2

संबंध एवं फलन–I

हमारे दैनिक जीवन में हमें विभिन्न प्रकार के संबंध देखने को मिलते हैं जैसे भाई और बहन, पिता और पुत्री, अध्यापक और विद्यार्थी इत्यादि। गणित में भी हमें बहुत से संबंध मिलते हैं जैसे संख्या m संख्या n से बड़ी है, रेखा l, रेखा m पर लम्बवत् है इत्यादि। संबंध की अवधारणा को गणितीय रूप में स्थापित किया जा चुका है। शब्द ''फलन (function)" को लीबनीज (Leibnitz) ने 1694 में परिचित कराया। फलन को एक विशेष प्रकार के संबंध के रूप में परिभाषित किया गया है। प्रस्तुत पाठ में हम समुच्चयों के कार्तिय गुणन, दो समुच्चयों के बीच संबंध, एक संबंध का फलन होने की स्थितियां, विभिन्न प्रकार के फलन और उनके गुणों की चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

- दो समुच्चयों के कार्तीय गुणन को परिभाषित करना।
- संबंध तथा फलन को परिभषित करना तथा उदाहरण देना।
- फलन का प्रान्त तथा परिसर ज्ञात करना।
- फलनों के आरेख खींचना।
- सम तथा विषम फलनों के उदाहरण देकर उन्हें परिभाषित करना।
- यह बताना कि फलन विषम है, सम है या इनमें से कोई नहीं।
- फलनों के उदाहरण जैसे $|X|$, $[X]$ फलन, बहुपद फलन, लघु गणकीय फलन और तथा चर घातांकी (exponential) फलन, बताकर उन्हें परिभाषित करना।
- वास्तविक फलनों का योग, घटा, गुणा एवं भागफल ज्ञात करना।

पूर्व ज्ञान

- क्रमित युग्म की अवधारणा

2.1 दो समुच्चयों का कार्तीय गुणन

दो समुच्चयों A तथा B पर विचार कीजिए जहाँ $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$.

A और B के सभी क्रमित युग्मों का समुच्चय $\{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5)\}$ है।

इस समुच्चय को $A \times B$ द्वारा निरुपित किया जाता है तथा यह समुच्चयों A तथा B का कार्तीय गुणन कहलाता है। अर्थात $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$

समुच्चयों B तथा A के कार्तीय गुणन को $B \times A$ से निरुपित करते हैं। ऊपर दिए गए उदाहरण में

$B\times A=\{(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(5,1),(5,2)\}$ स्पष्टत: $A\times B\neq B\times A$

समुच्चय निर्माण रूप में

$A\times B=\{(a,b): a\in A$ और $b\in B\}$, $B\times A=\{(b,a): b\in B$ और $a\in A\}$

टिप्पणी:

यदि $A=\phi$ या $B=\phi$ या $A,B=\phi$ तब $A\times B=B\times A=\phi$

उदाहरण 2.1. मान लीजिए कि $A=\{a,b,c\}$, $B=\{d,e\}$, $C=\{a,d\}$

ज्ञात कीजिए (i) $A\times B$ (ii) $B\times A$ (iii) $A\times(B\cup C)$ (iv) $(A\cap C)\times B$

(v) $(A\cap B)\times C$ (vi) $A\times(B-C)$.

हल : (i) $A\times B=\{(a,d),(a,e),(b,d),(b,e),(c,d),(c,e)\}$.

(ii) $B\times A=\{(d,a),(d,b),(d,c),(e,a)(e,b),(e,c)\}$.

(iii) $A=\{a,b,c\}$, $B\cup C=\{a,d,e\}$.

$\therefore$ $A\times(B\cup C)=\{(a,a),(a,d),(a,e),(b,a),(b,d),(b,e),(c,a),(c,d),(c,e)\}$.

(iv) $A\cap C=\{a\}$, $B=\{d,e\}$ $\therefore$ $(A\cap C)\times B=\{(a,d),(a,e)\}$

(v) $A\cap B=\phi$, $c=\{a,d\}$, $\therefore$ $(A\cap B)\times c=\phi$

(vi) $A=\{a,b,c\}$, $B-C=\{e\}$ $\therefore$ $A\times(B-C)=\{(a,e),(b,e),(c,e)\}$.

2.1.1 दो परिमित समुच्चयों के कार्तीय गुणन में अवयवों की संख्या

मान लीजिए A तथा B दो समुच्चय हैं जो रिक्त नहीं हैं। हम जानते हैं कि $A\times B=\{(a,b); a\in A$ तथा $b\in B\}$ तब दो परिमित समुच्चयों A तथा B के कार्तीय गुणन में अवयवों की संख्या अर्थात् $n(A\times B)=n(A).\,n(B)$

उदाहरण 2.2. माना कि $A=\{1,2,3\}$ तथा $B=\{x,y\}$ है, दर्शाइए कि $n(A\times B)=n(A).\,n(B)$

हल : यहाँ $n(A)=3,\ n(B)=2$

$\therefore$ $A\times B=\{(1,x),(2,x),(3,x),(1,y),(2,y),(3,y)\}$

$$n(A\times B)=n(A)\,.\,n(B)$$
$$6=3\times 2$$
$$6=6$$

उदाहरण 2.3. यदि $n(A)=5$, $n(B)=4$, $n(A\times B)$ ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $n(A\times B)=n(A)\times n(B)$, $n(A\times B)=5\times 4=20$

2.1.2 वास्तविक संख्याओं R का स्वयं से $R\times R\times R$ तक कार्तीय गुणन

क्रमित त्रिक $A\times A\times A=\{(a,b,c): a,b,c\in A\}$ (a,b,c) क्रमित त्रिक कहलाता है। कार्तीय गुणन $R\times R$ समुच्चय $R\times R=\{(x,y): x,y\in R\}$ को निरूपित करता है जो द्विविम समतल में सभी बिन्दुओं के निर्देशांकों को निरूपित करते हैं तथा कार्तीय गुणन $R\times R\times R$ समुच्चय $R\times R\times R=\{(x,y,z): x,y,z\in R\}$ जो त्रिविम अन्तरिक्ष में सभी बिन्दुओं के निर्देशांकों को निरूपित करते हैं।

उदाहरण 2.4. यदि $A = \{1, 2\}$ है, तो समुच्चय $A \times A \times A$ ज्ञात कीजिए।

हल : $A \times A \times A = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 2)$
$(2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 2)\}$

2.2 संबंध

निम्नलिखित समुच्चयों पर विचार कीजिए :

$A = \{$ मोहन, सोहन, डेविड, करीम$\}$ तथा $B = \{$ रीटा, मैरी, फातिमा$\}$

मान लीजिए मोहन और सोहन, रीटा के दो भाई है, डेविड, मैरी का भाई है और करीम, फातिमा का भाई है। यदि हम A और B के अवयवों के बीच एक संबंध R "भाई है" को परिभाषित करें तो स्पष्ट है कि मोहन R रीटा, सोहन R रीटा, डेविड R मैरी, करीम R फातिमा। दो नामों के बीच से R को हटाने पर इन्हें क्रमित युग्मों के रूप में इस प्रकार से लिखा जा सकता है जैसे–(मोहन, रीटा), (सोहन, रीटा), (डेविड, मैरी), (करीम, फातिमा)

ऊपर दी गई सूचना को हम समुच्चय R के क्रमित युग्मों के रूप में भी लिख सकते हैं, जैसे–

$R = \{$ (मोहन, रीटा), (सोहन, रीटा), (डेविड, मैरी), (करीम, फातिमा)$\}$

स्पष्टतः $R \subseteq A \times B$ अर्थात $R = \{(a, b) : a \in A, b \in B$ तथा $aRb\}$

यदि A और B दो समुच्चय हैं तब A से B का संबंध R, $A \times B$ का एक उपसमुच्चय है।

यदि (i) $R = \phi$, R एक रिक्त संबंध कहलाता है।

(ii) $R = A \times B$, R एक समष्टीय संबंध कहलाता है।

(iii) यदि R, A से A का संबंध है , तो यह A पर संबंध को परिभाषित करता है।

(iv) $R = \{(a, a) \ \forall \ a \in A\}$, तत्समक फलन कहलाता है।

2.2.1 संबंध के प्रान्त तथा परिसर

दो समुच्चयों में संबंध R के क्रमित युग्मों के सभी प्रथम अवयवों के समुच्चय को संबंध R का प्रान्त कहते हैं और द्वितीय अवयवों के समुच्चय को संबंध R का परिसर कहते हैं।

ऊपर दिए गए उदाहरण में प्रान्त = {मोहन, सोहन, डेविड, करीम}, परिसर = {रीटा, मैरी, फातिमा}

उदाहरण 2.5. दिया है : $A = \{2, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{2, 3\}$

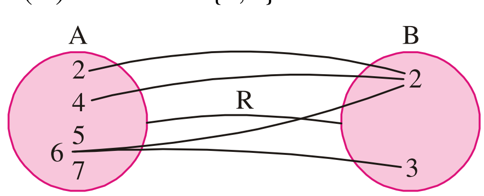
A और B के बीच संबंध को R से इस प्रकार दर्शाया गया है कि $R = \{(a, b) : a \in A, \ b \in B$ और a, b का गुणज है$\}$

ज्ञात कीजिए : (i) R को रोस्टर रूप में (ii) R का प्रान्त (iii) R का परिसर (iv) R का आरेख द्वारा प्रदर्शन

हल : (i) $R = \{(2, 2), (4, 2), (6, 2), (6, 3)\}$

(ii) प्रान्त $= \{2, 4, 6\}$ (iii) परिसर $= \{2, 3\}$

(iv)



चित्र 2.1

उदाहरण 2.6. यदि R, A का B से एक संबंध "से बड़ा है" से दर्शाया जाए,

जहाँ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ और $B = \{1, 2, 6\}$, तो

ज्ञात कीजिए (i) R को रोस्टर रूप में (ii) R का प्रान्त (iii) R का परिसर

हल : (i) $R = \{(2, 1)\ (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}$

(ii) प्रान्त $= \{2, 3, 4, 5\}$ (iii) परिसर $= \{1, 2\}$

2.2.2 सम्बन्ध का सहप्रांत

यदि R, A से B में एक सम्बन्ध है तब B, सम्बन्ध R का सहप्रान्त कहलाता है।

उदाहरण के लिए, मान लीजिए $A = \{1, 3, 4, 5, 7\}$ और $B = \{2, 4, 6, 8\}$ है एवं R, A से B तक, 'से एक कम' का सम्बन्ध, तब $R = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)\}$

इसलिए R का सहप्रांत $= \{2, 4, 6, 8\}$

उदाहरण 2.7. मान लीजिए $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ है तो A से A में $R = \{(x, y) : y = x + 1\}$ द्वारा एक सम्बन्ध परिभाषित कीजिए तथा R के प्रांत, परिसर एवं सहप्रांत लिखिए।

हल : $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$

R का प्रांत $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$

R का परिसर $= \{2, 3, 4, 5, 6\}$ तथा R का सहप्रांत $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

देखें आपने कितना सीखा 2.1

1. यदि $A = \{4, 5, 6, 7\}$, $B = \{8, 9\}$, $C = \{10\}$

सत्यापित कीजिए कि $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

2. यदि U एक समष्टीय समुच्चय और A तथा B इसके उपसमुच्चय हों जहाँ $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{x : x$ एक अभाज्य संख्या है।$\}$, तो $A' \times B'$ ज्ञात कीजिए।

3. यदि $A = \{4, 6, 8, 10\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ तथा R समुच्चय A का B से संबंध दर्शाता है जहाँ $R = \{(a, b) : a \in A, b \in B$ और b, a का गुणज है$\}$

ज्ञात कीजिए : (i) R को रोस्टर रूप में (ii) R का प्रान्त (iii) R का परिसर

4. $R = \{(x,y) : 4x + y = 12,\ x, y \in N\}$ द्वारा परिभाषित N का N से, एक संबंध है। ज्ञात कीजिए (i) R को रोस्टर रूप में (ii) R का प्रान्त (iii) R का परिसर

5. यदि R, N पर परिभाषित एक संबंध है जहां $R = \{(x, x^2) : x$ 15 से छोटी अभाज्य संख्या है$\}$, तो ज्ञात कीजिए : (i) R को रोस्टर रूप में (ii) R का प्रान्त (iii) R का परिसर

6. यदि R वास्तविक संख्याओं के समुच्चय पर संबंध है और $R = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 0\}$ से परिभाषित किया गया है, तो

ज्ञात कीजिए : (i) R को रोस्टर रूप में (ii) R का प्रान्त (iii) R का परिसर

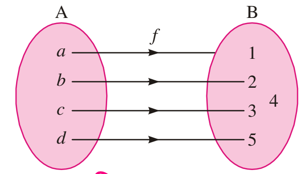
7. यदि $(x + 1, y - 2) = (3, 1)$ है, तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए।

8. यदि $A = \{-1, 1\}$ है, तो $A \times A \times A$ ज्ञात कीजिए।

9. यदि $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y)\}$ है, तो A तथा B ज्ञात कीजिए।

10. यदि $n(A) = 6$ तथा $n(B) = 3$ है, तब $n(A \times B)$ ज्ञात कीजिए।

2.3 फलन की परिभाषा



चित्र 2.2

समुच्चयों $A = \{a, b, c, d\}$ तथा $B = \{1, 2, 3, 4\}$ पर परिभाषित

सम्बन्ध $f : \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 5)\}$ पर विचार कीजिए। इस सम्बन्ध में आप देखतें हैं कि A के प्रत्येक अवयव का B में एक अद्वितीय प्रतिबिम्ब है। यह सम्बन्ध f समुच्चय A का B से है जहां A का प्रत्येक अवयव B के एक अद्वितीय अवयव से सम्बन्धित होता है, A से B पर फलन कहलाता है। हम देखते हैं कि फलन में किन्हीं दो क्रमित युग्मों का पहला अवयव समान नहीं होता।

हम यह भी देखते हैं कि B में एक ऐसा अवयव 4 है, जिसका A में कोई भी पूर्व प्रतिबिम्ब नहीं है। इस प्रकार यहां:

(i) समुच्चय B को सहप्रान्त कहते हैं। (ii) समुच्चय $\{1, 2, 3, 5\}$ को परिसर कहते हैं।

उपर्युक्त से हम इस निष्कर्ष पर पहुंचते है कि परिसर, सहप्रान्त का उपसमुच्चय होता है। प्रतीक रूप में यह फलन इस प्रकार भी लिखा जा सकता है। $f : A \to B$ या $A \xrightarrow{f} B$

2.3.1 वास्तविक चर के वास्तविक मान फलन

एक ऐसे फलन को जिसका परिसर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय या उसका कोई उपसमुच्चय हो, वास्तविक मान फलन कहते हैं। यदि वास्तविक चर वाले किसी वास्तविक मान फलन का प्रांत भी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय अथवा उसका कोई उपसमुच्चय हो तो इसे वास्तविक फलन कहते हैं।

मान लीजिए कि R सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा X एवं Y, R के दो (रिक्त नहीं) उपसमुच्चय हैं, तब नियम 'f' जो कि प्रत्येक $x \in X$ से Y के एक अद्वितीय y का संबंध जोड़ता है, वास्तविक चर का वास्तविक मान फलन या एक साधारण वास्तविक फलन कहलाता है तथा इसे हम $f : X \to Y$ लिखते हैं।

एक वास्तविक फलन 'f' एक ऐसा नियम है जिसमें प्रत्येक सम्भव वास्तविक संख्या x, एक अद्वितीय वास्तविक संख्या $f(x)$ से सम्बन्धित है।

उदाहरण 2.8. निम्नलिखित में से कौन-कौन से A से B पर फलन हैं। उनके प्रान्त तथा परिसर लिखिए। यदि वह फलन न हो तो कारण बताइए।

(a) $\{(1,-2), (3,7), (4,-6), (8,1)\}$, $A = \{1, 3, 4, 8\}$, $B = \{-2, 7, -6, 1, 2\}$

(b) $\{(1,0), (1-1), (2,3), (4,10)\}$, $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{0, -1, 3, 10\}$

(c) $\{(a,b), (b,c), (c,b), (d,c)\}$, $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{b, c\}$

(d) $\{(2,4), (3,9), (4,16), (5,25), (6,36)\}$, $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 9, 16, 25, 36\}$

(e) $\{(1,-1), (2,-2), (3,-3), (4,-4), (5,-5)\}$, $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$

(f) $\left\{\left(\sin\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), \left(\cos\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\tan\frac{\pi}{6}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\cot\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}\right)\right\},$

$$A = \left\{\sin\frac{\pi}{6}, \cos\frac{\pi}{6}, \tan\frac{\pi}{6}, \cot\frac{\pi}{6}\right\} \quad B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}, 1\right\}$$

(g) $\{(a, b), (a, 2), (b, 3), (b, 4)\}$, $A = \{a, b\}, B = \{b, 2, 3, 4\}$

हल : (a) यह फलन है। प्रान्त $= \{1, 3, 4, 8\}$, परिसर $= \{-2, 7, -6, 1\}$

(b) यह फलन नहीं है क्योंकि प्रथम दो क्रमित युग्मों के पहले अवयव समान हैं।

(c) यह फलन नहीं है। प्रान्त $= \{a, b, c, d\} \neq A$, परिसर $= \{b, c\}$

(d) यह फलन है। प्रान्त $= \{2, 3, 4, 5, 6\}$, परिसर $= \{4, 9, 16, 25, 36\}$

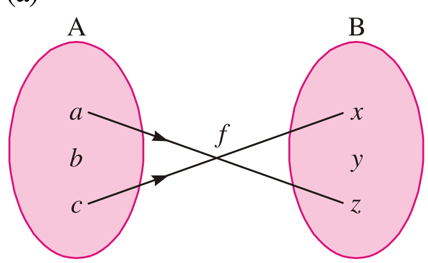
(e) यह फलन नहीं है। प्रान्त $= \{1, 2, 3, 4, 5\} \neq A$, परिसर $= \{-1, -2, -3, -4, -5\}$

(f) यह फलन है। प्रान्त $= \left\{\sin\frac{\pi}{6}, \cos\frac{\pi}{6}, \tan\frac{\pi}{6}, \cot\frac{\pi}{6}\right\}$, परिसर $= \left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right\}$

(g) यह फलन नहीं है क्योंकि प्रथम दो क्रमित युग्मों के पहले अवयव तथा अन्तिम दो क्रमित युग्मों के भी पहले अवयव समान है।

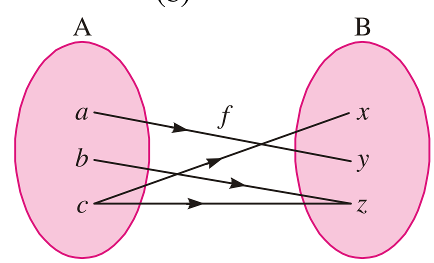
उदाहरण 2.9. बताइए कि निम्नलिखित सम्बन्ध फलन हैं अथवा नहीं।

(a)



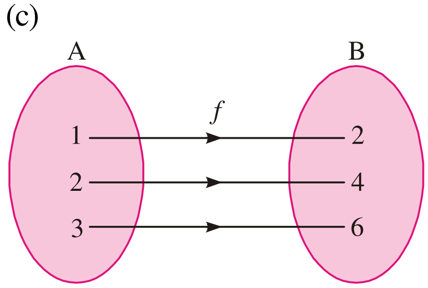
चित्र 2.3

(b)



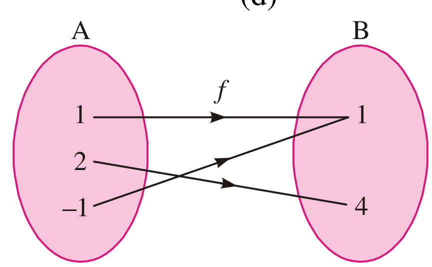
चित्र 2.4

(c)



चित्र 2.5

(d)



चित्र 2.6

हल–

(a) 'f' फलन नहीं है, क्योंकि A के अवयव 'b' का B में प्रतिबिम्ब नहीं है।

(b) 'f' फलन नहीं है क्योंकि A के अवयव c का B में अद्वितीय प्रतिबिम्ब नहीं है।

(c) 'f' एक फलन है क्योंकि A के प्रत्येक अवयव का B में अद्वितीय प्रतिबिम्ब है।

(d) 'f' एक फलन है क्योंकि A के प्रत्येक अवयव का B में अद्वितीय प्रतिबिम्ब है।

उदाहरण 2.10. निम्नलिखित सम्बन्ध जो कि $R \to R$ है में से कौन-कौन से फलन हैं।

(a) $y = 3x + 2$ (b) $y < x + 3$ (c) $y = 2x^2 + 1$

हल– (a) $y = 3x + 2$ यहाँ प्रत्येक अवयव $x \in R$ के संगत एक अद्वितीय अवयव $y \in R$ है।

$\therefore$ यह फलन है।

(b) $y < x + 3$ x के किसी भी मान के लिए हमें y के एक से अधिक मान प्राप्त होते हैं।

$\therefore$ यह एक फलन नहीं है।

(c) $y = 2x^2 + 1$ x के किसी भी वास्तविक मान के लिए हमें y का एक अद्वितीय मान प्राप्त होता है।

$\therefore$ यह एक फलन है।

उदाहरण 2.11. मान लीजिए कि N प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है। $f : N \to N$, $f(x) = 2x + 1$ द्वारा परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है। इस परिभाषा का प्रयोग करके $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ ज्ञात कीजिए।

हल : $f(x) = 2x + 1$, $f(1) = 2 \times 1 + 1 = 2 + 1 = 3$, $f(2) = 2 \times 2 + 1 = 4 + 1 = 5$,

$f(3) = 2 \times 3 + 1 = 6 + 1 = 7$, $f(4) = 2 \times 4 + 1 = 8 + 1 = 9$

देखें आपने कितना सीखा 2.2

1. निम्नलिखित में कौन से सम्बन्ध A से B पर फलन है?

(a) $\{(1,-2), (3,7), (4,-6), (8,11)\}$, $A = \{1,3,4,8\}$, $B = \{-2, 7, -6, 11\}$

(b) $\{(1,0), (1,-1), (2,3), (4,10)\}$, $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 0, -1, 3, 10\}$

(c) $\{(a,2), (b,3), (c,2), (d,3)\}$, $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{2, 3\}$

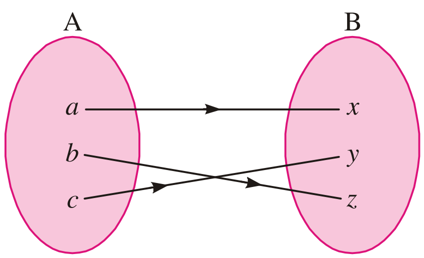
(d) $\{(1,1), (1,2), (2,3), (-3,4)\}$, $A = \{1, 2, -3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$

(e) $\left\{\left(2, \frac{1}{2}\right), \left(3, \frac{1}{3}\right), \ldots, \left(10, \frac{1}{10}\right)\right\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{11}\right\}$

(f) $\{(1,1), (-1,1), (2,4), (-2,4)\}$, $A = \{0, 1, -1, 2, -2\}$, $B = \{1, 4\}$

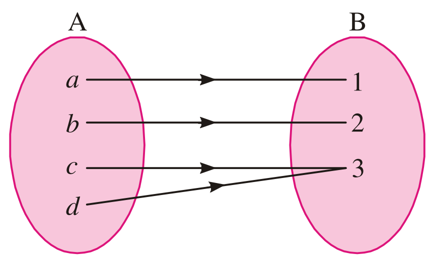
2. निम्नलिखित में कौन-कौन से सम्बन्ध फलन को दर्शाते हैं ?

(a)



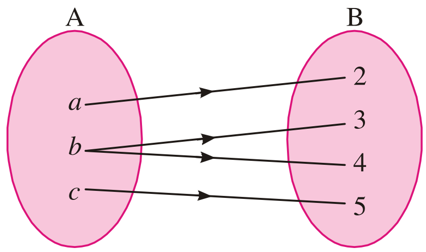
चित्र 2.7

(b)

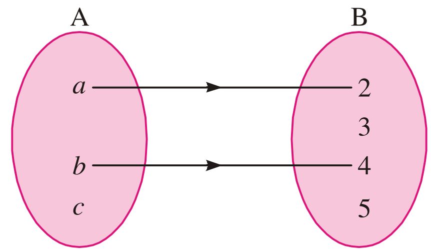


चित्र 2.8

(c) (d)



चित्र 2.9



चित्र 2.10

3. निम्नलिखित संबंध जो कि $R \to R$ पर परिभाषित है, में कौन-कौन से फलन हैं ?

(a) $y = 2x + 1$ (b) $y > x + 3$ (c) $y < 3x + 1$ (d) $y = x^2 + 1$

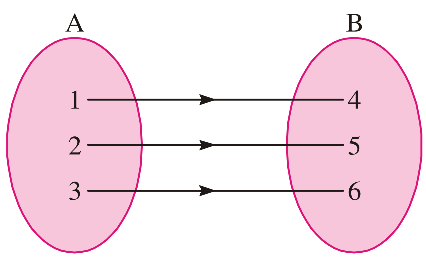
4. निम्नलिखित फलनों के प्रान्त तथा परिसर लिखिए :

(a) $\{(\sqrt{2}, 2), (\sqrt{5}, -1), (\sqrt{3}, 5)\}$ (b) $\left\{\left(-3, \frac{1}{2}\right), \left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(-1, \frac{1}{2}\right)\right\}$

(c) $\{(1,1), (0,0), (2,2), (-1,-1)\}$, (d) {(दीपक, 16), (संदीप, 28), (राजन, 24) }

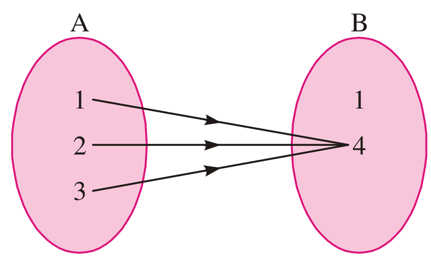
5. निम्नलिखित फलनों के प्रान्त तथा परिसर लिखिए :

(a)



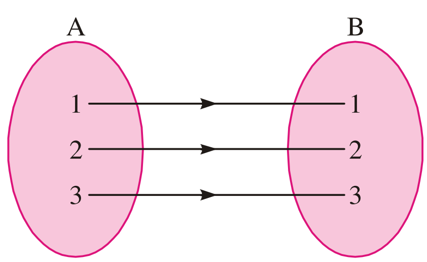
चित्र 2.11

(b)



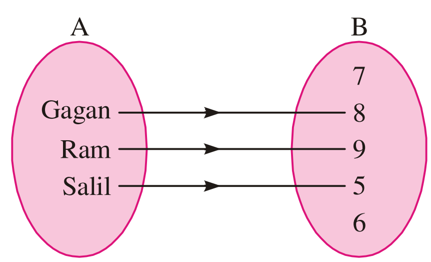
चित्र 2.12

(c)



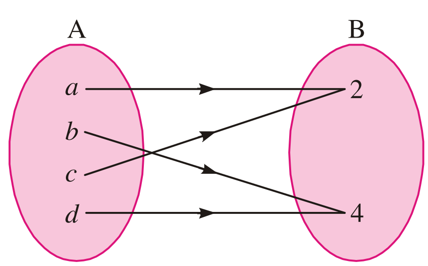
चित्र 2.13

(d)

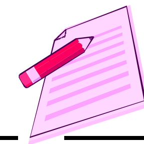


चित्र 2.14

(e)



चित्र 2.15



2.3.1 प्रान्त तथा परिसर के कुछ और उदाहरण

आइए, कुछ ऐसे फलनों पर विचार करें जो केवल वास्तविक संख्याओं के समुच्चय के किसी उप समुच्चय पर ही परिभाषित हैं।

उदाहरण 2.12. निम्नलिखित फलनों के प्रान्त ज्ञात कीजिए–

(a) $y = \frac{1}{x}$ (b) $y = \frac{1}{x-2}$ (c) $y = \frac{1}{(x+2)(x-3)}$

हल : (a) फलन $y = \frac{1}{x}$ का वर्णन निम्न क्रमित युग्मों के समुच्चय द्वारा किया जा सकता है।

$$\left\{......,\left(-2,-\frac{1}{2}\right),(-1,-1),(1,1)\left(2,\frac{1}{2}\right),....\right\}$$

यहाँ हम देख सकते हैं कि शून्य के अतिरिक्त x के सभी वास्तविक मान सम्भव हैं क्योंकि संगत प्रतिबिम्ब अर्थात $\frac{1}{0}$ परिभाषित नहीं है।

$\therefore$ प्रान्त $= R-\{0\}$ [0 के अतिरिक्त सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय]

टिप्पणी:

यहाँ परिसर $= R-\{0\}$

(b) x के सभी वास्तविक मान 2 के अतिरिक्त सम्भव है क्योंकि संगत प्रतिबिम्ब अर्थात $\frac{1}{(2-2)}$ का अस्तित्व नहीं है। $\therefore$ प्रान्त $= R-\{2\}$

(c) $x=-2$ तथा $x=3$ के लिए y का मान संभव नहीं है। $\therefore$ प्रान्त $=R-\{-2,3\}$

उदाहरण 2.13. निम्नलिखित फलनों के प्रान्त ज्ञात कीजिए–

(a) $y = +\sqrt{x-2}$ (b) $y = +\sqrt{(2-x)(4+x)}$

हल : (a) फलन $y=+\sqrt{x-2}$ पर विचार कीजिए।

y के वास्तविक मान होने के लिए आवश्यक है कि $(x-2)\geq 0$ अर्थात $x\geq 2$

$\therefore$ फलन के प्रान्त के लिए वे सभी वास्तविक संख्याएँ होंगी जो 2 अथवा 2 से बडी हों।

(b) $y=+\sqrt{(2-x)(4+x)}$

y के वास्तविक मान होने के लिए $(2-x)(4+x)\geq 0$ आवश्यक है। यह हमें दो स्थितियों में प्राप्त होगा।

स्थिति I : $(2-x)\geq 0$ तथा $(4+x)\geq 0$

$\Rightarrow$ $x\leq 2$ तथा $x\geq -4$

$\therefore$ प्रान्त x के ऐसे वास्तविक मान होंगे कि $-4\leq x\leq 2$ स्थिति II : $2-x\leq 0$ तथा $4+x\leq 0$

$\Rightarrow$ $2\leq x$ तथा $x\leq -4$

परन्तु x का ऐसा वास्तविक मान सम्भव नहीं है जो 2 के बराबर या 2 ये बड़ा हो तथा – 4 से कम अथवा इसके बराबर हो।

$\therefore$ दोनों स्थितियों से प्रान्त $= -4 \le x \le 2 \; \forall x \in R$

उदाहरण 2.14. फलन $f(x) = y = 2x + 1,$ के लिए परिसर ज्ञात कीजिए जब

$$\text{प्रान्त} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

हल : x के दिए हुए मानों के लिए हम प्राप्त करते हैं :

$f(-3) = 2(-3) + 1 = -5,\; f(-2) = 2(-2) + 1 = -3,\; f(-1) = 2(-1) + 1 = -1,$

$f(0) = 2(0) + 1 = 1,\; f(1) = 2(1) + 1 = 3,\; f(2) = 2(2) + 1 = 5,\; f(3) = 2(3) + 1 = 7$

दिए हुए फलन को क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में भी लिखा जा सकता है

अर्थात $\{(-3,-5),(-2,-3),(-1,-1),(0,1)(1,3),(2,5)(3,7)\}$

$\therefore$ परिसर $= \{-5, -3, -1, 1, 3, 5, 7\}$

उदाहरण 2.15. यदि $f(x) = x + 3,\; 0 \le x \le 4$ हो, तो इस का परिसर ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $\quad 0 \le x \le 4$

अथवा $\quad 0 + 3 \le x + 3 \le 4 + 3$

अथवा $\quad 3 \le f(x) \le 7$

$\therefore$ परिसर $= \{f(x) : 3 \le f(x) \le 7\}$

उदाहरण 2.16. यदि $f(x) = x^2,\; -3 \le x \le 3$ हो, तो इस का परिसर ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, $-3 \le x \le 3$ अथवा $0 \le x^2 \le 9$ या $0 \le f(x) \le 9$ [क्योंकि x^2 ऋणेतर होता है]

$\therefore$ परिसर $= \{f(x) : 0 \le f(x) \le 9\}$

देखें आपने कितना सीखा 2.3

1. निम्नलिखित फलनों के प्रान्त ज्ञात कीजिए– जबकि $x \in R,$

(a) (i) $y = 2x$ (ii) $y = 9x + 3$ (iii) $y = x^2 + 5$

(b) (i) $y = \dfrac{1}{3x - 1}$ (ii) $y = \dfrac{1}{(4x+1)(x-5)}$ (iii) $y = \dfrac{1}{(x-3)(x-5)}$

(iv) $y = \dfrac{1}{(3-x)(x-5)}$

(c) (i) $y = \sqrt{6 - x}$ (ii) $y = \sqrt{7 + x}$ (iii) $y = \sqrt{3x + 5}$

(d) (i) $y=\sqrt{(3-x)(x-5)}$ (ii) $y=\sqrt{(x-3)(x+5)}$

(iii) $y=\dfrac{1}{\sqrt{(3+x)(7+x)}}$ (iv) $y=\dfrac{1}{\sqrt{(x-3)(7+x)}}$

2. नीचे दी गयी प्रत्येक स्थिति के लिए दिए हुए प्रान्त के लिए परिसर ज्ञात कीजिए–

(a) (i) $f(x)=3x+10,\quad x\in\{1, 5, 7, -1, -2\}$

(ii) $f(x)=2x^2+1,\quad x\in\{-3, 2, 4, 0\}$

(iii) $f(x)=x^2-x+2,\quad x\in\{1, 2, 3, 4, 5\}$

(b) (i) $f(x)=x-2,\ 0\le x\le 4$ (ii) $f(x)=3x+4,\ -1\le x\le 2$

(c) (i) $f(x)=x^2,\ -5\le x\le 5$ (ii) $f(x)=2x,\ -3\le x\le 3$

(iii) $f(x)=x^2+1,\ -2\le x\le 2$ (iv) $f(x)=\sqrt{x},\ 0\le x\le 25$

(d) (i) $f(x)=x+5,\ x\in R$ (ii) $f(x)=2x-3,\ x\in R$

(iii) $f(x)=x^3,\ x\in R$ (iv) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ \{x : x<0\}$

(v) $f(x)=\dfrac{1}{x-2},\ \{x : x\le 1\}$ (vi) $f(x)=\dfrac{1}{3x-2},\ \{x : x\le 0\}$

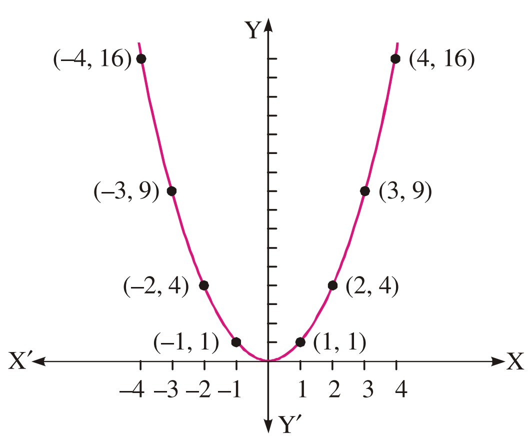
(vii) $f(x)=\dfrac{2}{x},\ \{x : x>0\}$ (viii) $f(x)=\dfrac{x}{x+5},\ \{x : x\ne -5\}$

2.4 फलन का ग्राफ के रूप में निरूपण

चूँकि फलन क्रमित युग्मों द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है।
अतः फलन का ग्राफीय प्रदर्शन सदैव सम्भव है। उदाहरणार्थ, आइए $y=x^2$ पर विचार करें–

$$y=x^2$$

x	0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4
y	0	1	1	4	4	9	9	16	16



चित्र 2.16

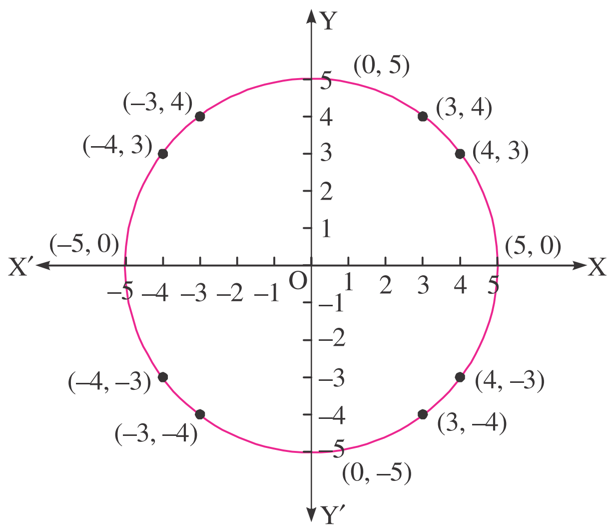
क्या यह एक फलन प्रदर्शित करता है?

हाँ, यह एक फलन प्रदर्शित करता है क्योंकि x के प्रत्येक मान के लिए y का एक अद्वितीय मान है।

आइए अब समीकरण $x^2 + y^2 = 25$ पर विचार करें।

$$x^2 + y^2 = 25$$

x	0	0	3	3	4	4	5	–5	–3	–3	–4	–4
y	5	–5	4	–4	3	–3	0	0	4	–4	3	–3



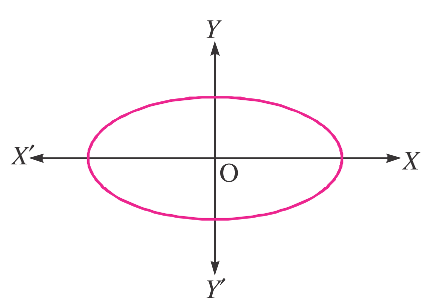
चित्र 2.17

यह ग्राफ एक वृत्त प्रदर्शित करता है? क्या यह एक फलन प्रदर्शित करता है?

नहीं, यह फलन प्रदर्शित नहीं करता है क्योंकि x के एक (समान) मान के लिए y का अद्वितीय मान नहीं है।

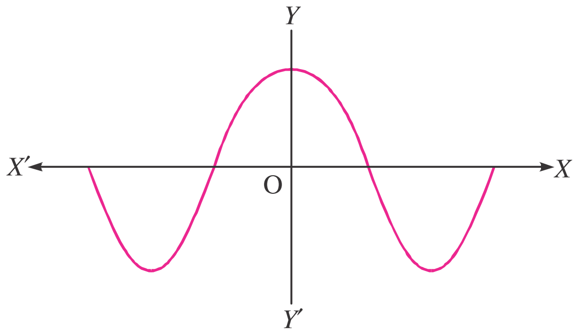
देखें आपने कितना सीखा 2.4

1. (i) क्या यह ग्राफ एक फलन प्रदर्शित करता है।



चित्र 2.18

(ii) क्या यह ग्राफ एक फलन प्रदर्शित करता है।



चित्र 2.19

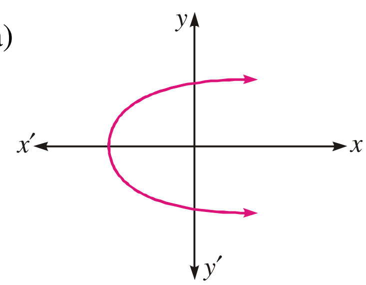
2. निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक का ग्राफ खींचिए :

(a) $y = 3x^2$ (b) $y = -x^2$ (c) $y = x^2 - 2$

(d) $y = 5 - x^2$ (e) $y = 2x^2 + 1$ (f) $y = 1 - 2x^2$

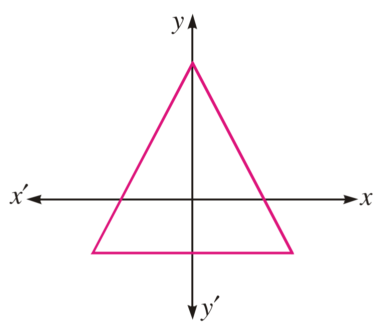
3. नीचे दिए गए ग्राफों में से कौन-कौन फलन को प्रदर्शित करते हैं :

(a)



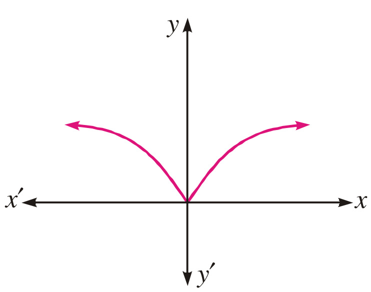
चित्र 2.20

(b)



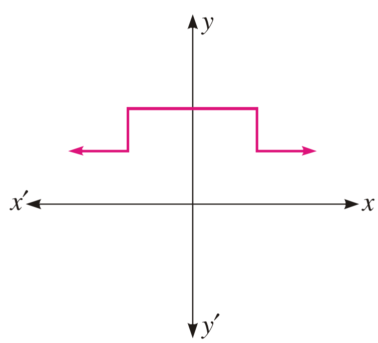
चित्र 2.21

(c)



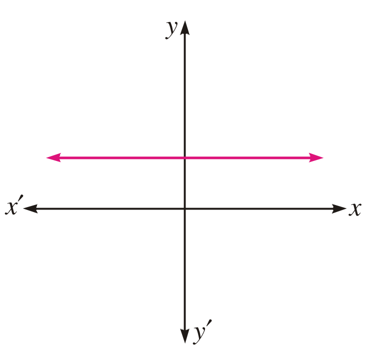
चित्र 2.22

(d)



चित्र 2.23

(e)



चित्र 2.24

संकेत: यदि y अक्ष के समान्तर कोई रेखा ग्राफ को एक से अधिक बिंदुओं पर काटे, तो ग्राफ फलन प्रदर्शित नहीं करता।

2.5 कुछ विशेष फलन

2.5.1 एकदिष्ट (Monotonic) फलन

मान लीजिए कि $F: A \to B$ एक फलन है तब f, अन्तराल (a, b) में एकदिष्ट कहलाएगा यदि वह इस अन्तराल में वर्धमान (increasing) या ह्रासमान (Decreasing) हो। अन्तराल (a, b) में, फलन के वर्धमान के लिए $x_1 < x_2 \;\Rightarrow F(x_1) < F(x_2) \;\; \forall \;\; x_1\; x_2 \in (a, b)$

और अन्तराल (a, b) में, फलन के ह्रासमान के लिए

$x_1 < x_2 \;\Rightarrow F(x_1) > F(x_2) \;\; \forall \;\; x_1\; x_2 \in (a, b)$

एक फलन पूरे प्रान्त में एकदिष्ट नहीं हो सकता परन्तु विभिन्न अन्तरालों में हो सकता है।

फलन $F: R \to R$, जो $f(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित है, पर विचार कीजिए।

$$\forall \;\; x_1, x_2 \in [0, \infty] \quad x_1 < x_2 \;\Rightarrow F(x_1) < F(x_2)$$

$\Rightarrow$ F अन्तराल $[0, \infty]$ में एकदिष्ट है।

[$\because$ इस अन्तराल में फलन वर्धमान है।]

परन्तु $\forall\; x_1, x_2 \in (-\infty, 0) \;\; x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; F(x_1) > F(x_2)$

$\Rightarrow$ f अन्तराल $[-\infty, 0]$ में एकदिष्ट है। ($\because$ इस अन्तराल में फलन ह्रासमान है।)

अगर हम पूरे प्रान्त की बात करें तो यह फलन R पर एकदिष्ट नहीं है। परन्तु यह अन्तराल $(-\infty, 0)$ और $(0, \infty)$ पर एकदिष्ट है।

पुनः फलन $F: R \to R$ पर विचार कीजिए जो $f(x) = x^3$ द्वारा परिभाषित है। स्पष्टतः $\forall\; x_1\; x_2 \in$ प्रान्त

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow F(x_1) < F(x_2)$$

$\therefore$ दिया हुआ फलन R पर अर्थात पूरे प्रान्त पर एकदिष्ट है।

2.5.2 सम फलन

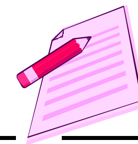
एक फलन को सम फलन कहा जाता है यदि प्रान्त के प्रत्येक x के लिए $F(-x) = F(x)$

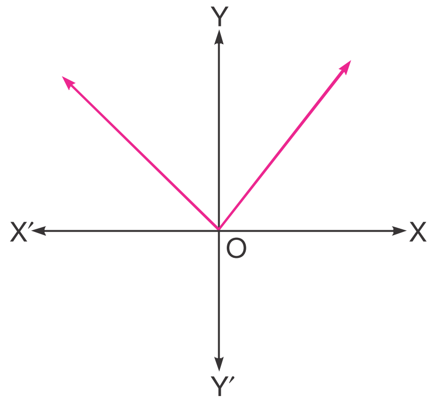
उदाहरणार्थ, निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन एक सम फलन है

(i) यदि $F(x) = x^2$, तब $F(-x) = (-x)^2 = x^2 = F(x)$

(ii) यदि $F(x) = \cos x$, तब $F(-x) = \cos(-x) = \cos x = F(x)$

(iii) यदि $F(x) = |x|$, तब $F(-x) = |-x| = |x| = F(x)$





चित्र 2.25

इस समफलन (मापांक फलन) का ग्राफीय प्रदर्शन ऊपर चित्र में दर्शाया गया है।

प्रेक्षण : ग्राफ y-अक्ष के सापेक्ष सममित है।

2.5.3 विषम फलन

एक फलन को विषम फलन कहा जाता है यदि प्रत्येक x के लिए $f(-x) = -f(x)$

उदाहरणार्थ,

(i) यदि $f(x) = x^3$

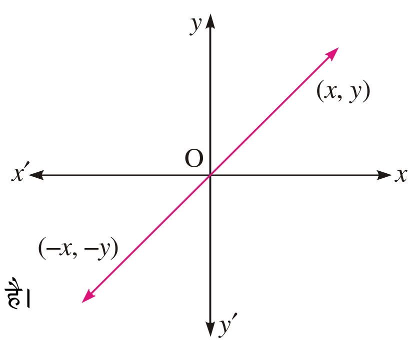
तो $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

(ii) यदि $f(x) = \sin x$

तो $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$

विषम फलन $y = x$ का ग्राफ चित्र 15.46 में दिया गया है।

प्रेक्षण : ग्राफ मूल बिन्दु के सापेक्ष सममित है।



चित्र 2.26

2.5.4 सोपान फलन या महत्तम पूर्णांक फलन

$f(x) = [x]$ जो कि ऐसा सबसे बड़ा पूर्णांक है, जो x से छोटा अथवा इसके बराबर हो। इस प्रकार से परिभाषित फलन को महत्तम पूर्णांक फलन (Greatest Integer function) या सोपान फलन कहते हैं। इसके ग्राफ में सोपान होते हैं।

आइए फलन $y = [x], x \in R$ का ग्राफ खींचें

$[x] = 1, \quad 1 \le x < 2$

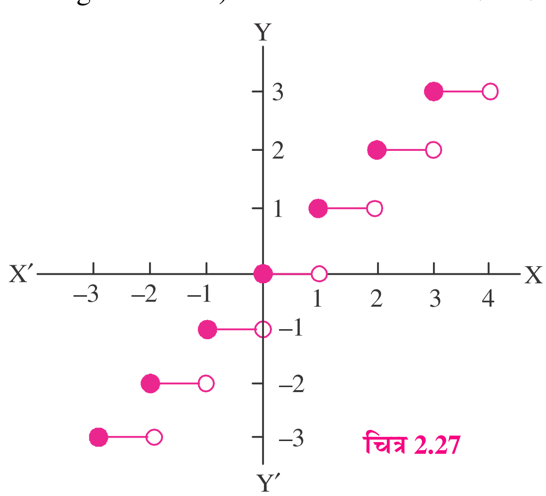
$[x] = 2, \quad 2 \le x < 3$

$[x] = 3, \quad 3 \le x < 4$

$[x] = 0, \quad 0 \le x < 1$

$[x] = -1, \quad -1 \le x < 0$

$[x] = -2, \quad -2 \le x < -1$



चित्र 2.27

- सोपान फलन का प्रान्त वास्तविक संख्याओं का समुच्चय होता है।
- सोपान फलन का परिसर पूर्णांकों का समुच्चय होता है।

2.5.5 बहुपद फलन

बहुपद रूप में परिभाषित फलन बहुपद फलन कहलाता है। उदाहरणार्थ

(i) $f(x) = 3x^2 - 4x - 2$ (ii) $f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$ (iii) $f(x) = x^3$

सभी बहुपद फलन हैं।

टिप्पणी:

$f(x) = K$ के रूप वाले फलन को अचर फलन कहते हैं जहाँ K एक अचर है।

2.5.6 परिमेय फलन

$f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ के रूप वाले फलन को परिमेय फलन कहते हैं जहाँ $g(x)$ तथा $h(x)$ बहुपद हैं

और $h(x) \neq 0$ उदाहरणार्थ, $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 1}, x \neq -1$ एक परिमेय फलन है।

2.5.7 प्रतिलोम फलन

$y = \dfrac{1}{x}$ के रूप वाले फलन को प्रतिलोम फलन कहते हैं जहाँ $x \neq 0$

2.5.8 चर घातांकी फलन

स्विस गणितज्ञ लियोनार्ड आयलर Leonhard Euler ने संख्या 'e' को अनन्त श्रेणी के रूप में अवगत कराया। वास्तव में $e = 1 + \dfrac{1}{\underline{|1}} + \dfrac{1}{\underline{|2}} + \dfrac{1}{\underline{|3}} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{\underline{|n}} + \ldots\ldots$ ...(1)

यह विदित है कि इसकी अनन्त श्रेणी का योग एक परिमित सीमा की ओर जाता है (अर्थात यह श्रेणी अभिसारी है।) और इसलिए यह एक धनात्मक वास्तविक संख्या है जिसे 'e' से निरूपित किया जाता है। यह संख्या e एक अबीजीय अपरिमेय संख्या है और इसका मान 2 तथा 3 के बीच में होता है। अब नीचे दी गयी अनन्त श्रेणी पर विचार कीजिए: $1 + \dfrac{x}{\underline{|1}} + \dfrac{x^2}{\underline{|2}} + \dfrac{x^3}{\underline{|3}} + \ldots\ldots + \dfrac{x^n}{\underline{|n}} + \ldots\ldots$

यह दर्शाया जा सकता है कि इस अनन्त श्रेणी का योग एक परिमित सीमा की ओर जाता है जिसे हम e^x से प्रदर्शित करते हैं। अतः $e^x = 1 + \dfrac{x}{\underline{|1}} + \dfrac{x^2}{\underline{|2}} + \dfrac{x^3}{\underline{|3}} + \ldots\ldots + \dfrac{x^n}{\underline{|n}} + \ldots\ldots$ ......(2)

यह चर घातांकी प्रमेय कहलाती है और अनन्त श्रेणी, चर घातांकी श्रेणी कहलाती है। हम आसानी से देख सकते हैं कि (2) में $x = 1$ रखने पर हमें (1) प्राप्त होता है।

फलन $f(x) = e^x$ जहाँ x एक वास्तविक संख्या है, चर घातांकी फलन कहलाता है।

चर घातांकी फलन $y = e^x$ का ग्राफ निम्नलिखित तथ्यों पर विचार करने के पश्चात प्राप्त किया जाता है।

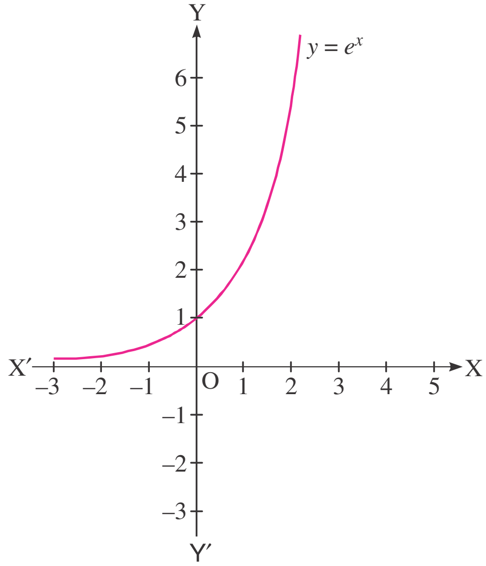
(i) जैसे-जैसे x बढ़ता है, y का मान बड़ी तेजी से बढ़ता है और जब x घटता है तो y का मान 0 के सन्निकट पहुँचता है।

(ii) यद्यपि x के किसी भी मान के लिए, $e^x \neq 0$ कोई x-अन्तखण्ड नहीं होता है।

(iii) क्योंकि $e^0 = 1$ और $e \neq 0$ y-अन्तखण्ड 1 है।

(iv) तालिका में दिए हुए विशिष्ट बिन्दु e^x के ग्राफ को खींचने में मार्ग-दर्शन करते हैं।

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = e^x$	0.04	0.13	0.36	1.00	2.71	7.38	20.08

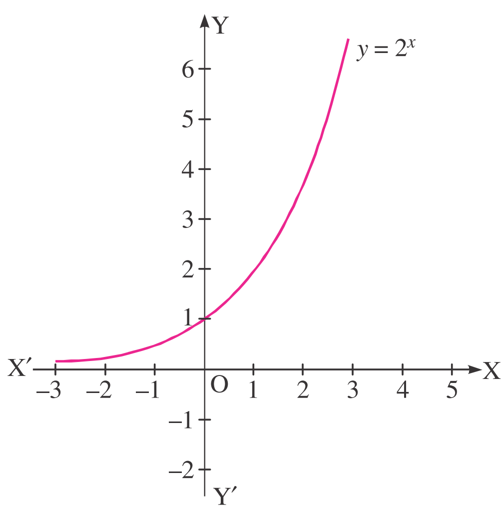


चित्र 2.28

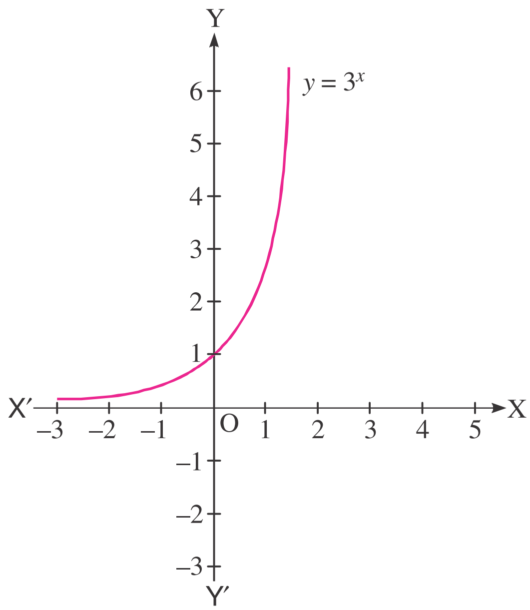
यदि हम e से अलग हटकर आधार, मान लीजिए 'a' लें, हमें चर घातांकी फलन

$f(x) = a^2$, प्राप्त होगा यदि $a < 0$, तथा $a \neq 1$ हो

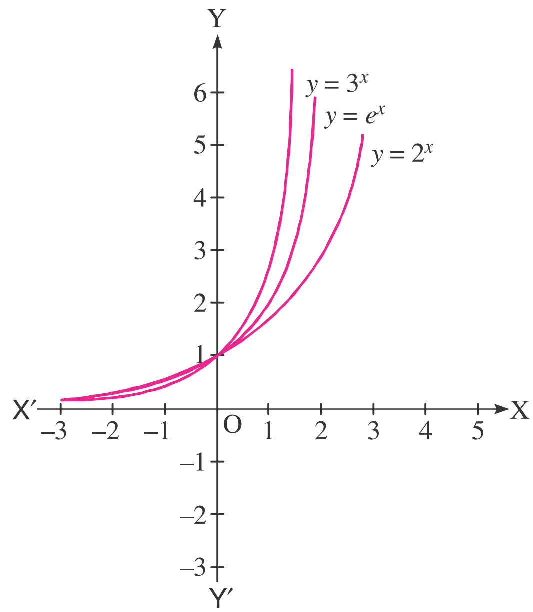
उदाहरणार्थ, हम $a = 2$ या $a = 3$ ले सकते हैं और फलनों $y = 2^x$ [देखिए चित्र 15.49] तथा $y = 3^x$ [देखिए चित्र 15.50] के ग्राफ को प्राप्त करते हैं। चित्र 15.51 में $e^x, 2^x$ तथा 3^x के आलेख (ग्राफ) एक साथ दिखाए गए हैं।



चित्र 2.29



चित्र 2.30



चित्र 2.31

2.5.9 लघु गणकीय फलन

अब फलन $y = e^x$ .....(3)

पर पुनः विचार कीजिए।

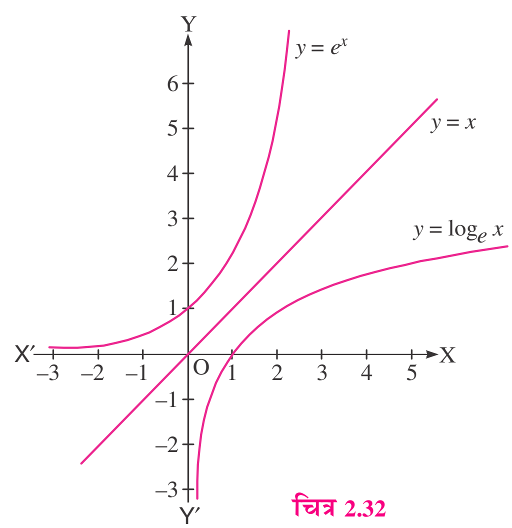
हम इसे समान रूप में ऐसे भी लिख सकते हैं

$$x = \log_e y$$

इस प्रकार $y = \log_e x$ $y = e^x$ का प्रतिलोम फलन है। .....(4)

यदि यह 'e' है तो लघु का आधार नहीं लिखते है और इस प्रकार $\log_e x$ को सामान्यतः $\log x$ के रूप में लिखा जाता है। क्योंकि $y = e^x$ और $y = \log x$ प्रतिलोम फलन हैं। और उनके ग्राफ रेखा $y = x$ के सापेक्ष सममित हैं।

$y = \log x$ का ग्राफ रेखा $y = x$ से प्रतिबिम्बित करके $y = e^x$ से प्राप्त हो सकता है।



चित्र 2.32

टिप्पणी:

विद्यार्थी घातांक के नियमों को पुनः स्मरण कर सकते हैं जो उन्होंने पिछली कक्षाओं में पढ़े थे। यदि $a > 0$, और m तथा n परिमेय संख्याएँ हों तो

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},\ a^m \div a^n = a^{m-n},\ (a^m)^n = a^{mn},\ a^0 = 1$$

संगत लघु गणक के नियम हैं :

$$\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n, \quad \log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$$

$$\log_a(m^n) = n\log_a m, \quad \log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$$

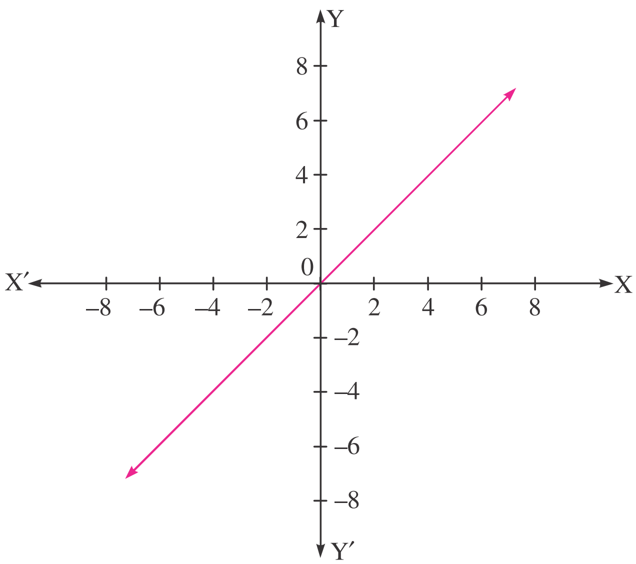
या $\quad \log_b m = \log_a m \log_b a \qquad$ यहां $a, b > 0, \; a \neq 1, \; b \neq 1.$

2.5.10 तत्समक फलन

मान लीजिए R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। प्रत्येक $x \in R$ के लिए $y = f(x) = x$ द्वारा परिभाषित वास्तविक मान फलन $f : R \to R$ है। इस प्रकार के फलन को तत्समक फलन कहते हैं।

यहाँ f के परिसर तथा प्रांत R है।

इसका आलेख एक सरल रेखा होती है। यह रेखा मूलबिन्दु से होकर जाती है।



$f(x) = x$

चित्र 2.33

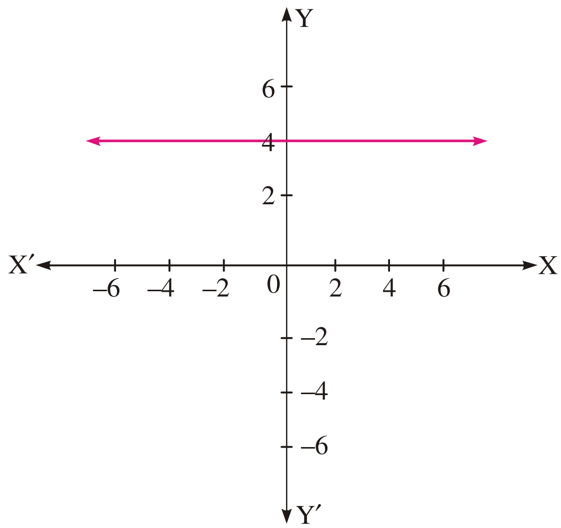
2.5.11 अचर फलन

प्रत्येक $x \in R$ के लिए $y = f(x) = c$ जहाँ c एक अचर है द्वारा परिभाषित एक वास्तविक मान फलन $f : R \to R$ है।

यहाँ f का प्रांत R एवं परिसर $\{c\}$ है

f का आलेख x-अक्ष के समान्तर एक रेखा है।

उदाहरण के लिए $f(x) = 4$ प्रत्येक $x \in R$ है, तब इसका आलेख इस प्रकार दर्शाया जाता है।



$f(x) = 4$

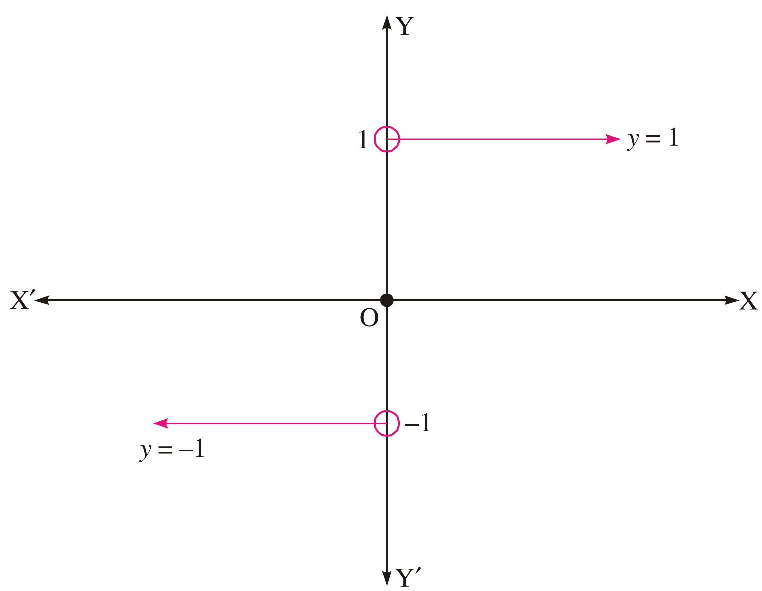
चित्र 2.34

2.5.12 चिह्न (Signum) फलन

प्रत्येक $x \in R$ के लिए

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ if } x > 0 \\ 0, \text{ if } x = 0 \\ -1, \text{ if } x < 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन $f : R \to R$ चिह्न (Signum) फलन कहलाता है। चिह्न फलन का प्रांत R है। एवं परिसर समुच्चय {–1, 0, 1} है। चिह्न फलन का आलेख नीचे दिया गया है :



चित्र 2.35

देखें आपने कितना सीखा 2.5

1. सही कथनों पर निशान ✓ लगाइए :

(i) फलन $f(x) = 2x^4 + 7x^2 + 9x$ एक सम फलन है।

(ii) विषम फलन $y-$अक्ष के सापेक्ष सममित होता है।

(iii) $f(x) = x^{1/2} - x^3 + x^5$ एक बहुपद फलन है।

(iv) सभी $x \in R$ के लिए $f(x) = \dfrac{x-3}{3+x}$ एक परिमेय फलन है।

(v) $f(x) = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ एक परिमेय फलन है।

(vi) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ का प्रान्त 0 के अतिरिक्त सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

(vii) सोपान फलन न तो सम है न विषम

2. निम्नलिखित में से कौन से फलन सम तथा कौन से विषम फलन हैं।

(a) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2}{5+x^2}$ (c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+5}$

(d) $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$ (e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ (f) $f(x) = \dfrac{5}{x-5}$

(g) $f(x) = \dfrac{x-3}{3+x}$ (h) $f(x) = x - x^3$

3. फलन $y = [x] - 2$ का ग्राफ खींचिए।

4. निम्नलिखित फलनों का बहुपद फलन, परिमेय फलन, प्रतिलोम फलन अथवा अचर फलन में वर्गीकरण कीजिए :

(a) $y = 3x^8 - 5x^7 + 8x^5$ (b) $y = \dfrac{x^2+2x}{x^3-2x+3},\ x^3 - 2x + 3 \neq 0$

(c) $y = \dfrac{3}{x^2},\ x \neq 0$ (d) $y = 3 + \dfrac{2x+1}{x},\ x \neq 0$

(e) $y = 1 - \dfrac{1}{x},\ x \neq 0$ (f) $y = \dfrac{x^2-5x+6}{x-2},\ x \neq 2$ (g) $y = \dfrac{1}{9}$.

2.6 फलनों का योग, अन्तर, गुणा एवं भाग

(i) दो वास्तविक फलनों का योग :

मान लीजिए कि $f : X \to R$ तथा $g : X \to R$ कोई दो वास्तविक फलन हैं जहाँ $X \subset R$ है, तब हम सभी $x \in R$ के लिए $(f+g) : X \to R$ इस प्रकार परिभाषित करते हैं :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \text{ सभी } x \in X$$

माना $\qquad f(x) = x^2,\ g(x) = 2x + 1,\ x \in X$

तब $\qquad (f+g)\,(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 2x + 1$

(ii) एक वास्तविक फलन में से दूसरे को घटाना

मान लीजिए कि $f : X \to R$ तथा $g : X \to R$ कोई दो वास्तविक फलन हैं जहाँ $X \subset R$ है, तब हम $(f - g) : X \to R$ को इस प्रकार परिभाषित करते हैं।

$$(f-g)x = f(x) - g(x), \text{ सभी } x \in X \text{ के लिए}$$

माना $\qquad f(x) = x^2,\ g(x) = 2x + 1,\ x \in X$

$$(f-g)\,(x) = f(x) - g(x) = x^2 - (2x+1) = x^2 - 2x - 1$$

(iii) दो वास्तविक फलनों का गुणन

दो वास्तविक फलनों $f : X \to R$ तथा $g : X \to R$ का गुणनफल एक फलन $f\,.\,g : X \to R$ है जो निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है

$$(f\,g)\,(x) = f(x)\,.\,g(x) \text{ सभी } x \in X \text{ के लिए}$$

माना $\qquad f(x) = x^2,\ g(x) = 2x + 1,\ x \in X$

तब $\qquad (f\,.\,g)(x) = f(x)\,.\,g(x) = x^2\,.\,(2x+1) = 2x^3 + x^2$

(iv) दो वास्तविक फलनों का भागफल

मान लीजिए कि f तथा g, $X \to R$ द्वारा परिभाषित दो वास्तविक फलन हैं, जहाँ $X \subset R$ है. f से g का भागफल, जिसे $\frac{f}{g}$ से निरूपित करते हैं, एक फलन है जिसे निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है :

$$\left(\frac{f}{g}\right)x = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ जहाँ } g(x) \neq 0,\ x \in X$$

माना $\qquad f(x) = x^2,\ g(x) = 2x + 1$

तब $\qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{2x+1}, x \neq \frac{-1}{2}$

उदाहरण 2.17. मान लीजिए $f(x) = \sqrt{x}$ तथा $g(x) = x$, ऋणेत्तर वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित दो फलन हैं, तो $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\,g)(x)$ तथा $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ हमें दिया हुआ है कि $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x$

तब $\qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + x$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} - x$$

$$(f\,g)(x) = f(x)\,.\,g(x) = \sqrt{x}\,.\,x = x^{3/2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{x} = x^{\frac{-1}{2}}, x \neq 0$$

देखें आपने कितना सीखा 2.6

1. एक फलन $f(x) = 3x + 4$ द्वारा परिभाषित किया गया है। निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए :
   (*i*) $f(0)$ (*ii*) $f(7)$ (*iii*) $f(-3)$
2. माना $f, g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ क्रमशः $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x - 3$ से परिभाषित किए गए हैं। $(f + g)$, $(f - g)$ $(f\,g)$ तथा $\left(\frac{f}{g}\right)$ ज्ञात कीजिए।

आइये दोहराएँ

- दो समुच्चयों A तथा B का कार्तीय गुणन उन सभी क्रमित युग्मों का समुच्चय होता है जो A तथा B के अवयव होते हैं। इसे $\mathrm{A \times B}$ से प्रदर्शित करते हैं, अर्थात

$$\mathrm{A \times B} = \left\{(\mathrm{a, b}) : \mathrm{a} \in \mathrm{A} \text{ और } \mathrm{b} \in \mathrm{B}\right\}.$$

- संबंध R, $\mathrm{A \times B}$ का उपसमुच्चय होता है जहाँ A और B समुच्चय है अर्थात

$$\mathrm{R} \subseteq \mathrm{A \times B} = \left\{(\mathrm{a, b}) : \mathrm{a} \in \mathrm{A} \text{ और } \mathrm{b} \in \mathrm{B} \text{ और } \mathrm{aRb}\right\}$$

- फलन एक विशेष प्रकार का सम्बन्ध होता है।
- फलन $\mathrm{f : A \to B}$, A से B पर संगतता का एक नियम होता है ताकि A का प्रत्येक अवयव B के एक अद्वितीय अवयव से सम्बद्ध हो।
- फलन, क्रमित युग्मों के समुच्चय से भी बताया जा सकता है।
- मान लीजिए कि f, A का B पर एक फलन है, तो

  प्रान्त : फलन 'f' के क्रमित युग्मों के प्रथम अवयवों का समुच्चय होता है।

  परिसर : फलन f के क्रमित युग्मों के द्वितीय अवयवों का समुच्चय होता है।
- फलन को एक समीकरण के रूप में भी लिखा जा सकता है। जैसे $\mathrm{y = f(x)}$

  जहाँ x स्वतंत्र चर है और 'y' आश्रित चर है।

  प्रान्त : स्वतंत्र चर का समुच्चय

  परिसर : आश्रित चर का समुच्चय
- प्रत्येक समीकरण फलन निरूपित नहीं करता।
- **उर्ध्वाधर रेखा जाँच**–ग्राफ फलन है या नहीं, की जाँच करने के लिए हम y-अक्ष के समान्तर एक रेखा खींचते हैं। यदि यह रेखा ग्राफ को एक से अधिक बिन्दुओं पर काटती है तो ग्राफ फलन प्रदर्शित नहीं करता।
- एक फलन एक अन्तराल में एकदिष्ट कहलाता है यदि वह उस अन्तराल में या तो वर्धमान हो या ह्रासमान हो।

- एक फलन सम फलन कहलाता है यदि $f(x) = f(-x)$ और विषम फलन यदि $f(-x) = -f(x)$, जहाँ $x, -x \in f$ का प्रान्त।
- $f, g : X \to R$ तथा $X \subset R$, तब
  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
  $(f \,.\, g)x = f(x) \,.\, g(x)$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$
- एक वास्तविक फलन, वास्तविक संख्याओं का समुच्चय होता है या इनमें से इसके उपसमुच्चय इसके प्रांत तथा परिसर दोनों हैं।

सहायक वेबसाईट

- *http://www.bbc.co.uk/education/asguru/maths/13pure/02functions/06composite/index.shtml*
- *http://en.wikipedia.org/wiki/functions*
- *http://en.wikipedia.org/wiki/relations*

आइए अभ्यास करें

1. दिया है $A = \{a, b, c\}$, तथा $B = \{2, 3\}$; A से B पर के संबंधों की संख्या ज्ञात कीजिए।

2. दिया है $A = \{7, 8, 9\}$, तथा $B = \{9, 10, 11\}$, सत्यापित कीजिए कि

(i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ (ii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

3. निम्नलिखित में से कौन से समीकरण फलन प्रदर्शित करते हैं। प्रत्येक स्थिति में $x \in R$ है।

(a) $y = \dfrac{2x + 3}{4 - 5x}, x \neq \dfrac{4}{5}$ (b) $y = \dfrac{3}{x}, x \neq 0$ (c) $y = \dfrac{3}{x^2 - 16}, x \neq 4, -4$

(d) $y = \sqrt{x - 1},\ x \geq 1$ (e) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ (f) $x^2 + y^2 = 25$

4. निम्नलिखित फलनों के प्रान्त तथा परिसर लिखिए :

$f_1 : \{(0,1), (2,3), (4,5)(6,7), \ldots\ldots (100,101)\}$

$f_2 : \{(-2,4), (-4,16), (-6,36) \ldots\ldots\}$

$f_3 : \left\{(1,1), \left(\frac{1}{2}, -1\right), \left(\frac{1}{3}, 1\right)\left(\frac{1}{4}, -1\right), \ldots\ldots\right\}$

$f_4 : \{\ldots\ldots (3,0), (-1,2), (4,-1)\}$

$f_5 : \{\ldots\ldots (-3,3), (-2,2), (-1,1)(0,0)(1,1), (2,2), \ldots\ldots\}$

5. निम्नलिखित फलनों के प्रान्त लिखिए :

(a) $f(x) = x^3$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

(c) $f(x) = \sqrt{3x+1}$ (d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x+1)(x+6)}}$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(2x-5)}}$

6. निम्नलिखित फलनों के परिसर लिखिए :

(a) $y = 3x + 2,\ x \in R$ (b) $y = \dfrac{1}{x-2},\ x \in R - \{2\}$

(c) $y = \dfrac{x-1}{x+1},\ x \in \{0, 2, 3, 5, 7, 9\}$ (d) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}},\ x \in R^+$ (सभी ऋणेतर वास्तविक मान)

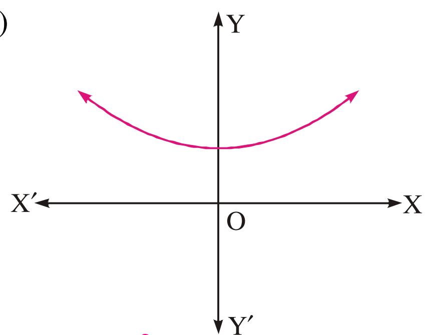
7. नीचे दिए गए फलनों के ग्राफ खींचिए :

(a) $y = x^2 + 3,\ x \in R$ (b) $y = \dfrac{1}{x-2}, x \in R - \{2\}$

(c) $y = \dfrac{x-1}{x+1}, x \in \{0, 2, 3, 5, 7, 9\}$ (d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, x \in R^+$.

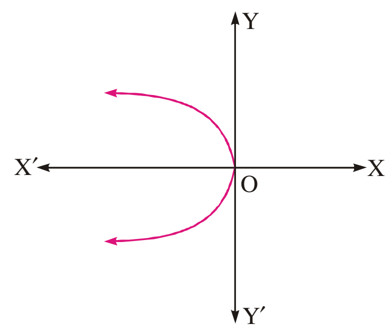
8. निम्नलिखित में कौन-कौन से ग्राफ फलन प्रदर्शित करते हैं :

(a)



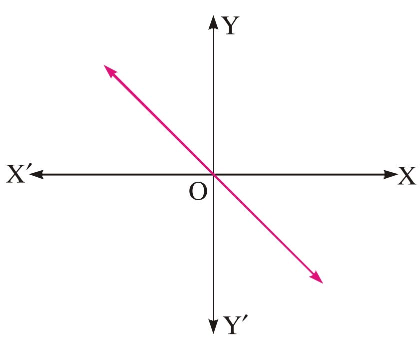
चित्र 2.36

(b)



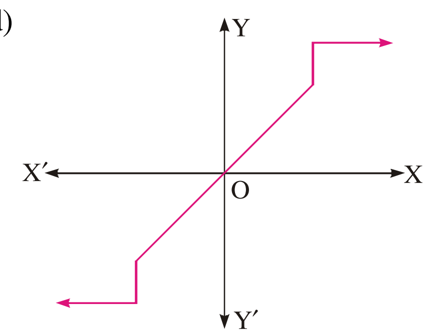
चित्र 2.37

(c)



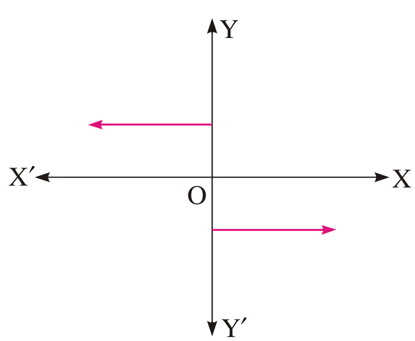
चित्र 2.38

(d)



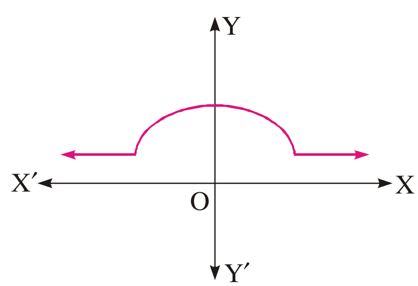
चित्र 2.39

(e)



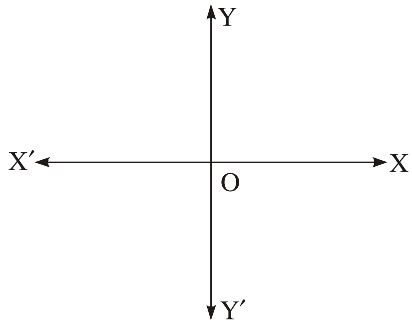
चित्र 2.40

(f)



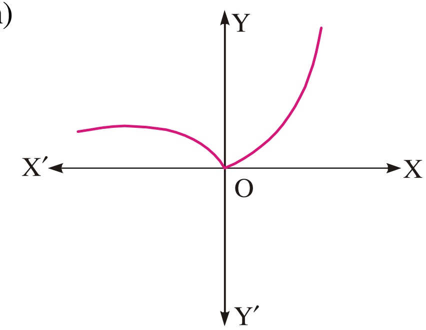
चित्र 2.41

(g)



चित्र 2.42

(h)



चित्र 2.43

9. निम्नलिखित फलनों में कौन से परिमेय फलन हैं ?

(a) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+2}, x \in R - \{-2\}$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}}, x \in R^+$

(c) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+4x+4}, x \in R - \{-2\}$ (d) $y = x, x \in R$

10. निम्नलिखित फलनों में कौन से बहुपद फलन है ?

(a) $f(x) = x^2 + \sqrt{3}\, x + 2$ (b) $f(x) = (x+2)^2$

(c) $f(x) = 3 - x + 2x^3 - x^4$ (d) $f(x) = \sqrt{x} + x - 5, \ x \geq 0$

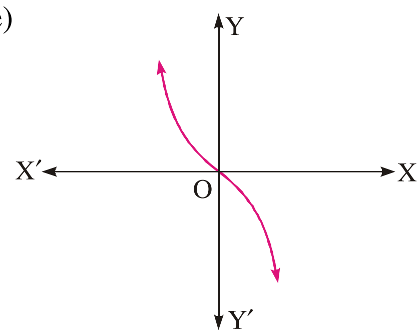
(e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}, x \notin (-2, 2)$

11. निम्नलिखित फलनों में कौन से सम फलन है और कौन से विषम फलन हैं?

(a) $f(x) = \sqrt{9 - x^2} \quad x \in [-3, 3]$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

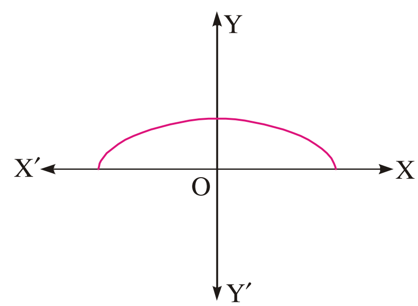
(c) $f(x) = |x|$ (d) $f(x) = x - x^5$

(e)



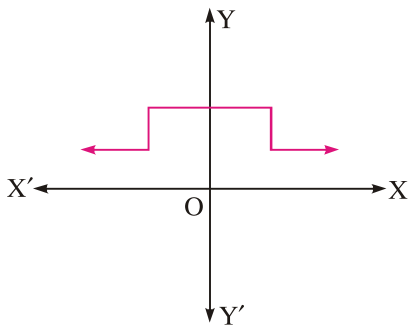
चित्र 2.44

(f)



चित्र 2.45

(g)



चित्र 2.46

12. माना एक फलन f, $f(x) = 5x^2 + 2$, $x \in R$ से परिभाषित है

(i) f के अंतर्गत 3 की प्रतिबिम्ब ज्ञात कीजिए।

(ii) $f(3) \times f(2)$ ज्ञात कीजिए।

(iii) x ज्ञात कीजिए जबकि $f(x) = 22$

13. माना $f(x) = x + 2$ तथा $g(x) = 2x - 3$ दो वास्तविक फलन हैं। निम्नलिखित फलनों को ज्ञात कीजिए :

(i) $f + g$ (ii) $f - g$

(iii) $f \,.\, g$ (iv) $\dfrac{f}{g}$

14. यदि $f(x) = (2x + 5)$, $g(x) = x^2 - 1$ दो वास्तविक मान फलन हैं। निम्नलिखित फलनों को ज्ञात कीजिए :

(i) $f + g$ (ii) $f - g$ (iii) fg

(iv) $\dfrac{f}{g}$ (v) $\dfrac{g}{f}$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 2.1

2. $\{(2,1),(4,1),(2,4),(4,4)\}$.

3. (i) $R = \{(4,2),(4,4),(6,2),(6,3),(8,2),(8,4),(10,2),(10,5)\}$.

(ii) R का प्रांत, $R = \{4,6,8,10\}$.

(iii) R का परिसर, $R = \{2,3,4,5\}$.

4. (i) $R = \{(1,8),(2,4)\}$.

(ii) R का प्रांत, $R = \{1,2\}$,

(iii) R का परिसर, $R = \{1,2\}\{8,4\}$

5. (i) $R = \{(2,4),(3,9),(5,25),(7,49),(11,121),(13,169)\}$

R का प्रांत, $R = \{2,3,5,7,11,13\}$,

R का परिसर, $R = \{4,9,25,49,121,169\}$.

6. (i) R का प्रांत $= \phi$

(ii) R का प्रांत $= \phi$

(iii) R का परिसर $= \phi$

7. $x = 2, y = 3$.

8. $\{(-1,-1,-1),(-1,-1,1),(-1,1,-1),(-1,1,1),(1,-1,-1),(1,-1,1),(1,1,-1),(1,1,1)\}$

9. $A = \{a, b\}, B = \{x, y\}$ 10. 18

देखें आपने कितना सीखा 2.2

1. (a), (c), (f)

2. (a), (b)

3. (a), (d)

4. (a) प्रांत $= \{\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{3}\}$, परिसर $= \{2, -1, 5\}$

(b) प्रांत $= \{-3, -2, -1\}$, परिसर $= \left\{\frac{1}{2}\right\}$

(c) प्रांत $= \{1, 0, 2, -1\}$, परिसर $= \{1, 0, 2, -1\}$,

(d) प्रांत = {दीपक, संदीप, राजन} परिसर = {16, 28, 24}.

5. (a) प्रांत = {1, 2, 3}, परिसर = {4, 5, 6}, (b) प्रांत = {1, 2, 3}, परिसर = {4}

(c) प्रांत = {1, 2, 3}, परिसर = {1, 2, 3}, (d) प्रांत = {गगन, राम, सलिल} परिसर = {8, 9, 5}.

(e) प्रांत = {a, b, c}, परिसर = {2, 4}

देखें आपने कितना सीखा 2.3

1. (a) (i) प्रांत = वास्तविक संख्याओं का समुच्चय

(ii) प्रांत = वास्तविक संख्याओं का समुच्चय

(iii) प्रांत = वास्तविक संख्याओं का समुच्चय

(b) (i) प्रांत $= R - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ (ii) प्रांत $= R - \left\{-\frac{1}{4}, 5\right\}$

(iii) प्रांत $= R - \{3, 5\}$ (iv) प्रांत $= R - \{3, 5\}$

(c) (i) प्रांत $= \{x \in R : x \leq 6\}$, (ii) प्रांत $= \{x \in R : x \geq -7\}$

(iii) प्रांत $= \left\{x : x \in R, x \geq -\frac{5}{3}\right\}$

(d) (i) प्रांत $= \{x : x \in R$ और $3 \leq x \leq 5\}$, (ii) प्रांत $= \{x : x \in R \;\; x \geq 3, x \leq -5\}$

(iii) प्रांत $= \{x : x \in R \;\; x \geq -3, x \leq -7\}$, (iv) प्रांत $= \{x : x \in R \;\; x \geq 3, x \leq -7\}$

2. (a) (i) परिसर $= \{13, 25, 31, 7, 4\}$, (ii) परिसर $= \{19, 9, 33, 1\}$, (iii) परिसर $= \{2, 4, 8, 14, 22\}$

(b) (i) परिसर $= \{f(x) : -2 \leq f(x) \leq 2\}$ (ii) परिसर $= \{f(x) : 1 \leq f(x) \leq 10\}$

(c) (i) परिसर $= \{f(x) : 1 \leq f(x) \leq 25\}$ (ii) परिसर $= \{f(x) : -6 \leq f(x) \leq 6\}$

(iii) परिसर $= \{f(x) : 1 \leq f(x) \leq 5\}$ (iv) परिसर $= \{f(x) : 0 \leq f(x) \leq 5\}$

(d) (i) परिसर $= R$ (ii) परिसर $= R$

(iii) परिसर $= R$ (iv) परिसर $= \{f(x) : f(x) < 0\}$

(v) परिसर $= \{f(x) : -1 \leq f(x) < 0\}$

(vi) परिसर $= \{f(x) : 0.5 \leq f(x) < 0\}$

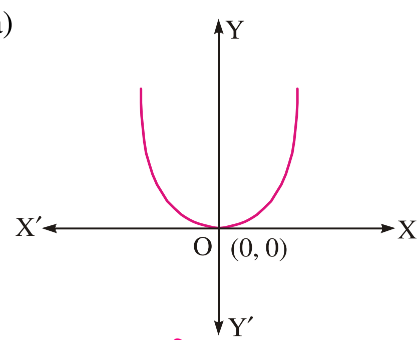
(vii) परिसर $= \{f(x) : f(x) > 0\}$

(viii) परिसर : $x = -5$ के अतिरिक्त $f(x)$ के सभी मान।

देखें आपने कितना सीखा 2.4

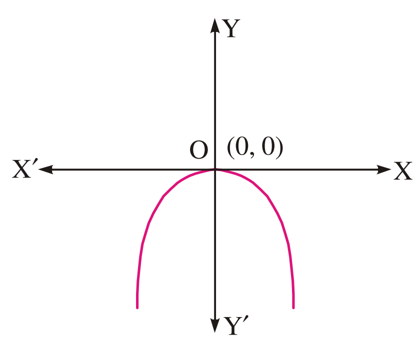
1. (i) नहीं (ii) हाँ

2. (a)



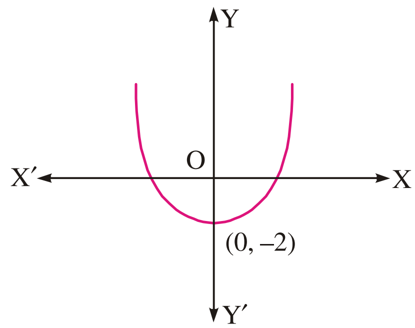
चित्र 2.47

(b)



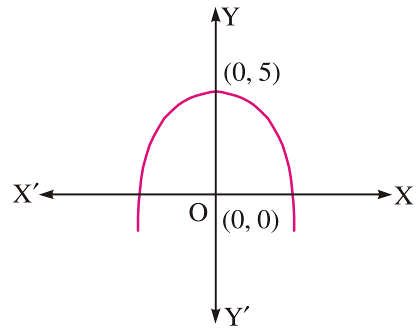
चित्र 2.48

(c)



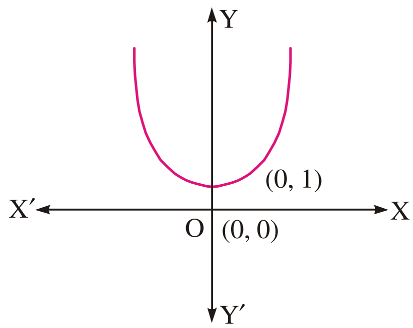
चित्र 2.49

(d)



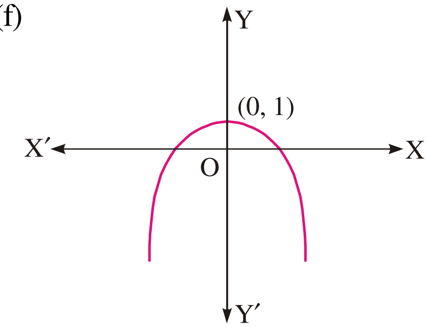
चित्र 2.50

(e)



चित्र 2.51

(f)



चित्र 2.52

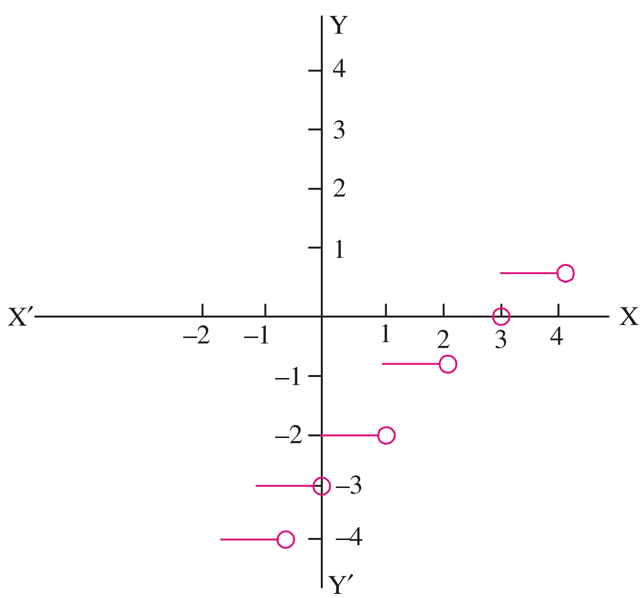
3. (c), (d) और (e).

देखें आपने कितना सीखा 2.5

1. v, vi, vii सत्य कथन हैं। (i), (ii), (iii), (iv) असत्य कथन हैं।

2. (b), (c) सम फलन हैं तथा (d), (e), (h) विषम फलन हैं।

3.



चित्र 2.53

4. (a) बहुपद फलन (b) परिमेय फलन (c) परिमेय फलन (d) परिमेय फलन
   (e) परिमेय फलन (f) परिमेय फलन (g) अचर फलन

देखें आपने कितना सीखा 2.6

1. (i) 4 (ii) 25 (iii) –5
2. $(f+g)x = 3x-2 = 3x-2$, $(f-g)x = 4-x$,

   $(f\cdot g)x = 2x^2 - x - 3$, $\left(\frac{f}{g}\right)x = \frac{x+1}{2x-3}, x \neq \frac{3}{2}$

आइए अभ्यास करें

1. 2^6 अर्थात् 64
3. (a), (b), (c), (d), (e) फलन हैं।
4. f_1 : –प्रांत = $\{0, 2, 4, 6, ...100\}$, परिसर = $\{1, 3, 5, 7, ...101\}$.

   f_2 : –प्रांत = $\{-2, -4, -6, ...\}$, परिसर = $\{4, 16, 36, ...\}$.

   f_3 : –प्रांत = $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$, परिसर = $\{1, -1\}$.

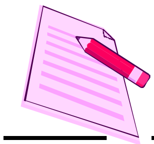
   f_4 : –प्रांत = $\{3, -1, 4\}$, परिसर = $\{0, 2, -1\}$.

   f_5 : –प्रांत = $\{...... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$, परिसर = $\{0, 1, 2, 3, ...\}$
5. (a) प्रांत = R (b) प्रांत = $R - \{-1, 1\}$,

   (c) प्रांत = $x \geq -\frac{1}{3}$ $\cancel{\forall}$ $x \in R$ (d) प्रांत = $x \geq -1, x \leq -6$

   (e) प्रांत = $x \geq \frac{5}{2}, x \leq 1$.
6. (a) प्रांत = R (b) परिसर = $x = 2$ पर y के सभी मान

   (c) प्रांत = $\left\{-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right\}$ (d) प्रांत = $x > 0$ के लिए y के सभी मान
8. (a), (c), (e), (f), (h).
9. (a), (c) 10. (a), (b), (c)
11. सम फलन : (a), (b), (c), (f), (g), विषम फलन : (d), (e)
12. (i) $f(3) = 47$, (ii) $f(3) \times f(2) = 1034$, (iii) $x = 2, -2$



13. (i) $f + g = 3x - 1$, (ii) $f - g = -x + 5$,

(iii) $fg = 2x^2 + x - 6$ (iv) $f/g = \frac{x+2}{2x-3}, x \neq \frac{3}{2}$

14. (i) $f + g = x^2 + 2x + 4$ (ii) $f - g = -x^2 + 2x + 6$

(iii) $f \,.\, g = 2x^3 + 5x^2 - 2x - 5$ (iv) $f/g = \frac{2x+5}{x^2-1}, x \neq \pm 1$

(v) $g/f = \frac{x^2-1}{2x+5}, x \neq \frac{-5}{2}$