल परिणाम और $n(A \cap B)$ दोनों घटनाओं के अनुकूल परिणाम

$$\therefore \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)},$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

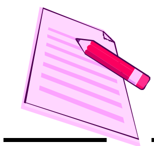
$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} \qquad .....(1)$$

घटना A/B का अनुकूल परिणाम घटना B के प्रतिदर्श समष्टि में से होना चाहिए यानि कि घटना A/B का प्रतिदर्श समष्टि B वाला होगा और $n(B)$ अवयवों में से $n(A \cap B)$ अवयवघटना A से संबंधित हैं।

$$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

(1) को हम इस तरह भी लिख सकते हैं:

$$P(A \cap B) = \frac{n(B)}{n(S)} \cdot \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = P(B) \cdot P(A \mid B)$$



इसी तरह हम सिद्ध कर सकते हैं:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B \mid A)$$

ध्यान कीजिए: यदि A और B स्वतन्त्र घटनाऐं हैं तो

$$P(A/B) = P(A) \text{ और } P(B/A) = P(B)$$

$$\therefore \quad P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

प्रमेय 2 : किसी प्रतिदर्श समष्टि S की दो घटनाएं यदि और केवल यदि स्वतन्त्र होंगी

यदि $$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

उपपति : A और B स्वतन्त्र घटनाऐं हैं तो

$$P(A \mid B) = P(A) \qquad (1)$$

हम जानते हैं: $$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (2)$$

(1) और (2) से $$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

अत:, यदि A और B स्वतन्त्र घटनाएं हैं तो A और B की प्रायिकता, A और B की प्रायिकताओं के गुणनफल के समान है।

विलोमत: यदि $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ तो

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

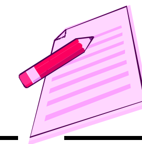
$$P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

यानि की A और B स्वतन्त्र घटनायें हैं।

19.9 बेज-प्रमेय से परिचय

सप्रतिबंध प्रायिकता में हमने किसी घटना की प्रायिकता इस प्रतिबंध के साथ ज्ञात करना सीखा है कि कोई दूसरी घटना पहले से घटित हो चुकी है। तीन सिक्कों में से एक सिक्के के चयन के परीक्षण की चर्चा करते हैं : यदि, I, $P(H) = \frac{1}{3}$ तथा $P(T) = \frac{2}{3}$, II, $P(H) = \frac{3}{4}$ एवं $P(T) = \frac{1}{4}$ और III, $P(H) = \frac{1}{2}$, $P(T) = \frac{1}{2}$ (सामान्य सिक्का)

यादृच्छिक रूप से किसी सिक्के का चयन करने के पश्चात् इसे उछाला जाता है। हम एक सिक्के के चयन की प्रायिकता ज्ञात कर सकते हैं $\left(\text{i.e. } \frac{1}{3}\right)$ और किसी भी परिणाम i.e. चित अथवा पट की प्रायिकता भी ज्ञात कर सकते हैं, यदि सिक्के का चयन दिया हुआ है। परन्तु क्या हम यह प्रायिकता ज्ञात कर सकते हैं कि चयनित सिक्का I, II अथवा III है जबकि यह दिया हुआ है कि परिणाम के रूप में चित प्राप्त किया गया है। इसके लिए हमें एक ऐसी



घटना की प्रायिकता ज्ञात करनी है जो दी हुई घटना से पूर्व घटित हो गई है। इस प्रकार की प्रायिकता वेज़ प्रेमय की सहायता से ज्ञात की जा सकती है। इस प्रमेय को प्रसिद्ध गणितज्ञ जॉन बेज के नाम से जाना जाता है। बेज प्रमेय के बारे में चर्चा करने से पूर्व आइए कुछ मूलभूत परिभाषाएं सीखते हैं।

परस्पर अपवर्जी एवं निशेष घटनाएँ :

एक प्रतिदर्श समष्टि S के लिए, घटनाएँ $E_1, E_2, \ldots E_n$ परस्पर अपवर्ती एवं निशेष घटनाएँ कहलाती हैं यदि

(i) $E_i \cap E_j = \phi, \forall\, i \neq j = 1, 2, \ldots\ldots n$ i.e. कोई भी दो घटनाएँ एक साथ नहीं घट सकतीं

(ii) $E_i \cup E_2 \cup \ldots. \cup E_n = S$, S के सभी परिणाम घटनाओं $E_1, E_2 \ldots E_n$ में सम्मिलित हैं।

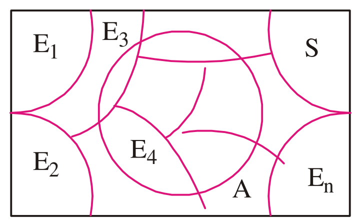
(iii) $P(E_i) > 0$ सभी $i = 1, 2, \ldots.. n$ के लिए।

19.10 सम्पूर्ण प्रायिकता की प्रमेय

मान लीजिए किसी प्रतिदर्श समष्टि S के लिए $E_1, E_2, \ldots., E_n$, परस्पर अपवर्ती एवं निशेष घटनाएँ हैं जहां $P(E_i) > 0, \ \forall\, i = 1, 2, \ldots n$. मान लीजिए कि A, प्रतिदर्श समष्टि S की कोई घटना है, तो

$$P(A) = P(E_1)\, P(A/E_1) + P(E_2)\, P(A/E_2) + \ldots + P(E_n)\, P(A/E_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(E_i) P(A/E_i)$$



$U(A \cap E_n)$

उपपत्ति : घटनाओं E_i एवं A को वेन चित्र से दर्शाया गया है :

दिया हुआ है

$S = E_1 \cup E_2, \cup E_3, \ldots \cup E_n$ और $E_i \cap E_j \neq \phi$.

हम लिख सकते हैं $A = A \cap S$

$= A \cap (E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n)$

$= (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup (A \cap E_3) \ldots (A \cap E_n)$

क्योंकि सभी E_i, परस्पर अपवर्ती हैं इसलिए $A \cap E_1, A \cap E_2 \ldots$ भी परस्पर अपवर्ती होंगे।

$\Rightarrow \quad P(A) = P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + P(A \cap E_3) + \ldots + P(A \cap E_n)$

$= P(E_1)\, P(A/E_1) + P(E_2)\, P(A/E_2) + \ldots + P(E_n)\, P(A/E_n)$

प्रायिकता के गुणन नियम के प्रयोग से

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) P(A/E_i)$$

19.11 बेज प्रमेय

यदि $E_1, E_2, \ldots E_n$ हमने प्रतिदर्श समष्टि S की परस्पर अपवर्ती, निशेष एवं अरिक्त घटनाएँ हैं $P(E_i) > 0 \ \forall\, i)$ और A शून्येतर प्रायिकता की कोई घटना हो, तो

$$P(E_i/A) = \frac{P(E_i)\, P(A/E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)\, P(A/E_i)} \forall\, i = 1, 2, \ldots n$$

उपपत्ति : सम्पूर्ण प्रायिकता के नियम से हम जानते हैं

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)\, P(A/E_i) \qquad \ldots(i)$$

प्रायिकता के गुणन नियम से हम प्राप्त करते हैं :

$$P(E_i|A) = \frac{P(A \cap E_i)}{P(A)} = \frac{P(E_i)\, P(A/E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i) P(A/E_i)} \qquad \text{(i) के प्रयोग से}$$

यह बेज प्रमेय की उपपत्ति है। आइए अब हम प्रायिकता ज्ञात करने के लिए बेज प्रमेय का प्रयोग करते हैं।

उदाहरण 19.25. निम्नलिखित निर्देशों के साथ तीन सर्वसम (आकार एवं रूप दोनों में) सिक्के दिए हुए है।

सिक्का I : $P(H) = \frac{1}{3}$, $P(T) = \frac{2}{3}$

सिक्का II : $P(H) = \frac{3}{4}$ $P(T) = \frac{1}{4}$

सिक्का III : $P(H) = \frac{1}{2}$, $P(T) = \frac{1}{2}$ (सामान्य सिक्का)

एक सिक्के का यादृच्छ रूप से चयन किया जाता है और इसे उछाला जाता है। यदि परिणाम के रूप में चित प्राप्त होता है, तो इसकी प्रायिकता क्या है कि चयनित सिक्का III था?

हल : मान लीजिए E_1, E_2, E_3 क्रमशः सिक्के I, II, III के चयन की घटनाएँ हैं,

तो $$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$$

मान लीजिए A घटना है : चयनित सिक्के को उछालने पर चित प्राप्त होता है।

तो $$P(A/E_1) = P\,(\text{सिक्के I पर स्थित}) = \frac{1}{3}$$

$$P(A/E_2) = P\,(\text{सिक्के II पर चित}) = \frac{3}{4}$$

$$P(A/E_3) = P\,(\text{सिक्के III पर चित}) = \frac{1}{2}$$

अब यह प्रायिकता कि उछाला हुआ सिक्का, III है $= P(E_3/A)$

$$= \frac{P(E_3)\, P(A/E_3)}{P(E_1)P(A/E_1) + P(E_2)P(A/E_2) + P(E_3)P(A/E_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}} = \frac{6}{4+9+6} = \frac{6}{19}$$

उदाहरण 19.26. दो थैले I दिए हुए हैं। थैले I में 4 लाल और 3 काली गेंदें हैं जबकि थैले II में 6 लाल और 5 काली गेंदें हैं। एक थैले का चयन यादृच्छया किया जाता है और उसमें से एक गेंद निकाली जाती है। यदि यह दिया हुआ है कि निकाली गई गेंद लाल है, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह गेंद थैले II से निकाली गई थी।

हल : मान लीजिए E_1 एवं E_2 क्रमशः थैला I थैला II के चयन की घटनाएँ हैं और A लाल गेंद के चयन की घटना है।

इसलिए $$P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$$

एवं $$P(A/E_1) = P(\text{थैला I से लाल गेंद निकालने की प्रायिकता}) = \frac{4}{7}$$

$$P(A/E_2) = P(\text{थैला II से लाल गेंद निकालने की प्रायिकता}) = \frac{6}{11}$$

अब बेज प्रमेय के अनुसार

$P(E_2/A) = P$ (यदि यह ज्ञात है कि निकाली गई गेंद लाल है, तो चयनित थैला II है)

$$= \frac{P(E_2)\,P(A/E_2)}{P(E_1)\,P(A/E_1) + P(E_2)P(A/E_2)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}}{\frac{1}{2}\times\frac{6}{11}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}} = \frac{4/7}{\frac{6}{11}+\frac{4}{7}} = \frac{22}{43}$$

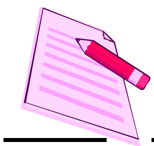
देखें आपने कितना सीखा 19.6

1. थैला I में 3 नीली तथा 4 सफेद गेंदें हैं और थैला II में 4 नीली तथा 3 सफेद गेंदें हैं। एक थैले का यादृच्छया चयन किया गया और चयनित थैले में से एक गेंद निकाली गई। यदि निकाली गई गेंद सफेद हैं, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह गेंद थैले II से निकाली गई थी।
2. एक कारखाने में A तथा B दो मशीनें हैं। पूर्व विवरण से पता चलता है कि कुल उत्पादन का 60% मशीन A तथा 40% मशीन B द्वारा किया जाता है। इसके अतिरिक्त मशीन A का 2% तथा मशीन B का 1% उत्पाद खराब है। यदि कुल उत्पादन का एक ढेर बना लिया जाता है और उस ढेर से यादृच्छया निकाली गई वस्तु खराब हो, तो इस वस्तु के 'मशीन A' द्वारा बने होने की प्रायिकता क्या होगी?
3. जब कोई व्यक्ति वास्तव में टी.बी. से पीड़ित है तो छाती के एक्स–रे के निरीक्षण से टी.बी. के पता चलने की प्रायिकता 0.99, एक्स–रे के आधार पर डाक्टर द्वारा व्यक्ति को टी.बी. होने का गलत निदान करने की प्रायिकता 0.001 है। किसी शहर में 10,000 व्यक्तियों में से एक व्यक्ति को टी.बी. है। यदि यादृच्छया चयनित एक व्यक्ति को टी.बी. पाई जाती है, तो उस व्यक्ति को वास्तव में टी.बी. होने की प्रायिकता क्या है?

19.12 एक यादृच्छिक चर का प्रायिकता बंटन

19.12.1 याद्रच्छिक चर

पूर्व खंड में आपने कुछ प्रतिबंधों के अन्तर्गत विभिन्न घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात करना सीखा है। आइए एक सिक्के को चार बार उछालने की चर्चा करते हैं। सभी संभावित परिणामों को एक प्रतिदर्श समष्टि में इस प्रकार दर्शाया जा सकता है।



S = {HHHH, HHHT, HHTH, HTHH, THHH, THHT, HHTT, HTTH, TTHH, HTHT, THTH, HTTT, THTT, TTHT, TTTH, TTTT}

इस प्रतिदर्श समष्टि के प्रत्येक परिणाम के साथ एक संख्या जोड़ने की बात कर सकते हैं। उदाहरण के लिए 'चितों की संख्या' के संगत प्रत्येक परिणाम के लिए एक संख्या हैं। इस संख्या को हम X कह सकते हैं।

स्पष्टतः

X(HHHH) = 4, X(HHHT) = 3, X(HHTH) = 3

X(THHH) = 3, X(HHTT) = 2, X(HTTH) = 2

X(TTHH) = 2, X(HTHT) = 2, X(THTH) = 2

X(THHT) = 2, X(HTTT) = 1, X(THTT) = 1

X(TTHT) = 1, X(TTTH) = 1, X(TTTT) = 0

इस प्रकार हम देखते हैं कि प्रत्येक परिणाम के संगत 0 एवं 4 के बीच X का कोई मान है। इस प्रकार के चर X को यादृच्छिक चर कहते हैं।

परिभाषा

यादृच्छिक चर वह फलन होता है जिसका प्रांत किसी यादृच्छिक परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि होता है और परिसर एक वास्तविक संख्या होती है।

उदाहरण 19.27. दो पासे एक साथ फेंके जाते हैं। यादृच्छिक चर X, 'पासों के ऊपरी फलनों की संख्याओं का योग' का मान लिखिए।

हल : इस परीक्षण के प्रतिदर्श समष्टि में 36 तत्व हैं

S = {(1, 1), (1, 2), (1, 3) .... (1, 6)
(2, 1), (2, 2), (2, 3) .... (2, 6)
....
....
....
(6, 1), (6, 2), (6, 3) .... (6, 6)}

स्पष्टतः प्रत्येक युग्म का योग 2 से 12 के बीच कोई संख्या है। इसलिए यादृच्छिक चर X के निम्नलिखित मान हैं :

X(1, 1) = 2

X((1, 2), (2, 1)) = 3

X((1, 3), (2, 2), (3, 1)) = 4

X((1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) = 5

X((1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1) = 6

X((1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1), = 7

X((2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) = 8

X((3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3) = 9

X((4, 6), (5, 5), (6, 4) = 10

X((5, 6), (6, 5)) = 11

X((6, 6)) = 12

19.12.2 यादृच्छिक चर की प्रायिकता बंटन

ताश के 52 पत्तों की एक सुमिश्रित गड्डी से दो पत्ते उत्तरोत्तर (एक के बाद दूसरा) प्रतिस्थापना के साथ निकालने के परीक्षण की चर्चा करते हैं। इस प्रकार निकाले गए दो पत्तो में इक्कों की संख्या पर हम अपना ध्यान केन्द्रित करते हैं। इसे X से दर्शाते हैं। स्पष्टतः X के मान 0, 1, 2 हो सकते हैं।

इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि इस प्रकार है : S = {(इक्का, इक्का), (इक्का, इक्का नहीं), (इक्का नहीं, इक्का), (इक्का नहीं, इक्का नहीं)}

X(इक्का, इक्का) = 2

X{(इक्का, इक्का नहीं) अथवा (इक्का नहीं, इक्का)} = 1

और X{(इक्का नहीं, इक्का नहीं)} = 0

P(X = 2) = P(इक्का, इक्का) $= \frac{4}{52}\times\frac{4}{52} = \frac{1}{13}\times\frac{1}{13} = \frac{1}{169}$

P(X = 1) = P[(इक्का, इक्का नहीं) अथवा (इक्का नहीं, इक्का)]

$$= \frac{4}{52}\times\frac{48}{52}+\frac{48}{52}\times\frac{4}{52}$$

$$= \frac{12}{169}+\frac{2}{169}=\frac{24}{169}$$

P(X = 0) = P(इक्का नहीं, इक्का नहीं)

$$= \frac{48}{52}\times\frac{48}{52}=\frac{144}{169}$$

यादृच्छिक चर के मान और उनके संगत प्रायिकताओं का वर्णन प्रायिकता बंटन कहलाता है।

परिभाषा

यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन X के प्रत्येक मान के लिए प्रायिकताओं का बंटन है। यादृच्छिक चर X की प्रायिकता बंटन को निम्न प्रकार दर्शाया जाता है :

X_i	:	x_1	x_2	x_3	....	x_n
$P(X_i)$	:	P_1	P_2	P_3	....	P_n

जहाँ $P_i > 0, \sum_{i=1}^{n} P_i = 1, \forall\, i = 1, 2, 3, \ldots n$.

वास्तविक संख्याएँ $x_1, x_2, \ldots x_n$ चर X के संभावित मान है और यादृच्छिक चर x के मान X_i की प्रायिकता P_i है, इसे $P(X = x_i) = P_i$ के रूप में लिखा जाता है।

अतः ताश के 52 पत्तों की सुमिश्रित गड्डी से दो पत्तों को उत्तरोत्तर प्रतिस्थापना के साथ निकालने का प्रायिकता बंटन इस प्रकार है :

X	:	0	1	2
$P(x_i)$	:	$\frac{144}{169}$	$\frac{24}{169}$	$\frac{1}{169}$

ध्यान दीजिए प्रायिकता बंटन में प्रत्येक प्रायिकता का मान 0 एवं 1 के मध्य होना चाहिए और सभी प्रायिकताओं का योग 1 होना चाहिए।

$$\Sigma P_i = \frac{144}{169}+\frac{24}{169}+\frac{1}{169}=\frac{144+24+1}{169}=1$$

उदाहरण 19.28. जाँचिए कि निम्न बंटन प्रायिकता बंटन है या नहीं

X	2	1	0	–1	–2
P(X)	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2

हल : सभी प्रायिकताएँ P(X) धनात्मक हैं और 1 से छोटी हैं। इसके अतिरिक्त

$$\Sigma P(x_i) = 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.2 + 0.2$$
$$= 1.0$$

अतः दिया हुआ बंटन यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन है।

उदाहरण 19.29. एक यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन निम्न प्रकार है :

X	–1	–2	–3	–4	–5	–6
P(X)	$\frac{1}{3}$	k	$\frac{1}{4}$	$2k$	$\frac{1}{6}$	$\frac{k}{4}$

ज्ञात कीजिए : (1) k (2) $P(X > -4)$ (3) $P(X < -4)$

हल : (1) दिए हुए बंटन में प्रायिकताओं का योग 1 होना चाहिए।

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}+k+\frac{1}{4}+2k+\frac{1}{6}+\frac{k}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4+12k+3+24k+2+3k}{12} = 1$$

$$39k + 9 = 12$$

$$\Rightarrow \quad 39k = 3$$

$$\therefore \quad k = \frac{1}{13}$$

(2)
$$P(X > -4) = P(x = -3) + P(x = -2) + P(x = -1)$$
$$= \frac{1}{4}+k+\frac{1}{3} = \frac{1}{4}+\frac{1}{13}+\frac{1}{3}=\frac{103}{156}$$

(3)
$$P(X < -4) = P(x = -5) + P(x = -6)$$
$$= \frac{1}{6}+\frac{k}{4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{13\times 4}=\frac{29}{156}$$

टिप्पणी

उदाहरण 19.30. तीन सिक्कों को एक साथ उछालने पर पटों की संख्या की प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

हल : तीन सिक्कों को एक साथ उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि इस प्रकार है :

S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}

मान लीजिए पटों की संख्या X है।

स्पष्टतः X के मान 0, 1, 2, 3 हैं।

अब
$$P(X = 0) = P(HHH) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned}P(X = 1) &= P(HHT \text{ or } HTH \text{ or } THH)\\ &= P(HHT) + P(HTH) + P(THH)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X = 2) &= P(HTT \text{ or } THT \text{ or } TTH)\\ &= P(HTT) + P(THT) + P(TTH)\\ &= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

$$P(X = 3) = P(TTT) = \frac{1}{8}.$$

अतः अभीष्ट प्रायिकता बंटन इस प्रकार है :

X	:	0	1	2	3
P(X)	:	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

देखें आपने कितना सीखा 19.7

1. बताइए निम्न में से कौन से बंटन यादृच्छिक चर का प्रायिकता बंटन नहीं हैं? अपने उत्तर को उचित ठहराइए।

(a)

x	100	200	300
$P(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

(b)

Y	0	1	2	3	4	5
$P(y)$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6

(c)

x_i	–1	–2	0	2	1
P_i	0.2	0.15	–0.5	0.45	0.7

(d)

x_i	2	3	4	5
P_i	0.4	0.1	0.2	0.2

2. निम्नलिखित प्रश्न हल कीजिए :
   (a) एक थैले में 4 लाल तथा 3 सफेद गेंदें हैं और उसमें से दो गेंदें उत्तरोत्तर प्रतिस्थापना के साथ निकाली जाती हैं, तो लाल गेंदों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।
   (b) जब दो पासे एक साथ फेंके जाते हैं तो छः की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।
   (c) जब दो पासे एक साथ फेंके जाते हैं तो पासों के द्विक (दोनों पासों पर एक जैसी संख्या) होने की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

19.13 यादृच्छिक चर का माध्य एवं प्रसरण

19.13.1 माध्य

यादृच्छिक चर X के माध्य को μ से प्रदर्शित करते हैं ओर इसे

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i \text{ द्वारा परिभाषित}$$

किया जाता है जहाँ $\Sigma P_i = 1$, $P_i > 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots n$.

दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि यादृच्छिक चर का माध्य, चर के मान और संगत प्रायिकताओं के गुणनफलों का योग है। यादृच्छिक चर के माध्य को प्रत्याशा (expectation) भी कहते हैं और इसे $E(x)$ से व्यक्त करते हैं।

इसलिए $$E(x) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i .$$

19.13.2 प्रसरण

स्मरण कीजिए, बारंबारता बंटन में हमने पढ़ा है कि प्रसरण प्रकीर्णन का एक माप अथवा मानों में विचरण का माप है। यादृच्छिक चर के प्रसरण का अर्थ भी वही है।

परिभाषा : मान लीजिए एक बारंबारता बंटन इस प्रकार दिया गया है :

X_i	:	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$P(X_i)$	:	P_1	P_2	P_3	...	P_n

मान लीजिए $\mu = E(x)$, x का माध्य है।

X के प्रसरण को σ_x^2 द्वारा व्यक्त किया जाता है और इसे इस प्रकार परिभाषित किया गया है :

$$\sigma_x^2 = \text{प्रसरण } (x) = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 P_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_1^2 p_i + \mu^2 p_i - 2\mu\, x_i p_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 P_i + \mu^2 P_i - 2\mu x_i\ p_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i + \sum_{i=1}^{n}\mu^2 P_i - \sum_{i=1}^{n} 2\mu x_i\ p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i + \mu^2 \sum_{i=1}^{n} P_i - 2\mu \sum_{i=1}^{n} x_i\ p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i + \mu^2 .1 - 2\,\mu.\mu$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \mu^2 \quad (\because\ \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i \text{ तथा } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2$$

हम इसे इस प्रकार भी लिख सकते हैं

$$\text{प्रसरण } (x) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

उदाहरण 19.31. निम्नलिखित बंटन का माध्य एवं प्रसरण ज्ञात कीजिए :

x	–2	–1	0	1	2
P(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

हल : दिया हुआ बंटन है :

X_i	–2	–1	0	1	2
$P(X_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$X_i P(X_i)$	$-\frac{2}{8}$	$-\frac{2}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
$x^2 P(X_i)$	$\frac{4}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$

अब, $\mu = \Sigma P(X_i)X_i = -\frac{2}{8}-\frac{2}{8}+0+\frac{1}{8}+\frac{2}{8} = -\frac{1}{8}$

प्रसरण (x) $=\Sigma X_i^2 P(X_i) - [\Sigma P(X_i)X_i]^2$

$$= \left[\frac{4}{8}+\frac{2}{8}+0+\frac{1}{8}+\frac{4}{8}\right]-\left(-\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{11}{8}-\frac{1}{64}=\frac{87}{64}$$

देखें आपने कितना सीखा 19.8

1. निम्नलिखित बंटनों के लिए माध्य एवं प्रसरण ज्ञात कीजिए :

(a)

X	:	1	2	3	4
P(X)	:	0.3	0.2	0.4	0.1

(b)

y_i	-2	-1	0	1	2
$P(y_i)$	0.1	0.2	0.3	0.25	0.15

2. एक निष्पक्ष (fair) सिक्के को तीन बार उछालने में चितों की संख्या का माध्य ज्ञात कीजिए।
3. मान लीजिए दो निष्पक्ष पासों को फेंकने पर प्राप्त संख्याओं के अन्तर को X से व्यक्त किया जाता है। X का माध्य एवं प्रसरण ज्ञात कीजिए (अन्तर का निरपेक्ष मान लीजिए)
4. एक अभिनत सिक्के को उछालने पर 25% चित एवं 75% पट प्राप्त होने की उम्मीद है। इस सिक्के को दो बार उछाला जाता है। प्राप्त पटों की संख्या का माध्य ज्ञात कीजिए।
5. दो पासों को फेंकने पर छः की संख्याओं का माध्य एवं प्रसरण ज्ञात कीजिए।

19.14 बरनौली अभिप्रयोग

जब एक जैसे प्रतिबंधों के अन्तर्गत किसी परीक्षण की पुनरावृत्ति की जाती है तो प्रत्येक बार की गई पुनरावृत्ति एक अभिप्रयोग कहलाती है। उदाहरण के लिए यदि एक सिक्के को तीन बार उछाला जाता है, तो हम कहते हैं कि सिक्के को उछालने के तीन अभिप्रयोग हैं।

किसी विशिष्ट घटना को अभिप्रयोग की सफलता कहा जा सकता है। स्पष्टतः किसी घटना का घटित नहीं होना असफलता कहा जाएगा। उदाहरण के लिए एक पासे को उछालने पर यदि 4 से छोटी संख्या प्राप्त होगी को सफलता माना जाता है तो 4 से छोटी प्राप्त नहीं होना असफलता माना जाएगा। इस प्रकार प्रत्येक अभिप्रयोग के दो परिणाम हो सकते हैं, सफलता अथवा असफलता।

किसी यादृच्छया परीक्षण के दो अथवा अधिक अभिप्रयोग दो प्रकार से किए जा सकते हैं :

1. सफलता अथवा असफलता की प्रायिकता प्रत्येक अभिप्रयोग में स्थिर रहे। उदाहरण के लिए एक सिक्के को n बार उछालने पर, प्रत्येक अभिप्रयोग में चित प्राप्त होने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है, इस प्रकार के अभिप्रयोग स्वतंत्र अभिप्रयोग कहलाते हैं।

2. सफलता अथवा असफलता की प्रायिकता प्रत्येक अभिप्रयोग में बदलती रहे। उदाहरण के लिए ताश के पत्तों की गड्डी में से प्रतिस्थापना के बिना उत्तरोत्तर पत्ते (एक के बाद दूसरा) निकालना। इस प्रकार के अभिप्रयोगों में यदि हुकम का पत्ता प्राप्त होना सफलता माना जाए तो प्रत्येक अभिप्रयोग में सफलता की प्रायिकता बदलती रहेगी।

i.e.	अभिप्रयोग	प्रथम	द्वितीय	तृतीय,....
	प्रायिकता	$\frac{13}{52}$	$\frac{12}{51}$	$\frac{11}{50}, \ldots$

प्रथम प्रकार के अभिप्रयोग i.e. स्वतंत्र अभिप्रयोग जिनमें केवल सफलता अथवा असफलता नामक दो परिणाम होते हैं, बरनौली अभिप्रयोग कहलाते हैं।

परिभाषा : किसी यादृच्छिक परीक्षण के अभिप्रयोग बरनौली परीक्षण कहलाते हैं, यदि प्रत्येक अभिप्रयोग के दो परिणाम (सफलता अथवा असफलता) हैं, अभिप्रयोग स्वतंत्र और सीमित हैं।

19.15 द्विपद बंटन

किसी यादृच्छिक परीक्षण के बरनौली अभिप्रयोगों की सफलता की संख्या का प्रायिकता बंटन, $(q + p)^n$ के प्रसार से प्राप्त किया जा सकता है जहाँ

$p =$ प्रत्येक अभिप्रयोग में सफलता की प्रायिकता

$q = 1 - p,$ = असफलता की प्रायिकता

$n =$ अभिप्रयोगों की संख्या

इस प्रकार का प्रायिकता बंटन द्विपदी बंटन कहलाता है। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि किसी यादृच्छिक परीक्षण के n बरनौली अभिप्रयोगों में, सफलताओं की संख्या का मान 0, 1, 2, 3, ...n हो सकता है।

इसलिए X की सफलताओं की संख्या का प्रायिकता बंटन निम्न प्रकार है :

$P(X = 0) = (q + p)^n$ के प्रसार में प्रथम पद

$P(X= 1) = (q + p)^n$ के प्रसार में द्वितीय पद

$\vdots$

$P(X = r) = (q + p)^n$ के प्रसार में $(r + 1)$वाँ पद

$\vdots$

$P(X = n) = (q + p)n$ के प्रसार में $(n + 1)$वाँ पद

हम जानते हैं कि

$$(q + p)^n = {}^nC_0\, q^n + {}^nC_1\, q^{n-1}\, p + {}^nC_2\, q^{n-2} p^2 + \ldots + {}^nC_r\, q^{n-r} p^r + \ldots + {}^nC_n p^n$$

$$\Rightarrow \quad P(x = 0) = {}^nC_0\, q^n$$

$$P(x = 1) = {}^nC_1\, q^{n-1} p$$

$$P(x = 2) = {}^nC_2\, q^{n-2} p^2$$

$$\vdots$$

$$P(X = r) = {}^nC_r\, q^{n-r} p^r$$

$\vdots$

$$P(X = n) = {}^{n}C_{n}\, p^{n}.$$

एक द्विपद बंटन, जिसमें n बरनौली अभिप्रयोग हो और प्रत्येक अभिप्रयोग में सफलता की प्रायिकता P है, को $B(n, p)$ से व्यक्त करते हैं।

आइए उदाहरणों की सहायता से द्विपद बंटन को समझते हैं।

उदाहरण 19.32. तीन बरनौली अभिप्रयोगों में सफलताओं की संख्या का द्विपद बंटन लिखिए।

हल : मान लीजिए p = प्रत्येक अभिप्रयोग में सफलता की प्रायिकता

q = प्रत्येक अभिप्रयोग में असफलता की प्रायिकता

स्पष्टतः $q = 1 - p$

तीन अभिप्रयोगों में सफलता की संख्या के मान 0, 1, 2 अथवा 3 हो सकते हैं।

तीन अभिप्रयोगों का प्रतिदर्श समष्टि

$$S = \{SSS, SSF, SFS, FSS, SFF, FSF, FFS, FFF\}$$

जहाँ S और F क्रमशः सफलता एवं असफलता को व्यक्त करते हैं।

$$P(S = 0) = P(FFF) = P(F)\,P(F)\,P(F)$$
$$= q.q.q = q^3$$

$$\begin{aligned} P(S = 1) &= P(SFF, FSF \text{ or } FFS) \\ &= P(SFF) + P(FSF) + P(FFS) \\ &= P(S).P(F)\,P(F) + P(F).P(S).P(F) + P(F)\,P(F)\,P(S) \\ &= p.q.q. + q.p.q + q.q.p \\ &= 3\,q^2p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(S = 2) &= P(SSF \text{ अथवा } SFS \text{ or } FSS) \\ &= P(SSF) + P(SFS) + P(FSS) \\ &= P(S).P(S).P(F) + P(S)\,P(F)P(S) + P(F)\,P(S)\,P(S) \\ &= p.p.q + p.q.p + q.p.p \\ &= 3qp^2 \end{aligned}$$

$$P(S = 3) = P(SSS) = P(S)\,.\,P(S)\,.\,P(S)$$
$$= p.p.p = p^3$$

अतः सफलताओं की संख्या की प्रायिकता बंटन इस प्रकार है :

X_i	:	0	1	2	3
$P(X_i)$	:	q^3	$3q^2p$	$3qp^2$	p^3

इसके साथ–साथ $(q + p)^3 = q^3 + 3q^2p + 3p^2q + p^3$

ध्यान दीजिए 0, 1, 2, 3 सफलताओं की प्रायिकता क्रमशः $(q + p)^3$ के प्रसार के प्रथम, द्वितीय, तृतीय एवं चौथे पद हैं।

उदाहरण 19.33. एक पासा 5 बार फेंका जाता है। यदि सम संख्या प्राप्त करना एक सफलता है, तो

(a) 5 सफलताओं (b) कम से कम 4 सफलताएँ

(c) अधिकतम 3 सफलताओं, की प्रायिकता क्या है?

हल : दिया हुआ है X : ''एक सम संख्या''

तब $p =$ P(एक सम संख्या) $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$q =$ P(एक सम संख्या नहीं) $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

क्योंकि पासे को फेंकने के अभिप्रयोग बरनौली अभिप्रयोग हैं।

इसलिए, P(r सफलता) $= {}^nC_r\, q^{n-r} p^r$

यहाँ, $n = 5 = {}^5C_r \left(\frac{1}{2}\right)^{5-2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = {}^5C_r \left(\frac{1}{2}\right)^5$

(*a*) P(5 सफलता) $= {}^5C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

(b) P(कम से कम 3 सफलता)

= P(3 सफलता अथवा 4 सफलता अथवा 5 सफलता)

= P(3 सफलता) + P(4 सफलता) + P(5 सफलता).

$$= {}^5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}^5C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}^5C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} + 5 + 1\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^5 (10+5+1) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

(c) P(अधिकतम 3 सफलता)

= P(0 सफलता अथवा 1 सफलता अथवा 2 सफलता अथवा 3 सफलता)

= P(0 सफलता) + P(1 सफलता) + P(2 सफलता) + P(3 सफलता)

$$= {}^5C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}^5C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}^5C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}^5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$= \frac{1}{32} + 5\times\frac{1}{32} + \frac{5\times4}{2\times1}\times\frac{1}{32} + \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\times\frac{1}{32}$$

$$= \frac{1}{32}[1+5+10+10] = \frac{26}{32} = \frac{13}{16}.$$

देखें आपने कितना सीखा 19.9

1. यदि एक न्याय सिक्के को 10 बार उछाला जाए तो निम्नलिखित को प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए :

(a) 6 चित (b) कम से कम 6 चित (c) अधिकतम 6 चित

2. एक पासों के युग्म को 4 बार उछाला जाता है। यदि द्विक (1, 1), (2, 2)...} प्राप्त करना सफलता है; तो दो सफलताएँ प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
3. एक थैले में 3 लाल और 4 काली गेंदें हैं। उसमें से पाँच गेंद उत्तरोत्तर प्रतिस्थापना के साथ निकाली जाती हैं। यदि ''काली गेंद'' प्राप्त करना एक सफलता माना जाए, तो 3 सफलताएँ प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
4. किसी कारखाने में निर्मित बल्बों में से 5% बल्ब खराब हैं। यादृच्छया लिए गए 10 बल्बों में 1 से ज्यादा खराब बल्ब नहीं होगा इसकी प्रायिकता क्या है?
5. एक कारखाने में निर्मित सीएफएल की 1 वर्ष के बाद खराब होने की प्रायिकता 0.01 है। इस कारखाने में निर्मित 5 सीएफएल में से 1 वर्ष बाद
   (a) शून्य
   (b) अधिकतम एक
   (c) एक से अधिक
   (d) न्यूनतम एक, सीएफएल

   के खराब होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

आइये दोहराएँ

- एक घटना का पूरक किसी घटना के पूरक में वे सभी परिणाम होते हैं जो इस घटना के अनुकूल न हों, तथा इसे A नहीं अथवा $\overline{A}$ से लिखा जाता है।
- घटना A या B: घटना A या B तब घटित होती है जब घटना A या घटना B या दोनों घटित हों।
- घटना A और B:घटना A और B में वे सब परिणाम होते हैं जो दोनों में उभयनिष्ठ हों।
- योग का नियम: कोई दो घटनाओं के लिए

$$P(A \text{ अथवा } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ और } B)$$

- परस्पर अपवर्जी घटनाओं के लिए योग का नियम

  यदि A और B दो परस्पर अपवर्जी घटनाऐं हों तो

$$P(A \text{ या } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

- घटना के अनुकूल संयोगानुपात यदि A के संयोगानुपात a से b है तो

$$P(A) = \frac{a}{a+b}$$

  यदि A के प्रतिकूल संयोगानुपात a से b हैं तो

$$P(A) = \frac{b}{a+b}$$

- दो घटनाऐं परस्पर अपवर्जी हाती है यदि घटित घटना दूसरी घटना को घटित होने से रोके।
- दो घटनाऐं स्वतन्त्र होती हैं, यदि एक के घटने का प्रभाव दूसरे पर नहीं पड़ता।

  यदि A और B स्वतंत्र घटनाएं हैं तो

$P(A \text{ और } B) = P(A).P(B)$

या $P(A \cap B) = P(A) . P(B)$

- दो पराश्रित घटनाओं के लिए

  $P(A \cap B) = P(A)\, P(B \mid A),\ P(A) > 0$

  या $P(A \cap B) = P(B)\, P(A \mid B),\ P(B) > 0$

- प्रतिबंधी प्रायिकता $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ तथा $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

- सम्पूर्ण प्रायिकता की प्रमेय:

  $P(A) = P(E1).P(A \mid E1) + PE2\, P(A \mid E2) + ... + P(E1)\, P(A \mid E2)$

- बेज प्रमेय: यदि B1, B2, ..., Bn परस्पर अपवर्ती घटनाएं हैं और A एक ऐसी घटना है जो B1, अथवा B2 अथवा Bn के साथ घटित होती है, तो

  $$P(Bi/A) = \frac{P(Bi).P(A \mid Bi)}{\sum_{i=1}^{n} P(Bi).P(A \mid Bi)} \quad \text{जहां } i = 1, 2, ..., n$$

- यादृच्छिक चर का माध्य तथा प्रसरण:

  $$m = E(X) = \frac{n}{2} XiPi$$

  $$\sigma^2 = \frac{n}{2}(Xi - m)^2 = \frac{n}{2} X_i^2 Pi - m^2$$

- द्विपद बंटन $P(X = r) = {}^nC_r\, q^{n-r} \cdot p^r$

सहायक वेबसाइट

- *http://en.wikipedia.org/wiki/Probability*
- *http://mathworld.wolfram.com/Probability*
- *http://en.wikipedia.org/wiki/probability _distribution*
- *http://en.wikipedia.org/wiki/Probability_theory*
- *http://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_distribution*

आइए अभ्यास करें

1. चार सिक्के उछालने पर प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब (a) तीन चित आएं (b) कम से कम 3 चित आएं (c) अधिक से अधिक तीन चित आएं।
2. दो पासे एक बार फेंके गए। उस घटना की प्रायिकता निकालिए पहले पासे पर या तो विषम संख्या आए या अंकों का योग 7 हो।
3. पहले दो सौ पूर्णांकों में से एक पूर्णांक यादृच्छिक रूप से चुना गया। चुने गये पूर्णांक 6 या 8 से विभाजित होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

4. एक बैग में 13 गेंदें है जिनमें 1 से 13 नम्बर लिखे हैं। यादृच्छ रूप से एक गेंद निकाली जाती है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब निकाली गई गेंद का नम्बर 2 या 3 से विभाजित हो।

5. उस घटना की प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब चार बार सिक्का उछालने पर 2 या 3 बार चित आए।

6. क्या निम्नलिखित प्रायिकताएं संगत हैं :

   (a) $P(A) = 0.6,\ P(B) = 0.5\ ,\ P(A \text{ और } B) = 0.4$

   (b) $P(A) = 0.2,\ P(B) = 0.3\ ,\ P(A \text{ और } B) = 0.4$

   (c) $P(A) = P(B) = 0.7,\ P(A \text{ और } B) = 0.2$

7. एक बक्से में 25 टिकटें हैं जिन पर 1 से 25 नम्बर लिखे हैं। दो टिकटें यादृच्छिक रूप से निकाली गईं। क्या प्रायिकता है कि निकाली गई टिकटों के नम्बरों का गुणनफल सम हो।

8. एक दराज में 50 कुण्डे और 150 पेंच हैं। आधे कुण्डे और आधे पेंचों को जंग लग गया है। यदि दराज में कोई एक वस्तु यादृच्छिक रूप से निकाली जाए तो क्या प्रायिकता है कि उस वस्तु में जंग लगा हो या वह कुण्डा हो ?

9. एक स्त्री 12 अंडे खरीदती है जिसमें से दो अंडे खराब हैं। स्त्री ने फेंटने के लिए चार अण्डे निकाले: प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब (a) चारों अंडे ठीक हों। (b) तीन अच्छे और एक खराब हों (c) दो अच्छे और दो खराब हों (d) कम से कम एक खराब हो।

10. दो पत्तों को यादृच्छिक रूप से निकालना है जो पुनः नहीं रखे जाते। प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब दोनों लाल हों या दोनों बादशाह हों।

11. माना A और B दो घटनाएं हैं जबकि $P(\bar{A}) = \frac{1}{2}, P(\bar{B}) = \frac{2}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{4},$ तो $P(A/B)$ और $P(B/A)$ ज्ञात कीजिए।

12. एक बैग में 10 काले रंग की और 5 सफेद रंग की गेंदें हैं। बैग में से दो गेंद बिना वापिस रखे (एक के बाद दूसरी) निकाली जाती है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाली गई दोनों गेंद काले रंग की हैं।

13. दो पासों को फेंकने पर प्राप्त अंकों के योग को यदि X से व्यक्त किया जाए, तो X का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

14. एक कलश में 4 काली, 2 लाल और 2 सफेद गेंदें हैं। कलश में से दो गेंद यादृच्छय रूप से उत्तरोत्तर (एक के बाद दूसरी) बिना प्रतिस्थापना के निकाली जाती हैं। काली गेंदों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

15. ताश के 52 पत्तों की गड्डी में से 2 पत्ते युगपत् रूप (एक साथ) से निकाले जाते हैं। बादशाहों की संख्या का माध्य एवं प्रसरण ज्ञात कीजिए।

16. एक थैले में 5% खराब बोल्ट हैं। उसमें से 10 बोल्ट उत्तरोत्तर प्रतिस्थापना के साथ निकाले जाते हैं। कम–से–कम एक खराब बोल्ट होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

17. द्विपद, $B\left(4, \frac{1}{3}\right)$ का माध्य ज्ञात कीजिए।

18. एक पासे को बार–बार तब तक फेंका जाता है जब तक तीन छः प्राप्त नहीं हो जाएँ। तीसरे छः को छठे प्रयास में प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

19. किसी व्यक्ति द्वारा एक न्याय सिक्के को कितनी बार अवश्य उछाला जाना चाहिए ताकि कम–से–कम एक चित प्राप्त होने की प्रायिकता 90% से अधिक हो।
20. एक पासे को 7 बार फेंकने पर संख्या 5 को दो बार प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
21. एक न्याय सिक्के को तीन बार उछालने पर चितों की माध्य संख्या ज्ञात कीजिए।
22. एक कारखाने में नट बनाए जाते हैं। उस कारखाने में तीन मशीनें A, B तथा C क्रमशः द्वारा निर्मित उत्पाद में से क्रमशः 5%, 4% एवं 2% नट खराब पाए जाते हैं। उत्पाद के ढेर में से एक नट यादृच्छया उठाया जाता है और वह खराब पाया जाता है। इस बात की प्रायिकता क्या है कि यह नट मशीन C द्वारा निर्मित है?

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 19.1

1. $\frac{1}{6}$	2. $\frac{1}{2}$	3. $\frac{1}{2}$	4. $\frac{3}{4}$
5. (i) $\frac{3}{5}$	(ii) $\frac{2}{5}$		
6. (i) $\frac{5}{36}$	(ii) $\frac{5}{36}$	(iii) $\frac{1}{12}$	(iv) $\frac{1}{36}$
7. $\frac{5}{9}$	8. $\frac{1}{12}$	9. $\frac{1}{2}$	
10. (i) $\frac{1}{4}$	(ii) $\frac{1}{13}$	(iii) $\frac{1}{52}$	
11. (i) $\frac{5}{12}$	(ii) $\frac{1}{6}$	(iii) $\frac{11}{36}$	
12. (i) $\frac{1}{8}$	(ii) $\frac{7}{8}$	(iii) $\frac{1}{8}$	

देखें आपने कितना सीखा 19.2

1. $\frac{1}{8}$	2. $\frac{20}{39}$	3.(a) $\frac{4}{25}$	(b) $\frac{38}{245}$
4. $\frac{1}{5525}$	6. (i) $\frac{3}{10}$	(ii) $\frac{1}{6}$	(iii) $\frac{1}{30}$
7. $\frac{10}{133}$	8. $\frac{4}{7}$	9. $\frac{60}{143}$	10. $\frac{1}{4}$

देखें आपने कितना सीखा 19.3

1. $\frac{4}{13}$	2. $\frac{7}{36}$	3. $\frac{9}{16}$	4. $\frac{7}{12}$

5. $\frac{4}{9}$ 6. $\frac{1}{2}$ 7. $\frac{7}{13}$ 8. $\frac{5}{12}$

9. (a) $\frac{5}{18}$ (b) 0.7 10. $\frac{4}{11}$

11. (a) $\frac{5}{6}$ (b) $\frac{35}{36}$ 12. $\frac{3}{4}$

13 (a) A के अनुकूल संयोगानुपात 7:3. A के प्रतिकूल 3:7
(b) A के अनुकूल संयोगानुपात 4:1 A के प्रतिकूल संयोगानुपात 1:4

14. (a) $\frac{7}{9}$ (b) $\frac{7}{17}$ 15. (a) $\frac{5}{9}$ (b) $\frac{3}{4}$

16. (a), (c) 17. $\frac{4}{7}$ 18. $\frac{1}{4}$

देखें आपने कितना सीखा 19.4

1. (a) $\frac{2}{7}$ (b) $\frac{1}{35}$ (c) $\frac{24}{35}$ (d) $\frac{11}{35}$

2. (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$ 3 . $\frac{1}{4}$

4. (a) $\frac{1}{35}$ (b) $\frac{11}{35}$ 5. $\frac{1}{2}$

6. (a) $\frac{5}{144}$ (b) $\frac{1}{1014}$ 7. $\frac{53}{80}$

8. (a) $\frac{36}{169}$ (b) $\frac{84}{169}$ (c) $\frac{120}{169}$ (d) $\frac{49}{169}$

9. (a) स्वतंत्र (b) स्वतन्त्र

देखें आपने कितना सीखा 19.5

1. $\frac{13}{51}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. $\frac{25}{204}$

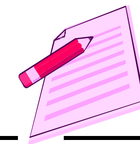
4. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ 5. $\frac{3}{7}$

देखें आपने कितना सीखा 19.6

1. $\frac{3}{7}$ 2. $\frac{3}{4}$ 3. $\frac{10}{111}$

देखें आपने कितना सीखा 19.7

1. (a) हाँ (b) नहीं क्योंकि $\Sigma P_i \neq 1$



(c) नहीं क्योंकि P_i की एक मात्रा ऋणात्मक है

(d) नहीं क्योंकि $\Sigma P_i \neq 1$

2. (a)

x	:	0	1	2
$P(x)$	:	$\frac{9}{49}$	$\frac{24}{49}$	$\frac{16}{49}$

(b)

X_i	:	0	1	2
$P(X_i)$	:	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

देखें आपने कितना सीखा 19.8

1. (a) $\mu = 2.3$, प्रसरण $= 1.01$

   (b) $\mu = 0.15$, प्रसरण $= 0.4275$

2. $\mu = \frac{3}{2}$

3.

X	:	0	1	2	3	4	5
$P(X_i)$	:	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

4. $\mu = \frac{3}{2}$, प्रसरण $(X_i) = \frac{3}{8}$

5. माध्य $= \frac{1}{3}$, प्रसरण $= \frac{5}{18}$

देखें आपने कितना सीखा 19.9

1. (i) $\frac{105}{512}$ (ii) $\frac{193}{512}$ (iii) $\frac{53}{64}$

2. $\frac{25}{216}$

3. $\frac{90\times 64}{7^5}$

4. $\left(\frac{29}{20}\right)\left(\frac{19}{20}\right)^9$

5. (a) $\left(\frac{99}{100}\right)^5$ (b) $\left(\frac{99}{100}\right)^5 + 5.\frac{99^4}{100^5}$

   (c) $1-\left\{\left(\frac{99}{100}\right)^5+\frac{5\times 99^4}{100^5}\right\}$ (d) $1-\left(\frac{99}{100}\right)^5$

आइए अभ्यास करें

1. (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{5}{16}$ (c) $\frac{15}{16}$

2. $\frac{7}{12}$

3. $\frac{1}{4}$ 4. $\frac{8}{13}$ 5. $\frac{5}{8}$

6. केवल (a) संगत 7. $\frac{456}{625}$ 8. $\frac{5}{8}$

9. (a) $\frac{14}{33}$ (b) $\frac{16}{33}$ (c) $\frac{1}{11}$ (d) $\frac{19}{33}$

10. $\frac{55}{221}$ 11. $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$ 12. $\frac{3}{7}$

13.

X_i :	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X_i)$:	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

14.

x :	0	1	2
$P(x)$:	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{14}$

15. माध्य $= \frac{34}{221}$, प्रसरण $= \frac{6800}{(221)^2}$.

16. $1-\left(\frac{19}{20}\right)^{10}$ 17. $\frac{4}{3}$ 18. $\frac{625}{23328}$

19. $n = 4$ 20. $\frac{7}{12}\times\left(\frac{5}{6}\right)^5$ 21. 1.5

22. $\frac{4}{17}$