24

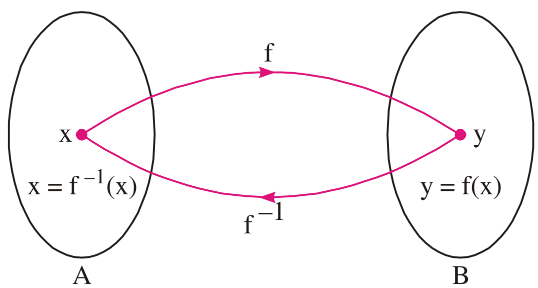
प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन

पिछले पाठ में आपने फलन की परिभाषा तथा विभिन्न प्रकार के फलनों के बारे में पढ़ा। हम प्रतिलोम फलन के बारे में वर्णन कर चुके हैं।

आइए, संक्षेप में स्मरण करें :

माना f, A से B तक का एकैकी आच्छादक फलन है।

माना y, B का कोई एक अवयव है। तब f आच्छादक फलन होगा यदि A का कोई एक अवयव $x \in A$ हो जहां $f(x) = y$ हो । क्योंकि f एकैकी फलन दर्शाता है इसलिए x अद्वितीय होना चाहिए। इस प्रकार प्रत्येक $y \in B$ के लिए एक अद्वितीय अवयव $x \in A$ होगा जहां $f(x) = y$ है। अत: हम एक फलन को f^{-1} से प्रदर्शित करके इस रूप में भी परिभाषित कर सकते हैं जैसे $f^{-1} : B \to A$



चित्र 24.1

$$\therefore \qquad f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

ऊपर दिया गया फलन f^{-1} फलन 'f' का प्रतिलोम कहलाता है। एक फलन व्युत्क्रमणीय (invertible) तभी होता है यदि और केवल यदि 'f' एकैकी आच्छादक हो। इस स्थिति में f^{-1} का प्रान्त, f का परिसर है और f^{-1} का परिसर, f का प्रान्त है।

आइए एक दूसरा उदाहरण लें।

हम फलन को परिभाषित करते हैं, f : कार $\to$ रजिस्ट्रेशन नम्बर

यदि हम लिखते हैं, g : रजिस्ट्रेशन नम्बर $\to$ कार

हम देखते हैं कि f का प्रान्त (Domain), g का परिसर है और f का परिसर, g का प्रान्त है।

अत: हम कहते हैं कि g, f का प्रतिलोम फलन है अर्थात $g = f^{-1}$। इस अध्याय में हम कुछ और प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों, उनके प्रान्तों और परिसर के बारे में सीखेंगे और ऐसे व्यंजकों को हल करना सीखेंगे जिसमें प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन सम्मिलित हो।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों को परिभाषित करना
- प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अस्तित्व की स्थिति ज्ञात करना
- प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के मुख्य मानों (Principal values) को परिभाषित करना
- प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के प्रान्त तथा परिसर ज्ञात करना
- प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के गुणधर्मों का वर्णन करना
- ऐसे प्रश्नों को हल करना जिनमें प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन सम्मिलित हों

पूर्व ज्ञान

- फलन, फलनों के प्रकार, प्रान्त तथा परिसर की जानकारी
- त्रिकोणमितीय फलनों के योग, अन्तर, गुणज और अपवर्तक के सूत्र

24.1 क्या प्रत्येक फलन का प्रतिलोम सम्भव है?

एक फलन के दो क्रमित युग्मों (x_1, y) तथा (x_2, y) लीजिए। यदि हम इन्हें उल्टें तो हमें (y, x_1) तथा (y, x_2) प्राप्त होगा। यह फलन नहीं है क्योंकि दोनों क्रमित युग्मों का प्रथम अवयव एक ही है।

आइए अब दूसरा फलन लें

$$\left(\sin\frac{\pi}{2}, 1\right), \left(\sin\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ और } \left(\sin\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

इस का प्रतिलोम लिखने पर हमें

$$\left(1, \sin\frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\frac{\pi}{4}\right) \text{ और } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

प्राप्त होता है जो फलन है।

आइए दैनिक जीवन से सम्बन्धित कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

$$f : \text{विद्यार्थी} \to \text{गणित में प्राप्त अंक}$$

क्या आप सोचते है कि f^{-1} का अस्तित्व है?

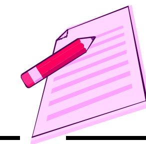
यह फलन: हो भी सकता है और नहीं भी, क्योंकि जिस स्थिति में दो विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक समान हो जाऐंगे, f^{-1} फलन नहीं रहेगा। क्योंकि दो या दो से अधिक क्रमित युग्मों के प्रथम अवयव एक ही होंगे। अत: हम इस निष्कर्ष पर पहुंचते हैं कि प्रत्येक फलन व्युत्क्रमणीय नहीं है।

उदाहरण 24.1. यदि $f : R \to R$, $f(x) = x^3 + 4$ द्वारा परिभाषित है तो f^{-1} क्या होगा ?

हल : इस स्थिति में 'f' एकैकी तथा आच्छादक दोनों है।

$\Rightarrow f$ व्युत्क्रमणीय है।

मान लीजिए कि $\qquad y = x^3 + 4$



$\therefore \qquad y-4=x^3 \Rightarrow x=\sqrt[3]{y-4}$

क्योंकि 'f' का प्रतिलोम f^{-1} है, अतः $f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y-4}$

जो फलन एकैकी तथा अच्छादक होते हैं वे व्युत्क्रमणीय होंगे ।

आइए इसे त्रिकोणमिति तक बढ़ाएँ :

$y=\sin x$ लीजिए । यहां प्रांत (Domain) वास्तविक संख्या अथवा कोणों का समुच्चय है। परिसर सभी वास्तविक संख्याओं, जो -1 तथा 1 के बीच में है जिनमें -1 और 1 भी सम्मिलित हैं अर्थात $-1 \le y \le 1$ का समुच्चय है। हम जानते हैं कि प्रत्येक दिए हुए कोण अथवा संख्या x के लिए y का एक अद्वितीय मान होता है।

प्रतिलोम प्रक्रिया में, हम साइन के विशिष्ट मान को संगत कोण अथवा संख्या जानना चाहते हैं।

मान लीजिए कि $\qquad y=\sin x=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \qquad \sin x=\sin\frac{\pi}{6}=\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\frac{13\pi}{6}=....$$

x के मान $\quad \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}=....$ हो सकते हैं।

अतः x के अनन्त मान हैं।

$y=\sin x$ को $\quad \left(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right), \left(\frac{5\pi}{6},\frac{1}{2}\right),...$ से भी प्रदर्शित किया जा सकता है।

प्रतिलोम सम्बन्ध होगा : $\left(\frac{1}{2},\frac{\pi}{6}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{5\pi}{6}\right),...$

यह स्पष्ट है कि यह फलन नहीं है क्योंकि सभी क्रमित युग्मों के प्रथम अवयव $\frac{1}{2}$ हैं जो फलन की परिभाषा के प्रतिकूल है।

आइए, अब $y=\sin x$ पर विचार करें जहां $x \in R$ प्रान्त तथा $y \in [-1, 1]$ अथवा $-1 \le y \le 1$ जिसे परिसर कहते हैं यह बहु-एक आच्छादक फलन है। अतः यह व्युत्क्रमणीय नहीं है।

क्या $y=\sin x$ को व्युत्क्रमणीय बनाया जा सकता है और कैसे?

हां, यदि हम इसके प्रान्त को इस प्रकार सीमित रखें कि यह एकैकी आच्छादक बन जाए, इस के लिए x के मान निम्नलिखित रूप में लेने होंगे :

(i) $\quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \qquad y \in [-1, 1] \qquad$ अथवा

(ii) $\quad \frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{2} \qquad y \in [-1, 1] \qquad$ अथवा

(iii) $\quad -\frac{5\pi}{2} \le x \le -\frac{3\pi}{2} \qquad y \in [-1, 1] \qquad$ आदि

अब प्रतिलोम फलन $y=\sin^{-1}x$ पर विचार कीजिए।

हम फलन का प्रान्त और परिसर जानते हैं। प्रतिलोम फलन के लिए उनके प्रांत तथा परिसर को परस्पर बदल देते हैं। इसलिए

टिप्पणी

(i) $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ $x \in [-1, 1]$ अथवा

(ii) $\frac{3\pi}{2} \le y \le \frac{5\pi}{2}$ $x \in [-1, 1]$ अथवा

(iii) $-\frac{5\pi}{2} \le y \le -\frac{3\pi}{2}$ $x \in [-1, 1]$ आदि

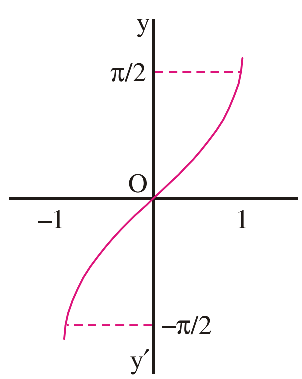
यहां हम कोणों के सभी मानों में न्यूनतम संख्यात्मक मान लेंगे जिसके साइन का मान x है जिसे $\sin^{-1} x$ का मुख्य मान (Principal value) कहा जाता है।

इसके लिए केवल $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ स्थिति है। अत: $y = \sin^{-1} x$ के मुख्य मान के लिए प्रान्त $[-1, 1]$ है अर्थात $x \in [-1, 1]$ है तथा परिसर $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ है।

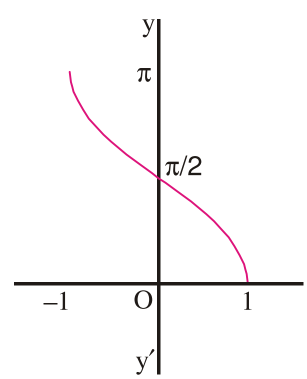
इसी प्रकार, हम अन्य प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों की चर्चा कर सकते हैं।

	फलन	प्रान्त	परिसर (मुख्यमान)
1.	$y = \sin^{-1} x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
2.	$y = \cos^{-1} x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
3.	$y = \tan^{-1} x$	R	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
4.	$y = \cot^{-1} x$	R	$[0, \pi]$
5.	$y = \sec^{-1} x$	$x \ge 1$ या $x \le -1$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
6.	$y = \operatorname{cosec}^{-1} x$	$x \ge 1$ या $x \le -1$	$\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

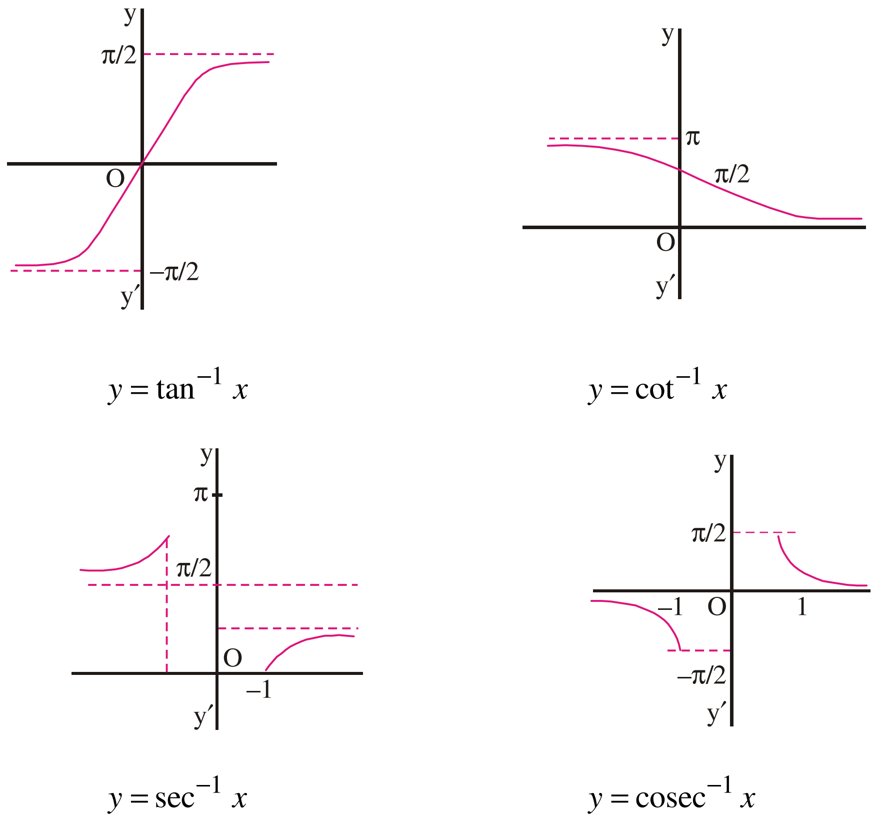
24.2 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के ग्राफ (आलेख)



$y = \sin^{-1} x$



$y = \cos^{-1} x$



चित्र 24.2

उदाहरण 24.2. निम्नलिखित के मुख्य मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ii) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (iii) $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

हल : (i) मान लीजिए कि $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \theta$

अथवा $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ अथवा $\theta = \frac{\pi}{4}$

(ii) मान लीजिए कि $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \theta$

$\Rightarrow$ $\cos\theta = -\frac{1}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ अथवा $\theta = \frac{2\pi}{3}$

(iii) मान लीजिए कि $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \theta$ अथवा $-\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\theta$ अथवा $\tan\theta = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow$ $\theta = -\frac{\pi}{6}$

उदाहरण 24.3. निम्नलिखित के मुख्य मान ज्ञात कीजिए :

(a) (i) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ii) $\tan^{-1}(-1)$

(b) मुख्य मान का उपयोग करते हुए $\sec\left[\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : (a) मान लीजिए कि (i) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\theta$, तब

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\theta \quad \text{अथवा} \quad \cos\theta=\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \theta=\frac{\pi}{4}$$

(ii) मान लीजिए कि $\tan^{-1}(-1)=\theta$, तब

$$-1=\tan\theta \quad \text{अथवा} \quad \tan\theta=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \theta=-\frac{\pi}{4}$$

(b) मान लीजिए कि $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\theta$, तब

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\theta \quad \text{अथवा} \quad \cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \theta=\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \quad \sec\left(\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sec\theta=\sec\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

उदाहरण 24.4. सरल कीजिए :

(i) $\cos\left(\sin^{-1}x\right)$ (ii) $\cot\left(\operatorname{cosec}^{-1}x\right)$

हल : (i) मान लीजिए कि $\sin^{-1}x=\theta$

$$\Rightarrow \quad x=\sin\theta$$

$$\therefore \quad \cos\left[\sin^{-1}x\right]=\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-x^2}$$

(ii) मान लीजिए कि $\operatorname{cosec}^{-1}x=\theta$

$$\Rightarrow \quad x=\operatorname{cosec}\theta$$

$$\therefore \quad \cot\theta=\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}=\sqrt{x^2-1}$$

देखें आपने कितना सीखा 24.1

1. निम्नलिखित में प्रत्येक का मुख्य मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (b) $\operatorname{cosec}^{-1}\left(-\sqrt{2}\right)$ (c) $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(d) $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$ (e) $\cot^{-1}(1)$

2. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\cos\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)$ (b) $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\operatorname{cosec}\frac{\pi}{4}\right)$ (c) $\cos\left(\operatorname{cosec}^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

(d) $\tan\left(\sec^{-1}\sqrt{2}\right)$ (e) $\operatorname{cosec}\left[\cot^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)\right]$

3. निम्नलिखित व्यंजकों में से प्रत्येक को सरल कीजिए :

(a) $\sec\left(\tan^{-1}x\right)$ (b) $\tan\left(\operatorname{cosec}^{-1}\frac{x}{2}\right)$ (c) $\cot\left(\operatorname{cosec}^{-1}x^2\right)$

(d) $\cos\left(\cot^{-1}x^2\right)$ (e) $\tan\left(\sin^{-1}\left(\sqrt{1-x}\right)\right)$

24.3 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के गुण-धर्म

गुणधर्म 1: $\sin^{-1}(\sin\theta)=\theta,\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

हल : मान लीजिए कि $\sin\theta = x$

$\Rightarrow \qquad \theta=\sin^{-1}x=\sin^{-1}(\sin\theta)=\theta$

साथ ही $\sin\left(\sin^{-1}x\right)=x$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि

(i) $\cos^{-1}(\cos\theta)=\theta,\ 0\le\theta\le\pi$

(ii) $\tan^{-1}(\tan\theta)=\theta,\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

(ii) मान लीजिए कि $\cot^{-1}x=\theta$

$\Rightarrow \qquad x=\cot\theta$

$\Rightarrow \qquad \frac{1}{x}=\tan\theta$

$\Rightarrow \qquad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

$\therefore \qquad \cot^{-1}x=\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

गुणधर्म 2: (i) $\operatorname{cosec}^{-1}x=\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ (ii) $\cot^{-1}x=\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

(iii) $\sec^{-1}x=\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

हल: (i) मान लीजिए कि $\operatorname{cosec}^{-1}x=\theta$

$\Rightarrow \qquad x=\operatorname{cosec}\theta$

$\Rightarrow \qquad \dfrac{1}{x} = \sin\theta$

$\therefore \qquad \theta = \sin^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow \qquad \operatorname{cosec}^{-1} x = \sin^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(iii) मान लीजिए कि $\sec^{-1} x = \theta$

$\Rightarrow \qquad x = \sec\theta$

$\therefore \qquad \dfrac{1}{x} = \cos\theta$ अथवा $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$\therefore \qquad \sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

गुणधर्म 3: (i) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$ (ii) $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$

(iii) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$

हल : (i) मान लीजिए कि $\sin^{-1}(-x) = \theta$

$\Rightarrow \qquad -x = \sin\theta$ अथवा $x = -\sin\theta = \sin(-\theta)$

$\therefore \qquad -\theta = \sin^{-1} x$ अथवा $\theta = -\sin^{-1} x$

अथवा $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$

(ii) मान लीजिए कि $\tan^{-1}(-x) = \theta$

$\Rightarrow \qquad -x = \tan\theta$ अथवा $x = -\tan\theta = \tan(-\theta)$

$\therefore \qquad \theta = -\tan^{-1} x$ अथवा $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$

(iii) मान लीजिए कि $\cos^{-1}(-x) = \theta$

$\Rightarrow \qquad -x = \cos\theta$ अथवा $x = -\cos\theta = \cos(\pi - \theta)$

$\therefore \qquad \cos^{-1} x = \pi - \theta$

$\therefore \qquad \cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$

गुणधर्म 4: (i) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$ (ii) $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$

(iii) $\operatorname{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$

हल: (i) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$

मान लीजिए कि $\sin^{-1} x = \theta \Rightarrow x = \sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

अथवा $\cos^{-1} x = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$\Rightarrow \quad \theta + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ अथवा $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

(ii) मान लीजिए कि $\cot^{-1} x = \theta \Rightarrow x = \cot\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$\therefore \quad \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \theta$ अथवा $\theta + \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

अथवा $\cot^{-1} x + \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

(iii) मान लीजिए कि $\operatorname{cosec}^{-1} x = \theta$

$\Rightarrow \quad x = \operatorname{cosec}\theta = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$\therefore \quad \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \theta$ अथवा $\theta + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \quad \operatorname{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

गुणधर्म 5: (i) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

(ii) $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$

हल : (i) मान लीजिए कि $\tan^{-1} x = \theta$, $\tan^{-1} y = \phi \Rightarrow x = \tan\theta, y = \tan\phi$

हमें सिद्ध करना है कि $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

उपर्युक्त मानों को बायें पक्ष तथा दायें पक्ष में रखने पर

वाम पक्ष $= \theta + \phi$ और दायें पक्ष $= \tan^{-1}\left[\frac{\tan\theta + \tan\phi}{1 - \tan\theta\tan\phi}\right]$

$= \tan^{-1}\left[\tan(\theta + \phi)\right] = \theta + \phi =$ बायें पक्ष

अतः उपर्युक्त परिणाम सत्य है।

इसी प्रकार (ii) को भी सिद्ध कर सकते हैं।

गुणधर्म 6: $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\left[\dfrac{2x}{1+x^2}\right] = \cos^{-1}\left[\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right] = \tan^{-1}\left[\dfrac{2x}{1-x^2}\right]$

(a) (b) (c) (d)

हल : मान लीजिए कि $x = \tan\theta$

(a), (b), (c) तथा (d) में प्रतिस्थापित करने पर

$$2\tan^{-1}x = 2\tan^{-1}(\tan\theta) = 2\theta \qquad \text{......(i)}$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{\sec^2\theta}\right)$$

$$= \sin^{-1}(2\sin\theta\cos\theta) = \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta \qquad \text{.....(ii)}$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\right)$$

$$= \cos^{-1}(\cos^2\theta-\sin^2\theta) = \cos^{-1}(\cos 2\theta) = 2\theta \qquad \text{......(iii)}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right) = \tan^{-1}(\tan 2\theta) = 2\theta \qquad \text{.....(iv)}$$

(i),(ii),(iii) तथा (iv) से हमें प्राप्त हुआ

$$2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

गुणधर्म 7:

(i) $\sin^{-1}x = \cos^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \tan^{-1}\left[\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \sec^{-1}\left[\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \cot^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right]$

$$= \operatorname{cosec}^{-1}\left[\frac{1}{x}\right]$$

(ii) $\cos^{-1}x = \sin^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \tan^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right] = \operatorname{cosec}^{-1}\left[\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \cot^{-1}\left[\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

$$= \sec^{-1}\left[\frac{1}{x}\right]$$

उपपत्ति: मान लीजिए कि $\sin^{-1}x = \theta \Rightarrow \sin\theta = x$

(i) $\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$, $\tan\theta = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\sec\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$$\cot\theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \text{ और } \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{x}$$

$$\therefore \qquad \sin^{-1}x = \theta = \cos^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \sec^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

$$= \operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

(ii) मान लीजिए कि $\cos^{-1}x = \theta \Rightarrow \quad x = \cos\theta$

$$\therefore \qquad \sin\theta = \sqrt{1-x^2}, \quad \tan\theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$\sec\theta = \frac{1}{x}, \quad \cot\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ और } \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\cos^{-1}x = \sin^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

$$= \operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \sec^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

उदाहरण 24.5. सिद्ध कीजिए $\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{13}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$

हल : सूत्र $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ का उपयोग करते हुए हमें प्राप्त होता है

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{13}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{13}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{1}{13}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{20}{90}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$$

उदाहरण 24.6. सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

हल : मान लीजिए कि $\sqrt{x} = \tan\theta$ तब

बायाँ पक्ष = θ और दायाँ पक्ष = $\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right) = \frac{1}{2}\cos^{-1}(\cos 2\theta) = \frac{1}{2}\times 2\theta = \theta$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

उदाहरण 24.7. समीकरण हल कीजिए :

$$\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1}{2}\tan^{-1}x,\ x>0$$

हल : मान लीजिए कि $x=\tan\theta$ तब

$$\tan^{-1}\left(\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)=\frac{1}{2}\tan^{-1}(\tan\theta)$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right]=\frac{1}{2}\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{4}-\theta=\frac{1}{2}\theta$$

$$\Rightarrow \quad \theta=\frac{\pi}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \quad x=\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

उदाहरण 24.8. सिद्ध कीजिए कि

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos^{-1}(x^2)$$

हल : मान लीजिए कि $x^2=\cos 2\theta$, तब

$$2\theta=\cos^{-1}(x^2)$$

$$\Rightarrow \quad \theta=\frac{1}{2}\cos^{-1}x^2$$

$x^2=\cos 2\theta$ को दिये गए समीकरण के बायें-पक्ष में प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\cos 2\theta}+\sqrt{1-\cos 2\theta}}{\sqrt{1+\cos 2\theta}-\sqrt{1-\cos 2\theta}}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}+\theta$$

$$= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos^{-1}(x^2)$$

देखें आपने कितना सीखा 24.2

1. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\sin\left[\frac{\pi}{3}-\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ (b) $\cot(\tan^{-1}\alpha+\cot^{-1}\alpha)$

(c) $\tan\frac{1}{2}\left(\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}+\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)$

(d) $\tan\left(2\tan^{-1}\frac{1}{5}\right)$ (e) $\tan\left(2\tan^{-1}\frac{1}{5}-\frac{\pi}{4}\right)$

2. यदि $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y=\beta$ हो, तो, सिद्ध कीजिए कि

$$x^2-2xy\cos\beta+y^2=\sin^2\beta$$

3. यदि $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$ हो, तो, सिद्ध कीजिए कि

$$x^2+y^2+z^2+2xyz=1$$

4. सिद्ध कीजिए कि :

(a) $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}+\sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{\pi}{2}$ (b) $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$

(c) $\cos^{-1}\frac{4}{5}+\tan^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{27}{11}$ (d) $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

5. समीकरण $\tan^{-1}(x-1)+\tan^{-1}(x+1)=\tan^{-1}3x$ को हल कीजिए।

आइये दोहराएँ

- यदि किसी त्रिकोणमितीय फलन के प्रांत को प्रतिबन्धित कर दिया जाए, तो उसके प्रतिलोम का अस्तित्व संभव है।

  (i) $\sin^{-1}x=y$ यदि $\sin y=x$ जहां $-1\le x\le 1, -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$

  (ii) $\cos^{-1}x=y$ यदि $\cos\ y=x$ जहां $-1\le x\le 1, 0\le y\le\pi$

(iii) $\tan^{-1} x = y$ यदि $\tan y = x$ जहां $x \in R, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

(iv) $\cot^{-1} x = y$ यदि $\cot y = x$ जहां $x \in R, 0 < y < \pi$

(v) $\sec^{-1} x = y$ यदि $\sec y = x$ जहां $x \geq 1, \quad 0 \leq y < \frac{\pi}{2}$ or $x \leq -1, \frac{\pi}{2} < y \leq \pi$

(vi) $\operatorname{cosec}^{-1} x = y$ if $\operatorname{cosec} y = x$ जहां $x \geq 1, 0 < y \leq \frac{\pi}{2}$

अथवा $\quad x \leq -1, -\frac{\pi}{2} \leq y < 0$

- प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के आलेखों को दिए हुए अन्तरालों में उनके अक्षों को परस्पर बदलने के द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। जैसे कि $y = \sin x$, की स्थिति में।
- **गुणधर्म :**

(i) $\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta$, $\tan^{-1}(\tan\theta) = \theta$, $\tan(\tan^{-1}\theta) = \theta$ and $\sin(\sin^{-1}\theta) = \theta$

(ii) $\operatorname{cosec}^{-1} x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$, $\cot^{-1} x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$, $\sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

(iii) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$, $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$, $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$

(iv) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$, $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

(v) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$, $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$

(vi) $2\tan^{-1} x = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$

(vii) $\sin^{-1} x = \cos^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$$= \sec^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

सहायक वेबसाइट

- *http://en.wikipedia.org/wiki/Inverse_trigonometric_functions*
- *http://mathworld.wolfram.com/InverseTrigonometricFunctions.html*

आइए अभ्यास करें

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक को सिद्ध कीजिए :

(a) $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{8}{17}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{77}{85}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

(c) $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{27}{11}\right)$

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक को सिद्ध कीजिए :

(a) $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{23}{11}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=\tan^{-1}2$

(c) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

3. (a) सिद्ध कीजिए कि $2\sin^{-1}x=\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

(b) सिद्ध कीजिए कि $2\cos^{-1}x=\cos^{-1}\left(2x^2-1\right)$

(c) सिद्ध कीजिए कि $\cos^{-1}x=2\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)=2\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right)$

4. निम्नलिखित में से प्रत्येक को सिद्ध कीजिए :

(a) $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)=\frac{\pi}{4}-x$

(c) $\cot^{-1}\left(\frac{ab+1}{a-b}\right)+\cot^{-1}\left(\frac{bc+1}{b-c}\right)+\cot^{-1}\left(\frac{ca+1}{c-a}\right)=0$

5. निम्नलिखित में से प्रत्येक को हल कीजिए :

(a) $\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x=\frac{\pi}{4}$ (b) $2\tan^{-1}(\cos x)=\tan^{-1}(2\,\text{cosec}\,x)$

(c) $\cos^{-1}x+\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}x\right)=\frac{\pi}{6}$ (d) $\cot^{-1}x-\cot^{-1}(x+2)=\frac{\pi}{12},\ x>0$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 24.1

. (a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $-\frac{\pi}{4}$ (c) $-\frac{\pi}{3}$ (d) $-\frac{\pi}{3}$ (e) $\frac{\pi}{4}$

2. (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1 (e) -2

3. (a) $\sqrt{1+x^2}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{x^2-4}}$ (c) $\sqrt{x^4-1}$ (d) $\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}$ (e) $\sqrt{\frac{1-x}{x}}$

देखें आपने कितना सीखा 24.2

1. (a) 1 (b) 0 (c) $\frac{x+y}{1-xy}$ (d) $\frac{5}{12}$ (e) $-\frac{7}{17}$

5. $0, \pm\frac{1}{2}$

आइये अभ्यास करें

5. (a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) ± 1 (d) $\sqrt{3}$