22

आव्यूह का प्रतिलोम तथा इसके अनुप्रयोग

आइए एक उदाहरण लें

दो पेन तथा 5 कॉपियाँ खरीदने के लिए, अभिनव 120 रु. खर्च करता है जबकि शान्तनु, 4 पेन तथा 3 कॉपियों पर 100 रु. खर्च करता है। हम आव्यूह द्वारा, एक पेन तथा 1 कॉपी का मूल्य ज्ञात करने का प्रयत्न करेंगे। माना 1 पेन का मूल्य x रु. तथा 1 कॉपी का मूल्य y रु. है। उपरोक्त सूचना को आव्यूह रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 100 \end{bmatrix}$$

इसे हम इस प्रकार लिख सकते हैं : $AX = B$

जबकि $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 120 \\ 100 \end{bmatrix}$

हमारा उद्देश्य $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ज्ञात करना है।

X ज्ञात करने के लिए, हमें एक आव्यूह A^{-1} ज्ञात करना है जिससे $X = A^{-1}B$

यह आव्यूह A^{-1}, आव्यूह A का प्रतिलोम कहलाता है। इस अध्याय में हम इस प्रकार के आव्यूह के प्रतिलोम ज्ञात करने का प्रयत्न करेंगे। हम आव्यूह विधि से रैखिक समीकरण निकाय को हल करना भी सीखेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- आव्यूह के अवयव का उपसारणिक तथा सहखण्ड परिभाषित करना
- एक आव्यूह के अवयव के उपसारणिक तथा सहखण्ड ज्ञात कर करना
- एक आव्यूह का सहखण्डज ज्ञात करना
- अव्युत्क्रमणीय तथा व्युत्क्रमणीय आव्यूह की पहचान तथा उन्हें परिभाषित करना
- एक आव्यूह का प्रतिलोम, यदि इसका अस्तित्व है, ज्ञात करना
- रैखिक समीकरण निकाय को आव्यूह रूप $AX = B$; में प्रदर्शित कर करना तथा
- आव्यूह विधि से रैखिक समीकरण निकाय को हल करना

पूर्व ज्ञान

- सारणिक की धारणा
- आव्यूह का सारणिक
- ऐसे आव्यूह जिनका सारणिक शून्य है
- आव्यूह का परिवर्त
- आव्यूह के अवयव का उपसारणिक तथा सहखण्ड

22.1 एक वर्ग आव्यूह का सारणिक

हम पहले ही पढ़ चुके हैं कि प्रत्येक वर्ग आव्यूह के साथ एक सारणिक सम्बन्धित है। किसी दिए गए आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ के लिए $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ इसका सारणिक होगा।

इसे हम $|A|$ द्वारा दर्शाते हैं।

इसी प्रकार आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$, का संगत सारणिक

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix} \text{ है।}$$

एक वर्ग आव्यूह A, अव्युत्क्रमणीय कहलाता है यदि इसका सारणिक शून्य है अर्थात् $|A| = 0$

एक वर्ग आव्यूह A, व्युत्क्रमणीय कहलाता है यदि इसका सारणिक शून्येतर है अर्थात् $|A| \neq 0$

उदाहरण 22.1. ज्ञात कीजिए कि आव्यूह A अव्युत्क्रमणीय है या व्युत्क्रमणीय जबकि

(a) $A = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

हल : (a) यहाँ पर $|A| = \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

$$= (-6)(2) - (4)(-3)$$
$$= -12 + 12 = 0$$

$\therefore$ आव्यूह A अव्युत्क्रमणीय है।

(b) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

यहाँ $= 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

$$= -7 + 4 - 3$$
$$= -6 \neq 0$$

$\therefore$ दिया गया आव्यूह व्युत्क्रमणीय है।

उदाहरण 22.2. x का मान ज्ञात कीजिए जिससे दिया गया आव्यूह A अव्युत्क्रमणीय है :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

हल : यहाँ पर

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 2 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & -3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 1(-6-2) + 2(-3-x) + 3(2-2x)$$
$$= -8 - 6 - 2x + 6 - 6x$$
$$= -8 - 8x$$

$\therefore$ A अव्युत्क्रमणीय है,

$\therefore \quad |A| = 0$

$|A| = -8 - 8x = 0$

या $\quad x = -1$

अतः x का अभीष्ट मान -1 है।

उदाहरण 22.3. दिया है $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. दिखाइए कि

$|A| = |A'|$ जबकि A' आव्यूह A के परिवर्त को दर्शाता है।

हल : यहाँ पर $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

अतः $A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

अब $\quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 3 \times 6 = -16 \quad ...(1)$

तथा $\quad |A'| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 3 \times 6 = -16 \quad ...(2)$

(1) तथा (2) से, $|A| = |A'|$

22.2 वर्ग आव्यूह के अवयवों के उपसारणिक तथा सहखण्ड

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ पर विचार कीजिए।

A की iवीं पंक्ति तथा jवें स्तम्भ को छोड़कर, प्राप्त सारणिक, अवयव a_{ij} का उपसारणिक कहलाता है तथा इसे M_{ij} द्वारा दर्शाते हैं।

अवयव a_{ij} का सहखण्ड C_{ij} इस प्रकार परिभाषित होता है:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

उदाहरणार्थ, $M_{23} = a_{23}$ का उपसारणिक

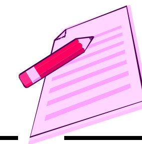
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

तथा $C_{23} = a_{23}$ का सहखण्ड

$$= (-1)^{2+3} M_{23}$$

$$= (-1)^5 M_{23}$$

$$= -M_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$



उदाहरण 22.4. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ के अवयवों के उपसारणिक तथा सहखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल :

M_{11} (2 का उपसारणिक) $= 3;\ C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 M_{11} = 3$

M_{12} (5 का उपसारणिक) $= 6;\ C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 M_{12} = -6$

M_{21} (6 का उपसारणिक) $= 5;\ C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 M_{21} = -5$

M_{22} (3 का उपसारणिक) $= 2;\ C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 M_{22} = 2$

उदाहरण 22.5. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ के अवयवों के उपसारणिक तथा सहखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ पर $M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 15+2 = 17;\ C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 17$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6+8 = 14;\ C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -14$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2-20 = -18;\ C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = -18$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9-6 = 3;\ C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -3$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (-3-24) = -27;\ C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = -27$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (-1-12) = -13;\ C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = 13$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = (-6-30) = -36;\ C_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = -36$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (2-12) = -10;\ C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 10$$

तथा $$M_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (-5-6) = -11;\ C_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = -11$$

देखें आपने कितना सीखा 22.1

1. निम्नलिखित आव्यूहों के सारणिकों के मान ज्ञात कीजिए :

   (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. ज्ञात कीजिए कि दिये गये आव्यूह व्युत्क्रमणीय है अथवा अव्युत्क्रमणीय:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -9 & -6 \end{bmatrix}$ (b) $Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

3. निम्न आव्यूह के अवयवों के उप सारणिक ज्ञात कीजिए:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

4. (a) निम्न आव्यूह A की दूसरी पंक्ति के अवयवों के उपसारणिक ज्ञात कीजिए:

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

   (b) निम्न आव्यूह A की तीसरी पंक्ति के अवयवों के उप सारणिक ज्ञात कीजिए:

   $$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

5. निम्न आव्यूह के अवयवों के सहखण्ड ज्ञात कीजिए:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

6. (a) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ की दूसरी पंक्ति के अवयवों के सहखण्ड ज्ञात कीजिए:

   (b) निम्न आव्यूह की पहली पंक्ति के अवयवों के सहखण्ड ज्ञात कीजिए:

   $$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 6 & 4 & -2 \\ -5 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

7. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ तो सत्यापित कीजिए कि

(a) $|A| = |A'|$ तथा $|B| = |B'|$ (b) $|AB| = |A|\,|B| = |BA|$

22.3 वर्ग आव्यूह का सहखण्डज

माना $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ एक आव्यूह है। तब $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$

माना अवयव a_{ij} के M_{ij} तथा C_{ij} क्रमशः उपसारणिक और सहखण्ड हैं। तब

$$M_{11} = |7| = 7;\ C_{11} = (-1)^{1+1}\,|7| = 7$$

$$M_{12} = |5| = 5;\ C_{12} = (-1)^{1+2}\,|5| = -5$$

$$M_{21} = |1| = 1;\ C_{21} = (-1)^{2+1}\,|1| = -1$$

$$M_{22} = |2| = 2;\ C_{22} = (-1)^{2+2}\,|2| = 2$$

हम A के प्रत्येक अवयव के स्थान पर इसके सहखण्ड का विस्थापित करते हैं, तो

$$B = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \ldots(1)$$

(1) में प्राप्त सहखण्डों के आव्यूह B का परिवर्त है:

$$B' = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \qquad \ldots(2)$$

आव्यूह B' आव्यूह A का *सहखण्डज* कहलाता है तथा इसे Adj A द्वारा दर्शाते हैं।

इस प्रकार दिए गए आव्यूह A का सहखण्डज उस आव्यूह का परिवर्त होता है जिसके अवयव दिए गए आव्यूह के अवयवों के संगत सहखण्ड होते हैं।

आव्यूह A से Adj A ज्ञात करने के नियम

(a) आव्यूह के प्रत्येक अवयव को उसके सहखण्ड से विस्थापित कीजिए तथा सहखण्डों का आव्यूह प्राप्त कर लीजिए।

(b) (a) में प्राप्त आव्यूह का परिवर्त ज्ञात कर लीजिए।

उदाहरण 22.6. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ का सहखण्डज ज्ञात कीजिए।

हल : सारणिक $|A| = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$

माना कि A_{ij} अवयव a_{ij} का सहखण्ड है।

$$\therefore \quad A_{11} = (-1)^{1+1}\,(-3) = -3 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\,(5) = -5$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\,(2) = -2 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\,(-4) = -4$$

A के प्रत्येक अवयव को उसके सहखण्ड से विस्थापित करने पर, प्राप्त आव्यूह

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} \qquad \ldots(1)$$

$$\therefore \qquad \text{Adj } A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

उदाहरण 22.7. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ का सहखण्डज ज्ञात कीजिए।

हल :

सारणिक $\qquad \text{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

माना $|A|$ के अवयव A_{ij} का सहखण्ड a_{ij} है।

तब $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-4-2) = -6$; $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -(3-5) = 2$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = (-6-20) = -26$; $A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(1-4) = 3$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = (-1-10) = -11$; $A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -(2+5) = -7$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (-1-8) = -9$; $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -(1+6) = -7$

तथा $\qquad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = (4-3) = 1$

A के अवयवों के स्थान पर उनके सहखण्डों को लिखने पर प्राप्त सहखण्डों का आव्यूह

$$\begin{bmatrix} -6 & 2 & -26 \\ 3 & -11 & -7 \\ -9 & -7 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{अतः Adj } A = \begin{bmatrix} -6 & 3 & -9 \\ 2 & -11 & -7 \\ -26 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

टिप्पणी: यदि n कोटि का वर्ग आव्यूह A है, तो A(Adj A) = (Adj A) A = |A| I_n जबकि I_n n कोटि का एकांक आव्यूह है।

जाँच :

(1) माना $A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & 3\end{bmatrix}$

तब $|A|=\begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & 3\end{vmatrix}$ या $|A| = 2\times 3-(-1)\times(4) = 10$

यहाँ पर, $A_{11}=3; A_{12}=1; A_{21}= -4$ तथा $A_{22}=2$

$\therefore$ $\text{Adj}\, A = \begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

अब $A\,(\text{Adj}A)=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{bmatrix}=10\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=|A|\,I_2$

(2) पुनः माना $A=\begin{bmatrix}3 & 5 & 7\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$

तब $|A| = 3(-6-1) -5\,(4-1)+7\,(2+3) = -1$

यहाँ पर $A_{11} = -7; A_{12}= -3; A_{13}=5$

$A_{21}= -3; A_{22}= -1; A_{23}=2$

$A_{31}=26; A_{32}=11; A_{33}= -19$

$\therefore$ $\text{Adj}\, A = \begin{bmatrix}-7 & -3 & 26\\ -3 & -1 & 11\\ 5 & 2 & -19\end{bmatrix}$

अब $(A)\,(\text{Adj}\, A) = \begin{bmatrix}3 & 5 & 7\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7 & -3 & 26\\ -3 & -1 & 11\\ 5 & 2 & -19\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}=(-1)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=|A|I_3$$

तथा $(\text{Adj}\, A)\, A = \begin{bmatrix}-7 & -3 & 26\\ -3 & -1 & 11\\ 5 & 2 & -19\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 5 & 7\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}=(-1)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=|A|I_3$$

टिप्पणी: यदि आव्यूह एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है अर्थात् $|A|=0$, तब $A\,(\text{Adj}\,A) = O$

देखें आपने कितना सीखा 22.2

1. निम्न आव्यूहों के सहखण्डज ज्ञात कीजिए :

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

2. निम्न आव्यूहों के सहखण्डज ज्ञात कीजिए :

(a) $\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} i & -i \\ i & i \end{bmatrix}$

प्रत्येक दशा में स्थापित कीजिए कि $A(\text{Adj}\,A) = (\text{Adj}\,A)\,A = |A|I_2$.

3. सत्यापित कीजिए

$A(\text{Adj}\,A) = (\text{Adj}\,A)\,A = |A|\,I_3$, जबकि आव्यूह A है

(a) $\begin{bmatrix} 6 & 8 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & 11 & -1 \end{bmatrix}$

22.4 आव्यूह का प्रतिलोम

आव्यूह A पर विचार करें $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

यदि सम्भव हो तो हम एक आव्यूह $B = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$ ज्ञात करेंगे

ताकि $AB = BA = \mathrm{I}$

अर्थात् $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

या $\begin{bmatrix} ax+bu & ay+bv \\ cx+du & cy+dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

दोनों पक्षों की तुलना करने पर प्राप्त होगा।

$$ax + bu = 1, ay + bv = 0$$
$$cx + du = 0, cy + dv = 1$$

x, y, u, v, के लिए इन समीकरणों को हल करने पर प्राप्त होता है।

$$x = \frac{d}{ad - bc}\ ,\ y = \frac{-b}{ad - bc},\ u = \frac{-c}{ad - bc},\ v = \frac{a}{ad - bc}$$

परन्तु शर्त यह है कि $ad - bc \neq 0$, अर्थात् $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

$$\therefore \qquad B = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

इस प्रकार $\qquad B = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

टिप्पणी: हम जाँच करके देख सकते हैं कि $BA = I$ इस प्रकार हमें एक आव्यूह B प्राप्त हुआ

$$B = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} Adj\ A \qquad ...(1)$$

इस प्रकार प्राप्त आव्यूह B को A^{-1} द्वारा लिखते हैं तथा आव्यूह A का यह गुणात्मक प्रतिलोम (व्युत्क्रम) है।

इस प्रकार यदि एक दिए गए वर्ग आव्यूह A के लिए एक आव्यूह B का अस्तित्व सम्भव है ताकि AB = BA = I, तब B आव्यूह A का गुणात्मक प्रतिलोम कहलाता है।

टिप्पणी: ध्यान दीजिए कि यदि $ad - bc = 0$ अर्थात् $|A| = 0$ तो (1) के दायें पक्ष का अस्तित्व नहीं है तथा $B (= A^{-1})$ परिभाषित नहीं है। इसी कारण से हम A को व्युत्क्रमणीय आव्यूह चाहते हैं जिससे A का गुणात्मक प्रतिलोम अस्तित्व में हो जाए। अतः केवल व्युत्क्रमणीय आव्यूह का गुणात्मक प्रतिलोम होता है। B भी व्युत्क्रमणीय है तथा $A = B^{-1}$.

उदाहरण 22.8. आव्यूह A का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

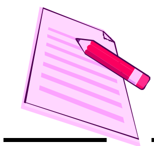
जबकि $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

हल : $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

$\therefore \qquad |A| = -12 - 10 = -22 \neq 0$

$\therefore \qquad A^{-1}$ संभव है।

अब $\qquad \text{Adj}\ A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$



$$\therefore \qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}\,A = \frac{1}{-22}\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{22} & \frac{5}{22} \\ \frac{1}{11} & \frac{-2}{11} \end{bmatrix}$$

टिप्पणी: जाँच करके देखिए कि $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

उदाहरण 22.9. आव्यूह A का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए

$$\text{जबकि } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 6 \\ 5 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

हल :
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 6 \\ 5 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore \qquad |A| &= 3(5-24) - 2(-5-30) - 2(4+5) \\ &= 3(-19) - 2(-35) - 2(9) \\ &= -57 + 70 - 18 \\ &= -5 \neq 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ A^{-1} सम्भव है।

माना A_{ij} आव्यूह A के a_{ij} अवयवों के सहखण्ड हैं।

तब
$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 5 - 24 = -19,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = -(-5-30) = 35$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 5 = 9,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -(-10+8) = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = -15 + 10 = -5,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -(12-10) = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -(18+2) = -20$$

और $$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3-2 = -5$$

$\therefore$ इस प्रकार सहखण्डों का आव्यूह $= \begin{bmatrix} -19 & 35 & 9 \\ 2 & -5 & -2 \\ 10 & -20 & -5 \end{bmatrix}$ $\therefore \text{Adj}A = \begin{bmatrix} -19 & 2 & 10 \\ 35 & -5 & -20 \\ 9 & -2 & -5 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}.Adj\ A = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} -19 & 2 & 10 \\ 35 & -5 & -20 \\ 9 & -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{5} & \frac{-2}{5} & -2 \\ -7 & 1 & 4 \\ \frac{-9}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

टिप्पणी: जाँच करके देखें कि $A^{-1}A = AA^{-1} = I_3$

उदाहरण 22.10. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ हो,

तो ज्ञात कीजिए : (i) $(AB)^{-1}$ (ii) $B^{-1}A^{-1}$ (iii) क्या $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$?

हल : (i) $$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+0 & 1+0 \\ -4+0 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

अब $$|AB| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -6+4 = -2 \neq 0.$$

$\therefore (AB)^{-1}$ सम्भव है।

आइये AB को C से निरूपित करते हैं

माना C_{ij} सरणिक C के अवयव c_{ij} के सहखण्ड हैं

तब $C_{11} = (-1)^{1+1}(3) = 3$ $\quad C_{21} = (-1)^{2+1}(1) = -1$

$C_{12} = (-1)^{1+2}(-4) = 4$ $\quad C_{22} = (-1)^{2+2}(-2) = -2$

$$\text{Adj}(C) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|}\text{Adj}(C) = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) अब $B^{-1}\ A^{-1}$ ज्ञात करने के लिए पहले B^{-1} ज्ञात करेंगे।

अब $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \therefore |B| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \neq 0$

$\therefore$ B^{-1} सम्भव है।

माना B_{ij} आव्यूह B के अवयव b_{ij} के सहखण्ड हैं

तब $B_{11} = (-1)^{1+1}(-1) = -1$ $\qquad B_{21} = (-1)^{2+1}(1) = -1$

$B_{12} = (-1)^{1+2}(0) = 0$ तथा $\qquad B_{22} = (-1)^{2+2}(-2) = -2$

$\therefore$ Adj $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $\qquad \therefore B^{-1} = \frac{1}{|B|}.AdjB = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

तथा $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = -1 \neq 0$

$\therefore$ A^{-1} सम्भव है।

माना A_{ij} आव्यूह A के अवयव a_{ij} के सहखण्ड है

तब $A_{11} = (-1)^{1+1}(-1) = -1$ $\qquad A_{21} = (-1)^{2+1}(0) = 0$

$A_{12} = (-1)^{1+2}(2) = -2$ तथा $\qquad A_{22} = (-1)^{2+2}(1) = 1$

$\therefore$ Adj $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}Adj\ A = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

अब $B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} - 1 & 0 + \frac{1}{2} \\ 0 - 2 & 0 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) हाँ,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $\qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

देखों आपने कितना सीखा 22.3

1. यदि सम्भव हो तो निम्नलिखित आव्यूहों का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए :

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. यदि सम्भव हो तो निम्न आव्यूहों के प्रतिलोम ज्ञात कीजिए :

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

(a) और (b) के लिए जाँच करके देखिए कि $A^{-1}A = AA^{-1} = I$

3. यदि $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ हो, तो सत्यापित कीजिए कि

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

4. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो $(A')^{-1}$ ज्ञात कीजिए।

5. यदि $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} b+c & c-a & b-a \\ c-b & c+a & a-b \\ b-c & a-c & a+b \end{bmatrix}$

हो, तो दर्शाइए कि ABA^{-1} एक विकर्ण आव्यूह है।

6. यदि $\phi(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो दर्शाइये $\left[\phi(x)\right]^{-1} = \phi(-x)$.

7. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & \tan x \\ -\tan x & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो दर्शाइये कि $A'A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$

8. यदि $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & \dfrac{1+bc}{a} \end{bmatrix}$ हो, तो दर्शाइये कि $aA^{-1} = (a^2 + bc + 1)\, I - aA$

9. यदि $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ हो, तो दर्शाइये कि $A^{-1} = A^2$

10. यदि $A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & -4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो दर्शाइये कि $A^{-1} = A'$

22.5 रैखिक समीकरण निकाय का हल

पिछली कक्षाओं में आपने दो या तीन अज्ञात चरों में रैखिक समीकरणों (युगपत समीकरण) को हल करना सीखा है। ऐसे समीकरण निकायों को हल करने के लिए आपने विलोपन विधि का प्रयोग किया था। जब चरों की संख्या अधिक होती है तो विलोपन करना कठिन हो जाता है।

आप एक वैकल्पिक विधि, क्रेमर नियम से ऐसे समीकरण निकायों को हल करना भी पहले ही सीख चुके हैं।

अब हम एक अन्य विधि, जो आव्यूह विधि कहलाती है, की चर्चा करेंगे जो बड़ी संख्या में अज्ञात चरों के समीकरण निकाय को हल करने में प्रयोग की जा सकती है। सुगमता के दृष्टि कोण से, हम दो या तीन चरों में समीकरण निकाय लेंगे।

22.5.1 आव्यूह विधि

इस विधि में, पहले हम समीकरण निकाय को आव्यूह रूप $AX = B$, में व्यक्त करते हैं जबकि A गुणांक आव्यूह कहलाता है।

उदाहरणार्थ, यदि दिया गया समीकरण निकाय है

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

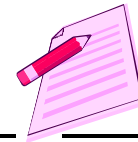
तो इसका आव्यूह रूप है :

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

यहाँ पर $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

यदि दिया गया समीकरण निकाय है $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$, $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$, $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ तो इस का आव्यूह रूप है:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$



जबकि $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

हल ज्ञात करने से पहले हम यह जाँच करेंगे कि गुणांक आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है या नहीं।

टिप्पणी: यदि A अव्युत्क्रमणीय है, तब $|A|=0$. और A^{-1} का अस्तित्व नहीं है। इसलिए यह विधि प्रयोग नहीं की जा सकती।

समीकरण $AX = B$ पर विचार कीजिए जबकि $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

जब $|A| \neq 0$, अर्थात् $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ हम समीकरण $AX = B$ को दोनों ओर A^{-1} से गुणा करते हैं।

$$\therefore \quad A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \quad (A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \quad IX = A^{-1}B \qquad (\because A^{-1}A = I)$$

$$\Rightarrow \quad X = A^{-1}B$$

$\because A^{-1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}\begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix}$, हम प्राप्त करते हैं:

$$X = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}\begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}\begin{bmatrix} b_2c_1 - b_1c_2 \\ -a_2c_1 + a_1c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ \dfrac{-a_2c_1 + a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{bmatrix}$$

अत: $x = \dfrac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$ तथा $y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

उदाहरण 22.11. आव्यूह विधि द्वारा रैखिक समीकरण निकाय

$$\left.\begin{aligned} 4x - 3y &= 11 \\ 3x + 7y &= -1 \end{aligned}\right\} \qquad \text{...(i)}$$

को हल कीजिए।

हल : इस निकाय को आव्यूह रूप में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{...(ii)}$$

यहाँ पर, $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$ तथा $B = \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \end{bmatrix}$

अतः (ii) बन जाता है

$AX = B$ ...(iii)

अब $|A| = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 28 + 9 = 37 \neq 0$

क्योंकि $|A| \neq 0$, A^{-1} सम्भव है।

कथन (iii) के दोनों पक्षों को बायीं ओर (A^{-1}) से गुणा करने पर हमें प्राप्त होता है:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

अर्थात् $IX = A^{-1}B$

$$X = A^{-1}B$$

अतः $X = \dfrac{1}{|A|}(Adj\ A)\ B$

या $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \dfrac{1}{37}\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ -1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{37}\begin{bmatrix} 77-3 \\ -33-4 \end{bmatrix}$

या $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \dfrac{1}{37}\begin{bmatrix} 74 \\ -37 \end{bmatrix}$ या $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\therefore$ x = 2, y = – 1 दिए गए समीकरण निकाय का शून्येतर, अद्वितीय हल है।

उदाहरण 22.12. आव्यूह विधि से निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 14 \\ x - 2y + z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

हल : दिए गए समीकरण निकाय को आव्यूह रूप में लिखते हुए,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \text{... (i)}$$

जो कि $AX = B$, के रूप में है, जबकि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $X = A^{-1}B$ ...(ii)

यहाँ पर $|A| = 1\,(2-3)\,-2\,(-1-2)\,+3\,(3+4)$

$= 26 \neq 0$

$\therefore$ A^{-1} का सम्भव है।

अब $\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -1 & 11 & 8 \\ 3 & -7 & 2 \\ 7 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

$\therefore$ (ii) से हमें प्राप्त हुआ $X = A^{-1}B = \dfrac{1}{|A|} Adj\, A.B$

$$X = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} -1 & 11 & 8 \\ 3 & -7 & 2 \\ 7 & 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{26}\begin{bmatrix} 26 \\ 52 \\ 78 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{या} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

इस प्रकार $x = 1$, $y = 2$ तथा $z = 3$ दिए गए समीकरण निकाय का हल है।

22.6 समीकरण निकाय की संगतता का निकष (कसौटी)

माना $AX = B$ दो या तीन रैखिक समीकरणों का एक निकाय है तब हमारे पास निम्न निकष (कसौटी) है :

(1) यदि $|A| \neq 0$, तो समीकरण निकाय संगत है तथा इसका एक अद्वितीय हल है जो हमें $X = A^{-1}B$ से प्राप्त होता है।

(2) यदि $|A| = 0$, तो निकाय संगत या असंगत हो सकता है। यदि निकाय संगत होगा तो इसका एक अद्वितीय हल नहीं होगा। इसके अतिरिक्त यदि

(a) $(\text{Adj } A)\, B \neq O$, तब निकाय असंगत होगा

(b) $(\text{Adj } A)\, B = O$, तो निकाय संगत होगा और इसके अनन्त हल होंगे।

टिप्पणी: यह निकष 'n' में 'n' समीकरण निकाय के लिए भी सत्य है।

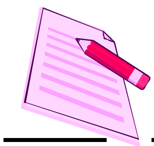
अब हम उदाहरणों के द्वारा इसे सत्यापित करते हैं।

(a) $5x + 7y = 1$

$2x - 3y = 3$

यह निकाय संगत है तथा इसका एक अद्वितीय हल है क्योंकि $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$

यहाँ पर आव्यूह समीकरण है $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$



अर्थात् $AX = B$ ... (i)

जबकि $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

यहाँ पर, $|A| = 5 \times (-3) - 2 \times 7 = -15 - 14 = -29 \neq 0$

तथा $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} Adj\, A = \dfrac{1}{-29}\begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ $\cdots(ii)$

(i) से $X = A^{-1}B$

अर्थात् $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \dfrac{1}{-29}\begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{24}{29} \\ -\dfrac{13}{29} \end{bmatrix}$ [(i) तथा (ii) से]

अतः $x = \dfrac{24}{29}$, तथा $y = \dfrac{-13}{29}$ दिए गए समीकरण निकाय का हल है।

$$3x + 2y = 7$$
$$6x + 4y = 8$$

आव्यूह रूप में, निकाय को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

या $AX = B$

जबकि $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$

यहाँ पर, $|A| = 3 \times 4 - 6 \times 2 = 12 - 12 = 0$

$$\text{Adj}\, A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

तथा $(\text{Adj}\, A)\, B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -18 \end{bmatrix} \neq O$

अतः दिया गया समीकरण निकाय असंगत है।

(c) $\left.\begin{aligned} 3x - y &= 7 \\ 9x - 3y &= 21 \end{aligned}\right\}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 21 \end{bmatrix}$$

या $AX = B$,

जबकि $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 9 & -3\end{bmatrix}$; $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}7\\ 21\end{bmatrix}$

यहाँ पर, $|A|=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 9 & -3\end{vmatrix}=3\times(-3)-9\times(-1)=-9+9=0$

$$\text{Adj A}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -9 & 3\end{bmatrix} \quad \text{तथा} \quad (\text{Adj A})\text{B}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -9 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\ 21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}=\text{O}$$

अतः दिए गए समीकरण निकाय के अनन्त हल हैं।

आइए अब हम एक अन्य रैखिक समीकरण लें जहाँ कि

$|A|=0$ तथा $(\text{Adj A})\,\text{B}\neq \text{O}$.

निम्न समीकरण निकाय को लीजिए

$$x+2y+z=5$$
$$2x+y+2z=-1$$
$$x-3y+z=6$$

आव्यूह रूप में, यह समीकरण निकाय इस प्रकार है

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ -1\\ 6\end{bmatrix}$$

अर्थात् $AX=B$

जहाँ कि $\text{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & -3 & 1\end{bmatrix}$, $\text{X}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$ तथा $\text{B}=\begin{bmatrix}5\\ -1\\ 6\end{bmatrix}$

अब $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix}=0 \qquad (\because C_1=C_3)$

तथा $(\text{Adj A})\,\text{B}=\begin{bmatrix}7 & -5 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ -7 & 5 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ -1\\ 6\end{bmatrix}$ [Adj A की स्वयं जाँच कीजिए]

$$=\begin{bmatrix}58\\ 0\\ -58\end{bmatrix}\neq \text{O}$$

$\therefore$ $|A| = 0$ तथा $(\text{Adj } A)\, B \neq O$,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}(Adj \quad A)B = \frac{1}{0}\begin{bmatrix} 58 \\ 0 \\ -58 \end{bmatrix}$$ जो कि परिभाषित नहीं है।

अतः समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है।

इस प्रकार हम पाते हैं कि यदि $|A| = 0$ तथा $(\text{Adj } A)\, B \neq O$ तो समीकरण निकाय का कोई हल नहीं होगा।

हम इन परिणामों को सारांश रूप में दे रहे हैं:

(i) यदि $|A| \neq 0$ तथा $(\text{Adj } A)\, B \neq O$ तो समीकरण निकाय का शून्येतर अद्वितीय हल होगा।

(ii) यदि $|A| \neq 0$ तथा $(\text{Adj } A)\, B = O$, तो समीकरण निकाय का निर्रथक हल होगा।

(iii) यदि $|A| = 0$ तथा $(\text{Adj } A)\, B = O$, तो समीकरण निकाय के अनन्त हल होंगे।

(iv) यदि $|A| = 0$ तथा $(\text{Adj } A)\, B \neq O$, तो समीकरण निकाय का कोई हल नहीं होगा। (असंगत निकाय)

देखें आपने कितना सीखा 22.4

1. आव्यूह प्रतिलोमन विधि द्वारा निम्न में प्रत्येक समीकरण निकाय को हल कीजिए :

(a) $2x + 3y = 4$, $x - 2y = 5$ (b) $x + y = 7$, $3x - 7y = 11$

2. आव्यूह प्रतिलोमन विधि द्वारा निम्न में प्रत्येक समीकरण निकाय को हल कीजिए :

(a) $x + 2y + z = 3$, $2x - y + 3z = 5$, $x + y - z = 7$

(b) $2x + 3y + z = 13$, $3x + 2y - z = 12$, $x + y + 2z = 5$

(c) $-x + 2y + 5z = 2$, $2x - 3y + z = 15$, $-x + y + z = -3$

(d) $2x + y - z = 2$, $x + 2y - 3z = -1$, $5x - y - 2z = -1$

3. ज्ञात कीजिए कि निम्न समीकरण निकाय संगत हैं या नहीं। यदि संगत हैं तो हल ज्ञात कीजिए :

(a) $2x - 3y = 5$, $x + y = 7$ (b) $2x - 3y = 5$, $4x - 6y = 10$

(c) $3x + y + 2z = 3$, $-2y - z = 7$, $x + 15y + 3z = 11$

आइये दोहराएँ

- एक वर्ग आव्यूह व्युत्क्रमणीय होता है यदि इसका संगत सारणिक शून्येतर हो।
- आव्यूह A के iवीं पंक्ति तथा jवें स्तम्भ को हटाने से प्राप्त सारणिक अवयव a_{ij} का उपसारणिक कहलाता है। इसे प्रायः M_{ij} द्वारा दर्शाते हैं।
- a_{ij} का सहखण्ड परिभाषित है : $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
- आव्यूह A का सहखण्डज उस आव्यूह का परिवर्त होता है जिसके अवयव दिए गए आव्यूह के अवयवों के सहखण्ड हों। इसे प्रायः Adj A द्वारा व्यक्त करते हैं।
- यदि A कोई n कोटि का वर्ग आव्यूह है, तो

  $A\,(\text{Adj } A) = (\text{Adj } A)\,A = |A|\ I_n$ जबकि I_n कोटि n का एकांक आव्यूह है।
- किसी व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह A, के लिए यदि एक ऐसा व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह B है ि ज स स `
  AB = BA = I, तो B आव्यूह A का गुणात्मक प्रतिलोम कहलाता है। इसे $B = A^{-1}$ द्वारा दर्शाते हैं।
- केवल व्युत्क्रमणीय आव्यूहों के ही गुणात्मक प्रतिलोम होते हैं।
- $a_1x + b_1y = c_1$ तथा $a_2x + b_2y = c_2$ समीकरणों को हम निम्न आव्यूह रूप में लिख सकते हैं :

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

इस प्रकार यदि $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ हो तो

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}\begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

- समीकरण निकाय, जो $AX = B$ द्वारा व्यक्त होता है, संगत होता है तथा इसका एक अद्वितीय हल होता है यदि $|A| \neq 0$.
- समीकरण $AX = B$ द्वारा व्यक्त किया गया निकाय असंगत होता है यदि $|A| = 0$ तथा $(\text{Adj } A)\,B \neq O$.
- समीकरण $AX = B$ द्वारा व्यक्त किया गया निकाय संगत होता है तथा इसके अनन्त हल होते हैं यदि $|A| = 0$ तथा $(\text{Adj } A)\,B = O$.
- समीकरण $AX = B$ द्वारा व्यक्ति किया गया निकाय समघाती होता है यदि B शून्य आव्यूह हो।
- एक समघाती रैखिक समीकरण निकाय $AX = 0$ का केवल एक निर्रथक हल होता है यदि $|A| \neq 0$ यह हल है : $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.
- समघाती रैखिक समीकरण निकाय $AX = O$ के अनन्त हल होते हैं यदि $|A| = 0$

सहायक वेबसाइट

- *http://www.mathsisfun.com/algebra/matrix-inverse.html*
- *http://www.sosmath.com/matrix/coding/coding.html*

आइए अभ्यास करें

1. $|A|$ ज्ञात कीजिए यदि :

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. A का सहखण्डज ज्ञात कीजिए यदि

(a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(a) तथा (b) के लिए सत्यापित भी कीजिए कि $A(\text{Adj } A) = |A|I_3 = (\text{Adj } A)\,A$.

3. यदि सम्भव है तो A^{-1}, ज्ञात कीजिए जब कि आव्यूह A =

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

(a), (b) तथा (c) के लिए सत्यापित भी कीजिए $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

4. आव्यूह A का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए यदि

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

5. आव्यूह प्रतिलोमन विधि द्वारा, निम्न रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए :

(a) $\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 2x + 5y &= 9 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 6x + 4y &= 2 \\ 9x + 6y &= 3 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ x - 2y - z &= \frac{3}{2} \\ 3y - 5z &= 9 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} x - y + z &= 4 \\ 2x + y - 3z &= 0 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned}$

(e) $\begin{aligned} x + y - 2z &= -1 \\ 3x - 2y + z &= 3 \\ 2x + y - z &= 0 \end{aligned}$

6. आव्यूह प्रतिलोमन विधि द्वारा हल कीजिए :

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{10}{z}=4;\quad \frac{4}{x}-\frac{6}{y}+\frac{5}{z}=1;\quad \frac{8}{x}+\frac{9}{y}-\frac{20}{z}=3$$

7. λ का मान ज्ञात कीजिए जिससे निम्न समीकरण निकाय संगत हो जाए :

$$2x-3y+4=0$$
$$5x-2y-1=0$$
$$21x-8y+\lambda=0$$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 22.1

1. (a) –12 (b) 10 2. (a) अव्युत्क्रमणीय (b) व्युत्क्रमणीय

3. (a) $M_{11}=4; M_{12}=7; M_{21}=-1; M_{22}=3$ (b) $M_{11}=5; M_{12}=2; M_{21}=6; M_{22}=0$

4. (a) $M_{21}=11; M_{22}=7; M_{23}=1$ (b) $M_{31}=-13; M_{32}=-13; M_{33}=13$

5. (a) $C_{11}=7; C_{12}=-9; C_{21}=2; C_{22}=3$ (b) $C_{11}=6; C_{12}=5; C_{21}=-4; C_{22}=0$

6. (a) $C_{21}=1; C_{22}=-8; C_{23}=-2$ (b) $C_{11}=-6; C_{12}=10; C_{33}=2$

देखें आपने कितना सीखा 22.2

1. (a) $\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

2. (a) $\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} i & i \\ -i & i \end{bmatrix}$

देखें आपने कितना सीखा 22.3

1. (a) $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -\frac{4}{10} & -\frac{2}{10} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

2. (a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ \frac{17}{24} & -\frac{1}{3} & -\frac{11}{24} \end{bmatrix}$

4. $(A')^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & -8 & -2 \\ 8 & 7 & 2 \\ -5 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

देखें आपने कितना सीखा 22.4

1. (a) $x = \frac{23}{7},\ y = \frac{-6}{7}$

   (b) $x = 6,\ y = 1$

2. (a) $x = \frac{58}{11},\ y = -\frac{2}{11},\ z = -\frac{21}{11}$

   (b) $x = 2,\ y = 3,\ z = 0$

   (c) $x = 2,\ y = -3,\ z = 2$

   (d) $x = 1,\ y = 2,\ z = 2$

3. (a) संगत; $x = \frac{26}{5},\ y = \frac{9}{5}$

   (b) संगत, अनन्त हल

   (c) असंगत

आइए अभ्यास करें

1. (a) -31 (b) -24

2. (a) $\begin{bmatrix} 4 & -3 & -13 \\ -4 & 5 & 3 \\ 4 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 \\ -13 & 13 & 13 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

3. (a) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{18} & \frac{1}{6} \\ \frac{7}{36} & -\frac{1}{12} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{5}{14} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{3}{14} \end{bmatrix}$

4. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 3 & \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

5. (a) $x = 2,\ y = 1$ (b) $x = k,\ y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}k$

   (c) $x = 1,\ y = \frac{1}{2},\ z = -\frac{3}{2}$ (d) $x = 2,\ y = -1,\ z = 1$

   (e) $x = \frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{2},\ z = \frac{1}{2}$

6. $x = 2,\ y = 3,\ z = 5$

7. $\lambda = -5$