25

सीमा एवं सांतत्य

फलन $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ लीजिए।

आप देख सकते हैं कि फलन $x=1$ पर परिभाषित नहीं है क्योंकि $(x-1)$ हर में है। x का मान 1 के बिल्कुल पास, लेकिन 1 के बराबर नहीं, जैसा नीचे तालिका में दिया गया है। इस अवस्था में $x-1 \neq 0$ क्योंकि $x \neq 1$

हम $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)}=x+1$ लिख सकते हैं क्योंकि $x-1\neq 0$

इसलिए $(x-1)$ से भाग देना संभव है।

तालिका 1

x	$f(x)$
0.5	1.5
0.6	1.6
0.7	1.7
0.8	1.8
0.9	1.9
0.91	1.91
:	:
:	:
0.99	1.99
:	:
:	:
0.9999	1.9999

तालिका 2

x	$f(x)$
1.9	2.9
1.8	2.8
1.7	2.7
1.6	2.6
1.5	2.5
:	:
:	:
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001
:	:
:	:
1.00001	2.00001

उपरोक्त तालिकाओं में आप देख सकते हैं कि $x, 1$ की ओर अग्रसर हो रहा है तथा $f(x)$ का संगत मान 2 के पास-पास पहुंच रहा है (अग्रसर है)। अलबत्ता इस अवस्था में $f(x)$,$x=1$ पर परिभाषित नहीं है। इस विचार को यह कह सकते हैं कि जब x, 1 की ओर अग्रसर होता है तो $f(x)$ के मान की सीमा 2 है।

आइए अब एक अन्य फलन $f(x)=2x$ लें। हम इस फलन के आचरण $x=1$ बिन्दु के पास तथा $x=1$ पर देखेंगे। हम देखते हैं जब x, 1 की ओर अग्रसर होता है, तो $f(x)$ का संगत मान 2 की ओर अग्रसर होता है तथा $x=1$ पर $f(x)$ का मान 2 है।

अत: उपरोक्त खोज से हम $f(x)$ के आचरण के विषय में और अधिक क्या कह सकते हैं जब x, 2 के पास है तथा जब $x=2$ है।

इस पाठ में हम किसी फलन के किसी बिन्दु के पास तथा उस बिन्दु पर $f(x)$ का आचरण देखेंगे चाहे उस बिन्दु पर फलन परिभाषित भी न हो।

उद्देश्य

इस पास के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाएंगे :

- एक फलन की सीमा को परिभाषित करना
- एक फलन की मानक सीमा ज्ञात करना
- मानक सीमाओं तथा विभिन्न विधियों का प्रयोग कर सीमाएं ज्ञात करना
- एक बिन्दु पर फलन के सांतत्य को परिभाषित करना तथा उसकी ज्यामितीय व्याख्या करना
- एक फलन का एक अन्तराल में सांतत्य को परिभाषित करना
- किसी बिन्दु पर एक फलन का सांतत्य तथा अन्यथा ज्ञात करना
- उदाहरणों की सहायता से फलन के सांतत्य के प्रमेयों का कथन देना तथा उनका प्रयोग करना

पूर्व ज्ञान

- फलन की संकल्पना
- एक फलन का आलेख खींचना
- त्रिकोणमितीय फलनों की संकल्पना
- चरघांताकी तथा लघुगणकीय फलनों की संकल्पना

25.1 एक फलन की सीमा

इस पाठ के आरम्भ में हमने फलन $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ को लिया था। हमने देखा था जब $x, 1$ की ओर अग्रसर होता है, तो $f(x), 2$ की ओर अग्रसर होता है। सामान्यत: यदि x, a की ओर अग्रसर होता है तो $f(x), L$ की ओर अग्रसर होता है, तो हम कहते हैं L, फलन $f(x)$ का सीमांत मान है

संकेतों में इसे लिखा जाता है $$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

आइए अब हम फलन $(5-x)$ का सीमान्त मान ज्ञात करें, जब $x, 0$ की ओर अग्रसर होता है।

अर्थात $\lim_{x\to 0}(5x-3)$

इस सीमा को ज्ञात करने के लिए, हम शून्य के दोनों ओर, x को मान देते हैं

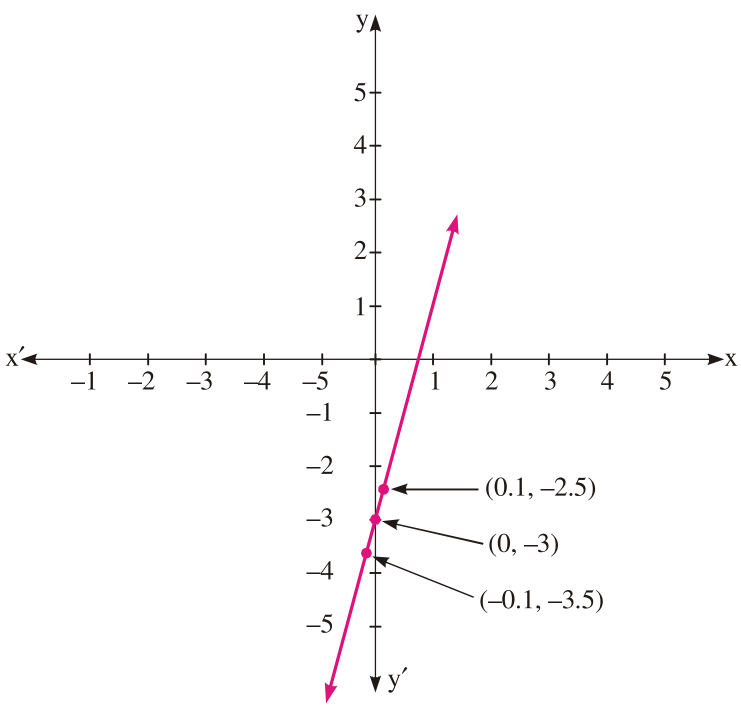
x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001..........
$5x-3$	-3.5	-3.05	-3.005	-3.0005..........

x	0.1	0.01	0.001	0.0001..........
$5x-3$	-2.5	-2.95	-2.995	-2.9995.........

उपरोक्त से साफ है कि $(5x-3)$ की सीमा जब $x\to 0, -3$ है

अर्थात $\lim_{x\to 0}(5x-3) = -3$

इसको चित्र 25.1 में आलेख के रूप में दिखाया गया है :



चित्र 25.1

एक बिन्दु पर किसी फलन का सीमान्त मान, चर को उस बिन्दु के बहुत पास के मान देकर ज्ञात करना, सदा सुविधाजनक नहीं है।

अत: हमें इस विधि के अतिरिक्त विधियां चाहिएँ जिनके द्वारा हम फलन की सीमा ज्ञात कर सकें, जब x (स्वतंत्र चर) एक परिमित राशि माना a की ओर अग्रसर है

आइए एक उदाहरण लें– $\lim_{x\to 3} f(x)$, ज्ञात कीजिए जब $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$

इसे हम प्रतिस्थापन विधि से ज्ञात कर सकते हैं, जिसके चरण निम्न हैं :

चरण-1 : हम 'a' के निकट एक मान लें, जैसे $a+h$ जहां h एक बहुत छोटी धनात्मक सख्या है स्पष्टत: जब $x \to a$ तब $h \to 0$	$f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ के लिए हम x को $3+h$ लिखते हैं। $x \to 3$ तो $h \to 0$
चरण-2 : $f(a+h)$ को सरल करें	अब $f(x)=f(3+h)$ $=\dfrac{(3+h)^2-9}{3+h-3}$ $=\dfrac{h^2+6h}{h}$ $=h+6$
चरण-3 : $h=0$ रखकर अभीष्ट मान (परिणाम) प्राप्त करें।	$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{h\to 0}(6+h)$ जब $x \to 0$ तो $h \to 0$ $h=0$ रखने पर, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=6+0=6$

टिप्पणी: ध्यान दें कि $f(3)$ परिभाषित नहीं है फिर भी इस फलन की सीमा जब $x \to 3, 6$ है। अब हम विभिन्न प्रकार के फलनों की सीमा ज्ञात करने की अन्य विधियों पर चर्चा करेंगे।

आइए अब एक अन्य उदाहरण लें

$$\lim_{x\to 1} f(x) \text{ ज्ञात करें जहाँ } f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$$

यहाँ $x \neq 1$ के लिए $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

$$=\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)(x+1)}$$

यह दर्शाता है कि यदि $f(x)$ का रूप $\dfrac{g(x)}{h(x)}$ हो, तो हम उसे गुणनखंड की विधि से हल कर सकते हैं। इस स्थिति में हम निम्न चरण अपनाते हैं:

चरण-1 : $g(x)$ तथा $h(x)$ के गुणनखंड करें	हल : $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ $=\dfrac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)(x+1)}$ ($\because x\neq 1, \therefore x-1\neq 0$ और इस प्रकार हम इसे काट सकते हैं।
चरण-2 : $f(x)$ को सरल करें	$\therefore \quad f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$
चरण-3 : x का मान रखने पर हमें अभीष्ट परिणाम मिलता है।	$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=\dfrac{1+1+1}{1+1}=\dfrac{3}{2}$ परन्तु $f(1)=1$ (दिया है) इस अवस्था में $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$

अत: $f(x)$ की सीमा जब $x\to a$ तथा फलन का उस बिन्दु $x=a$ पर मान अलग-अलग हो सकते हैं।

आइए, अब हम एक ऐसा उदाहरण लें जो न तो गुणनखंड विधि और न ही प्रतिस्थापन विधि से हल हो सकता है।

मान ज्ञात कीजिए : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

इसके लिए हम निम्न चरण लेते हैं :

चरण-1: उस पद का परिमेयीकरण करें जिसमें वर्गमूल है

चरण-2: सरल करें

चरण-3: x का मान रखें तथा वांछित परिणाम प्राप्त करें

हल :

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{(1+x)^2}-\sqrt{(1-x)^2}}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\frac{(1+x)-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$=\frac{1+x-1+x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

[$\because x\neq 0$ अत: उसे काट सकते हैं।]

$$= \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$\therefore \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = \frac{2}{1+1} = 1$$

25.2 बाईं पक्ष तथा दाईं पक्ष सीमाएं

हम पहले ही देख चुके हैं कि $x \to a$ का अर्थ है कि x के मान a के बहुत निकट हैं जो a से बड़े अथवा छोटे हैं। उस स्थिति में जब x के मान a से छोटे तथा a के बहुत निकट हैं तो हम कहते हैं कि x, बाईं ओर से x की ओर अग्रसर है तथा इसे हम $x \to a^-$ के रूप में लिखते हैं। इसी प्रकार x के मान जो a से बड़े तथा a के बहुत निकट हैं तो हम कहते हैं कि x दाईं ओर से a की ओर अग्रसर है तथा उसे हम $x \to a^+$ के रूप में लिखते हैं।

अत: यदि एक फलन $f(x)$ एक सीमा l_1 की ओर अग्रसर है, जब x 'a' की ओर बायें से उपगमन करता है, तो हम कहते हैं कि $f(x)$ की बाईं पक्ष सीमा जब $x \to a$, l_1 है। हम उसे इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell_1 \quad \text{अथवा} \quad \lim_{h \to 0} f(a-h) = \ell_1, h > 0$$

इसी प्रकार x के दायें से a की ओर अग्रसर होने पर यदि $f(x)$ एक सीमा l_2 की ओर अग्रसर हो, तो हम कहते हैं कि $f(x)$ की दाईं पक्ष सीमा जब $x \to a; l_2$ है। हम इसे इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell_2 \quad \text{अथवा} \quad \lim_{h \to 0} f(a+h) = \ell_2, h > 0$$

कार्यकारी नियम :

दाईं पक्ष सीमा ज्ञात करना	बाईं पक्ष सीमा ज्ञात करना
$\lim_{x \to a^+} f(x)$	$\lim_{x \to a^-} f(x)$
$x = a + h$ रखिए	$x = a - h$ रखिए
$\lim_{h \to 0} f(a+h)$ ज्ञात कीजिए	$\lim_{h \to 0} f(a-h)$ ज्ञात कीजिए

टिप्पणी : ध्यान रहे दोनों अवस्थाओं में h के मान धनात्मक होंगे।

25.3 फलन y = f (x) की x = a पर सीमा

आइए एक उदाहरण लें :

$\lim_{x \to 1} f(x)$ ज्ञात कीजिए जहाँ $f(x) = x^2 + 5x + 3$

यहाँ $$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{h \to 0}\left[(1+h)^2 + 5(1+h) + 3\right] = \lim_{h \to 0}\left[1 + 2h + h^2 + 5 + 5h + 3\right]$$

$$= 1 + 5 + 3 = 9 \qquad \text{.....(i)}$$

तथा $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{h\to 0}\left[(1-h)^2+5(1-h)+3\right]$

$$= \lim_{x\to 0}\left[1-2h+h^2+5-5h+3\right]$$

$$=1+5+3=9 \qquad .....(ii)$$

(i) तथा (ii) से, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

आइए एक अन्य उदाहरण लें :

मान ज्ञात कीजिए : $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x-3|}{x-3}$

यहाँ $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{|x-3|}{x-3} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|(3+h)-3|}{[(3+h)-3]} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} \qquad \text{(क्योंकि } h>0, \text{ अत: } |h| = h)$$

$$=1 \qquad .....(iii)$$

तथा $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{|x-3|}{x-3} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|(3-h)-3|}{[(3-h)-3]} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|-h|}{-h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{-h} \qquad \text{(क्योंकि } h > 0, \text{ अत: } |\text{-}h| = h)$$

$$=-1 \qquad .....(iv)$$

अत: (iii) तथा (iv) से, $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{|x-3|}{x-3} \neq \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{|x-3|}{x-3}$

अत: प्रथम उदाहरण में बाईं पक्ष सीमा = दाईं पक्ष सीमा जबकि दूसरे उदाहरण में

बाईं पक्ष सीमा $\neq$ दाईं पक्ष सीमा

अत: बाईं पक्ष सीमा तथा दाईं पक्ष सीमा सदा समान नहीं होते। अत: हम इस नतीजे पर पहुँचे हैं कि $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+5x+3\right)$ का अस्तित्व है (जो 9 के बराबर है) तथा $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x-3|}{x-3}$ का अस्तित्व नहीं है।

टिप्पणी:

I $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell \\ \text{तथा } \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$

II $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell_1 \\ \text{तथा } \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell_2\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)$ का अस्तित्व नहीं.

III $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ या $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ का अस्तित्व नहीं $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ का अस्तित्व नहीं

25.4 सीमाओं पर आधारभूत प्रमेय

1. $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$ जहाँ c एक अचर है

इसको सत्यापित करने के लिए माना $f(x) = 5x$

हम देखते हैं कि $\lim\limits_{x\to 2} 5x$ में 5 एक अचर है तथा सीमा से बेअसर है

$$\therefore \quad \lim_{x\to 2} 5x = 5\lim_{x\to 2} x = 5\times 2 = 10$$

2. $\lim\limits_{x\to a}\left[g(x)+h(x)+p(x)+....\right] = \lim\limits_{x\to a} g(x) + \lim\limits_{x\to a} h(x) + \lim\limits_{x\to a} p(x) + ...$

जहाँ $g(x), h(x), p(x), ...$ कोई फलन हैं

3. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\lim\limits_{x\to a} g(x)$

इसे सत्यापित करने के लिए माना

$$f(x) = 5x^2 + 2x + 3$$

तथा $\qquad g(x) = x + 2.$

तब $\qquad \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(5x^2 + 2x + 3\right)$

$$= 5\lim_{x\to 0} x^2 + 2\lim_{x\to 0} x + 3 = 3$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}(x+2) = \lim_{x\to 0} x + 2 = 2$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}(5x^2 + 2x + 3)\lim_{x\to 0}(x+2) = 3.2 = 6 \qquad .....(i)$$

फिर $\qquad \lim\limits_{x\to 0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to 0}[(5x^2+2x+3)(x+2)]$

$$= \lim_{x\to 0}(5x^3 + 12x^2 + 7x + 6)$$

$$= 5\lim_{x\to 0} x^3 + 12\lim_{x\to 0} x^2 + 7\lim_{x\to 0} x + 6$$

$$= 6 \qquad .....(ii)$$

(i) तथा (ii) से,

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x)g(x)\right] = \lim_{x\to 0} f(x)\lim_{x\to 0} g(x)$$

4. $\lim\limits_{x\to a}\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, जबकि $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

इसे सत्यापित करने के लिए माना $f(x) = x^2 + 5x + 6$ और $g(x) = x + 2$

हमें मिलता है $$\lim_{x \to -1} (x^2 + 5x + 6) = (-1)^2 + 5(-1) + 6$$

$$= 1 - 5 + 6 = 2$$

तथा $$\lim_{x \to -1} (x + 2) = -1 + 2 = 1$$

$$\therefore \quad \frac{\lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 5x + 6)}{\lim\limits_{x \to -1} (x + 2)} = \frac{2}{1} = 2 \qquad .....(i)$$

और $$\lim_{x \to -1} \frac{(x^2 + 5x + 6)}{x + 2} = \lim_{x \to -1} \frac{(x + 3)(x + 2)}{x + 2} \quad \left[\begin{array}{l} \because x^2 + 5x + 6 \\ = x^2 + 3x + 2x + 6 \\ = x(x + 3) + 2(x + 3) \\ = (x + 3)(x + 2) \end{array}\right]$$

$$= \lim_{x \to -1} (x + 3)$$

$$= -1 + 3 = 2 \qquad .....(ii)$$

$\therefore$ (i) तथा (ii) से,

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2} = \frac{\lim\limits_{x \to -1} \left(x^2 + 5x + 6\right)}{\lim\limits_{x \to -1} (x + 2)}$$

अर्थात् $$\lim_{x \to -1} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x \to -1} f(x)}{\lim\limits_{x \to -1} g(x)}$$

हम ने ऊपर देखा कि दिये हुए दो फलनों को अनेक विधियों से मिला कर नया फलन बनाया जा सकता है। इस संयोजित फलन की सीमा जब $x \to a$, की गणना दिए हुए फलनों की सीमा से की जा सकती है। अन्त में, हम सीमा पर कुछ आधारभूत परिणामों का वर्णन नीचे करेंगे जिन का आधारभूत संक्रियाओं से संयोजित फलनों की सीमाएं ज्ञात करने में उपयोग किया जा सकता है।

यदि $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ तथा $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$ हो, तो

(i) $\lim\limits_{x \to a} kf(x) = k \lim\limits_{x \to a} f(x) = k\ell$ जहाँ k एक अचर है

(ii) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell \pm m$

(iii) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell \cdot m$

(iv) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{\ell}{m}$, जबकि $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$

उपरोक्त परिणाम दो से अधिक फलनों पर भी लागू होते हैं।

उदाहरण 25.1. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ज्ञात कीजिए जहाँ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

हल :

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=(x+1) \qquad [\because x\neq 1]$$

$$\therefore \qquad \lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2$$

टिप्पणी : $\dfrac{x^2-1}{x-1}$, $x=1$ पर परिभाषित नहीं है। $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ का मान $f(x)$ के $x=1$ मान से स्वतंत्र है।

उदाहरण 25.2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(x^2+2x+4\right) \qquad [\because x\neq 2]$$

$$=2^2+2\times 2+4=12$$

उदाहरण 25.3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3-x}-1}{2-x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : अंश का परिमेयकरण करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\frac{\sqrt{3-x}-1}{2-x}=\frac{\sqrt{3-x}-1}{2-x}\times\frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{3-x}+1}=\frac{3-x-1}{(2-x)\left(\sqrt{3-x}+1\right)}$$

$$=\frac{2-x}{(2-x)\left(\sqrt{3-x}+1\right)}$$

$$\therefore \qquad \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3-x}-1}{2-x}=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{(2-x)\left(\sqrt{3-x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\left(\sqrt{3-x}+1\right)} \qquad [\because x\neq 2]$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{3-2}+1\right)}$$

$$= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

उदाहरण 25.4. मान ज्ञात कीजिए :

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{12-x}-x}{\sqrt{6+x}-3}$$

हल : अंश तथा हर का परिमेयकरण करने पर हमें मिलता है

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{12-x}-x}{\sqrt{6+x}-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\left(\sqrt{12-x}-x\right)\left(\sqrt{12-x}+x\right)\cdot\left(\sqrt{6+x}+3\right)}{\left(\sqrt{6+x}-3\right)\left(\sqrt{6+x}+3\right)\left(\sqrt{12-x}+x\right)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{\left(12-x-x^2\right)}{6+x-9} \cdot \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{6+x}+3}{\sqrt{12-x}+x}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-(x+4)(x-3)}{(x-3)} \cdot \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{6+x}+3}{\sqrt{12-x}+x}$$

$$= -(3+4)\cdot\frac{6}{6} = -7 \qquad [\because x \neq 3]$$

टिप्पणी: जब कभी किसी फलन के अंश और हर दोनों की सीमांए शून्य हों तो आप फलन का ऐसा सरलीकरण करें कि परिणामी फलन का हर शून्येतर हो। यदि हर की सीमा 0 है तथा अंश की सीमा शून्येतर है, तो फलन की सीमा का अस्तित्व नहीं होता।

उदाहरण 25.5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$, यदि उसका अस्तित्व है, तो ज्ञात करें।

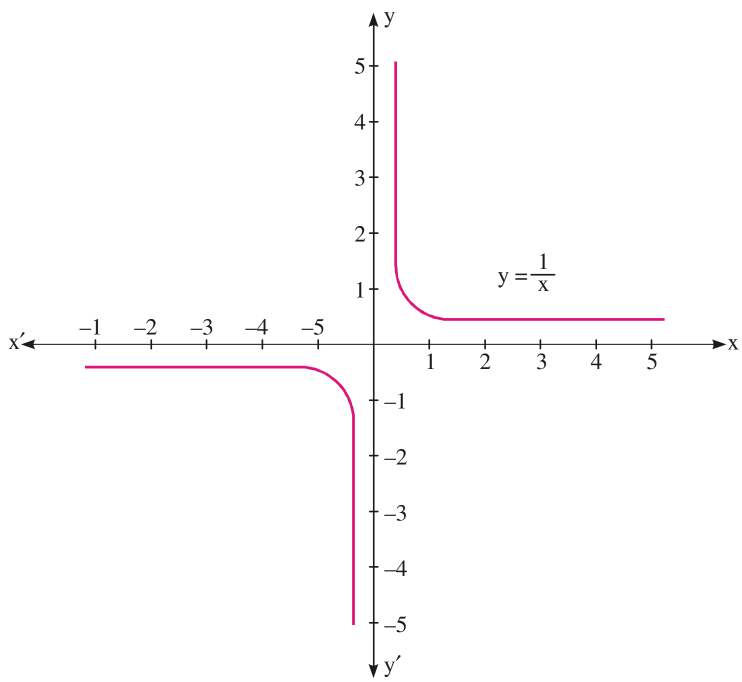
हल : हम x के वह मान चुनते हैं जो दोनों ओर से 0 की ओर अग्रसर होते हैं।

हम $\frac{1}{x}$ के संगत मानों की तालिका बनाते हैं

x	-0.1	$-.01$	$-.001$	$-.0001$
$\frac{1}{x}$	-10	-100	-1000	-10000

x	0.1	.01	.001	.0001
$\frac{1}{x}$	10	100	1000	10000

हम देखते हैं कि जैसे $x \to 0$ तो $\frac{1}{x}$ के मान किसी संख्या की ओर अग्रसर नहीं होते। अत: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ का अस्तित्व नहीं है जैसा कि चित्र 25.2 में दिखाया गया है।



चित्र 25.2

उदाहरण 25.6. मान ज्ञात कीजिए :

$$\lim_{x \to 0} (|x| + |-x|)$$

हल : क्योंकि |x| के मान $x \geq 0$ तथा $x < 0$ के लिए भिन्न हैं, हमें दोनों बाईं पक्ष सीमा तथा दाईं पक्ष सीमा ज्ञात करनी पड़ेंगी।

$$\lim_{x \to 0^-} (|x| + |-x|) = \lim_{h \to 0} (|0 - h| + |-(0 - h)|)$$

$$= \lim_{h \to 0} (|-h| + |-(-h)|)$$

$$= \lim_{h \to 0} h + h = \lim_{h \to 0} 2h = 0 \qquad \text{...(i)}$$

तथा $$\lim_{x \to 0^+} (|x| + |-x|) = \lim_{h \to 0} (|0 + h| + |-(0 + h)|)$$

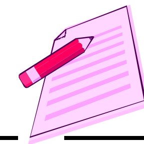
$$= \lim_{x \to 0} h + h = \lim_{h \to 0} 2h = 0 \qquad \text{...(ii)}$$

(i) तथा (ii) से,

$$\lim_{x \to 0^-} (|x| + |-x|) = \lim_{h \to 0^+} [|x| + |-x|]$$

अत: $$\lim_{h \to 0} [|x| + |-x|] = 0$$

टिप्पणी: हमें याद रखना चाहिए कि हम बाईं पक्ष तथा दाईं पक्ष सीमा का प्रयोग विशेषतया तब करते हैं जब (a) दिया गया फलन मापांक फलन है तथा (b) फलन एक से अधिक नियम द्वारा परिभाषित है।



उदाहरण 25.7. a का मान ज्ञात कीजिए कि

$\lim_{x\to 1} f(x)$ का अस्तित्व है जहाँ $f(x)=\begin{cases}3x+5 & ,x\le 1\\ 2x+a, & x>1\end{cases}$

हल :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1}(3x+5) \qquad [\because f(x)=3x+5,\ x\le 1 \text{ के लिए}]$$

$$=\lim_{h\to 0}[3(1-h)+5]$$

$$=3+5=8 \qquad .....(i)$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1}(2x+a) \qquad [\because f(x)=2x+a,\ x>1 \text{ के लिए}]$$

$$=\lim_{h\to 0}(2(1+h)+a)$$

$$=2+a \qquad .....(ii)$$

हमें दिया है कि $\lim_{x\to 1} f(x)$ का अस्तित्व है यदि

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

(i) तथा (ii) से,

$$2+a=8$$

$\therefore$ अथवा $a=6$

उदाहरण 25.8. यदि फलन $f(x)$ इस प्रकार परिभाषित है कि

$$f(x)=\begin{cases}x & , \quad 0\le x<\frac{1}{2}\\ 0 & , \quad x=\frac{1}{2}\\ x-1, & \frac{1}{2}<x\le 1\end{cases}$$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$ के अस्तित्व का परीक्षण कीजिए।

हल : यहाँ

$$f(x)=\begin{cases}x & , \quad 0\le x<\frac{1}{2} & .....(i)\\ 0 & , \quad x=\frac{1}{2}\\ x-1, & \frac{1}{2}<x\le 1 & .....(ii)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x)=\lim_{h\to 0} f\left(\frac{1}{2}-h\right)$$

टिप्पणी

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}-h\right) \qquad \left[\because \frac{1}{2}-h<\frac{1}{2} \text{ तथा (i) से, } f\left(\frac{1}{2}-h\right)=\frac{1}{2}-h\right]$$

$$=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2} \qquad .....(iii)$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x)=\lim_{h\to 0} f\left(\frac{1}{2}+h\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\left(\frac{1}{2}+h\right)-1\right] \qquad \left[\because \frac{1}{2}+h>\frac{1}{2} \text{ तथा (ii) से, } f\left(\frac{1}{2}+h\right)=\left(\frac{1}{2}+h\right)-1\right]$$

$$=\frac{1}{2}+(-1) \;=-\frac{1}{2} \qquad .....(iv)$$

(iii) तथा (iv) से, बाईं पक्ष सीमा $\neq$ दाईं पक्ष सीमा

अतः $\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है।

देखें आपने कितना सीखा 25.1

1. निम्न में से प्रत्येक सीमा ज्ञात कीजिए:

(a) $\lim_{x\to 2}[2(x+3)+7]$ (b) $\lim_{x\to 0}\left(x^2+3x+7\right)$ (c) $\lim_{x\to 1}\left[(x+3)^2-16\right]$

(d) $\lim_{x\to -1}\left[(x+1)^2+2\right]$ (e) $\lim_{x\to 0}\left[(2x+1)^3-5\right]$ (f) $\lim_{x\to 1}(3x+1)(x+1)$

2. निम्न फलनों में प्रत्येक की सीमा ज्ञात कीजिए :

(a) $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{x+2}$ (b) $\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+1}$ (c) $\lim_{x\to -1}\frac{3x+5}{x-10}$

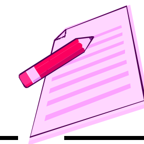
(d) $\lim_{x\to 0}\frac{px+q}{ax+b}$ (e) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ (f) $\lim_{x\to -5}\frac{x^2-25}{x+5}$

(g) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$ (h) $\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{9x^2-1}{3x-1}$

3. निम्न में प्रत्येक सीमा ज्ञात कीजिए :

(a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ (b) $\lim_{x\to 0}\frac{x^3+7x}{x^2+2x}$ (c) $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}$

(d) $\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right]$



4. निम्न सीमाओं में से प्रत्येक को ज्ञात कीजिए:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{6}}{x-3}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$ (e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-x}{2-\sqrt{6-x}}$

5. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x}$, यदि उसका अस्तित्व है, ज्ञात कीजिए।

(b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}$, यदि उसका अस्तित्व है, ज्ञात कीजिए।

6. निम्न सीमाओं को ज्ञात कीजिए :

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{5-|x|}$ (b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{|x+2|}$ (c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{|x-2|}$

(d) दर्शाइए कि $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{|x-5|}{x-5}$ का अस्तित्व नहीं है।

7. (a) निम्न फलनों की बाईं पक्ष सीमा तथा दाईं पक्ष सीमा ज्ञात कीजिए :

$$f(x)=\begin{cases}-2x+3, & x\le 1\\ 3x-5, & x>1\end{cases} \text{ जबकि } x\to 1$$

(b) यदि $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ हो, तो ज्ञात कीजिए।

(c) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$, यदि उसका अस्तित्व है, ज्ञात कीजिए जब $f(x)=\begin{cases}4x+3, & x<4\\ 3x+7, & x\ge 4\end{cases}$

8. 'a' का मान ज्ञात कीजिए ताकि $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ का अस्तित्व है, जहाँ $f(x)=\begin{cases}ax+5, & x<2\\ x-1, & x\ge 2\end{cases}$

9. माना $f(x)=\begin{cases}x, & x<1\\ 1, & x=1\\ x^2, & x>1\end{cases}$ तो $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ के अस्तित्व का परीक्षण कीजिए।

10. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, यदि उसका अस्तित्व है, तो ज्ञात कीजिए जहाँ

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x<2\\ 1, & x=2\\ x+1, & x>2\end{cases}$$

25.5 कुछ विशेष फलनों की सीमा ज्ञात करना

(i) सिद्ध कीजिए कि (a) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$ जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है।

उपपत्ति :

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{a + h - a} \text{s}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(a^n + n\,a^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}h^2 + \ldots.. + h^n\right) - a^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\left(n\,a^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}h + \ldots.. + h^{n-1}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[n\,a^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}h + \ldots.. + h^{n-1}\right]$$

$$= n\,a^{n-1} + 0 + 0 + \ldots.. + 0$$

$$= n\,a^{n-1}$$

$$\therefore \qquad \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n \cdot a^{n-1}$$

टिप्पणी: यह परिणाम सभी n के लिए भी सत्य है

(ii) सिद्ध कीजिए कि (a) $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$ तथा (b) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$

उपपत्ति : एक इकाई वृत्त लीजिए जिसका केन्द्र B है

तथा जिसमें C पर समकोण है तथा $\angle ABC = x$ रेडियन है

अब $\sin x = AC$ तथा $\cos x = BC$

जैसे–जैसे x घटता है वैसे–वैसे A, C के पास होता जाता है

अर्थात $x \to 0, A \to C$

अथवा $x \to 0, AC \to 0$ तथा $BC \to AB$

($\because$ वृत्त की त्रिज्या 1 है)

$\therefore \sin x \to 0$ तथा $\cos x \to 1$

इस प्रकार हमें मिलता है $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$ तथा $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$

(iii) सिद्ध कीजिए कि $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

उपपत्ति : एक इकाई त्रिज्या का वृत्त लीजिए जिसका केन्द्र मूल बिन्दु O पर है। माना वृत्त पर एक बिन्दु B (1, 0) है तथा A, वृत्त पर एक अन्य बिन्दु है। $AC \perp OX$ बनाइए।

माना $\angle AOX = x$ रेडियन, जहाँ $0 < x < \frac{\pi}{2}$

वृत्त के बिन्दु B पर एक स्पर्श रेखा खींचिए, जो बढ़ाई गई OA को D पर मिलती है। अतः $BD \perp OX$

ΔAOC का क्षेत्रफल $<$ त्रिज्यखंड OBA का क्षेत्रफल $< \Delta OBD$ का क्षेत्रफल

अथवा $\frac{1}{2} OC \times AC < \frac{1}{2} x (1)^2 < \frac{1}{2} OB \times BD$

[क्योंकि एक त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई तथा एक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \theta r^2$]

$\therefore \quad \frac{1}{2} \cos x \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$

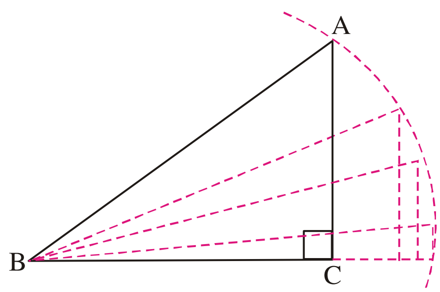
$$\left[\because \cos x = \frac{OC}{OA}, \sin x = \frac{AC}{OA} \text{ और } \tan x = \frac{BD}{OB}, OA = 1 = OB \right]$$

अथवा $\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}$ [$\frac{1}{2} \sin x$ से भाग देने पर]

अर्थात $\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

अर्थात $\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$

अथवा $\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$



चित्र 25.3

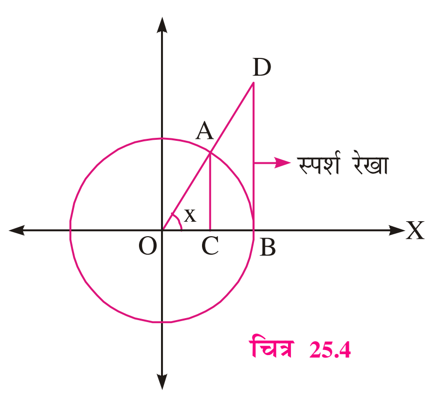
सीमा लेने पर, जब $x \to 0$ हमें मिलता है

$$\lim_{x \to 0} \cos x < \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} < \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}$$

अर्थात $1 < \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} < 1$ $\left[\because \lim_{x \to 0} \cos x = 1 \text{ तथा } \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1 \right]$

अतः $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

टिप्पणी : उपरोक्त परिणाम में स्मरण रखिये कि कोण x रेडियन में व्यक्त है।



चित्र 25.4

(iv) सिद्ध कीजिए कि $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

उपपत्ति : द्विपद प्रमेय से, जब $|x| < 1$ तो हमें मिलता है

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left[1+\frac{1}{x}\cdot x+\frac{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)}{2!}x^2++\frac{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{x}-2\right)}{3!}x^3+\ldots\ldots\ldots\infty\right]$$

$$=\left[1+1+\frac{(1-x)}{2!}+\frac{(1-x)(1-2x)}{3!}+\ldots\ldots\ldots\infty\right]$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[1+1+\frac{1-x}{2!}+\frac{(1-x)(1-2x)}{3!}+\ldots\ldots\ldots\infty\right]$$

$$=\left[1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\ldots\ldots\infty\right]$$

$$= e \qquad \text{(परिभाषा से)}$$

अत: $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

(v) सिद्ध कीजिए कि $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$

उपपत्ति : $$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log(1+x) = \lim_{x\to 0}\log(1+x)^{1/x}$$

$$= \log e \qquad \left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \text{ के प्रयोग से}\right)$$

$$= 1$$

(vi) सिद्ध कीजिए कि $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

उपपत्ति : हम जानते हैं कि $e^x = \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots\ldots\right)$

$$\therefore \quad e^x-1 = \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots\ldots-1\right) = \left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots\ldots\right)$$

$$\therefore \quad \frac{e^x-1}{x} = \frac{\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots\ldots\right)}{x}$$ [दोनों पक्षों को x से भाग देने पर]

$$= \frac{x\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots\ldots\ldots\right)}{x}$$

$$= \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots\ldots\ldots\right)$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots\ldots\ldots\right)$$

$$= 1 + 0 + 0 + \ldots\ldots\ldots = 1$$

अत: $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

उदाहरण 25.9. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ .....(i)

$\therefore$ (i) में x के स्थान पर $-x$ रखने पर हमें मिलता है

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = 1 \qquad \text{.....(ii)}$$

दी गई सीमा को लिख सकते हैं

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 + 1 - e^{-x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - e^{-x}}{x}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^{-x} - 1}{-x}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} + \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x}$$

$= 1 + 1$ [(i) तथा (ii) के प्रयोग से]

$= 2$

अत: $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = 2$

उदाहरण 25.10. $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $x = 1 + h$ जहाँ $h \to 0$

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{x - 1} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{1+h} - e}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^1 \cdot e^h - e}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e(e^h - 1)}{h} = e \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

$$= e \times 1 = e.$$

अतः $$\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{x - 1} = e$$

उदाहरण 25.11. मान ज्ञात कीजिए :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

हल : $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 \qquad \text{(3 से गुणा तथा भाग देने पर)}$$

$$= 3 \lim_{3x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \qquad [\because \text{ जब } x \to 0 \text{ तो } 3x \to 0]$$

$$= 3.1 \qquad \left[\because \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right]$$

$$= 3$$

अतः $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3$$

उदाहरण 25.12. मान ज्ञात कीजिए :

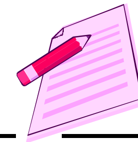
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{2x^2}$$

हल : $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2x^2} \qquad \left[\begin{array}{l} \because \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x, \\ \therefore 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x \\ \text{or } 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \end{array}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \times \frac{x}{2}} \right)^2 \qquad \text{(हर को 2 से गुणा तथा भाग देने पर)}$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{\frac{x}{2} \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$$



$$\therefore \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}=\frac{1}{4}$$

उदाहरण 25.13. मान ज्ञात कीजिए : $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos 4\theta}{1-\cos 6\theta}$

हल : $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos 4\theta}{1-\cos 6\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{2\sin^2 2\theta}{2\sin^2 3\theta}$

$$=\lim_{\theta\to 0}\left(\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\times 2\theta\right)^2\left(\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\times\frac{1}{3\theta}\right)^2\right)$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right)^2\left(\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\right)^2\frac{4\theta^2}{9\theta^2}$$

$$=\left(\frac{4}{9}\right)\lim_{2\theta\to 0}\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right)^2\lim_{3\theta\to 0}\left(\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\right)^2$$

$$=\frac{4}{9}\times 1\times 1=\frac{4}{9}$$

उदाहरण 25.14. मान ज्ञात कीजिए : $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{(\pi-2x)^2}$

हल : $x=\frac{\pi}{2}+h$ लीजिए जब $x\to\frac{\pi}{2}, h\to 0$

$\therefore \qquad 2x=\pi+2h$

$$\therefore \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{(\pi-2x)^2}=\lim_{h\to 0}\frac{1+\cos 2\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{[\pi-(\pi+2h)]^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1+\cos(\pi+2h)}{4h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos 2h}{4h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin^2 h}{4h^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{(\pi - 2x)^2} = \frac{1}{2}$$

उदाहरण 25.15. मान ज्ञात कीजिए : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin a x}{\tan b x}$

हल : $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin a x}{\tan b x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin a x}{ax} \times a}{\frac{\tan bx}{bx} \times b} = \frac{a}{b} \frac{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin a x}{ax}}{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan b x}{bx}}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a}{b}$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

देखें आपने कितना सीखा 25.2

1. निम्न में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

2. निम्न में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

   (a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{-x} - e^{-1}}{x - 1}$ (b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e - e^{x}}{x - 1}$

3. निम्न में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{2x}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x^2}{5x^2}$ (c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x^2}{x}$ (d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin a x}{\sin b x}$

4. निम्न में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 8x}{x}$ (c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x(1 - \cos 2x)}{x^3}$

   (d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{3\tan^2 x}$

5. निम्न में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos a x}{1 - \cos b x}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 \cot x}{1 - \cos x}$ (c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{cosec} x - \cot x}{x}$

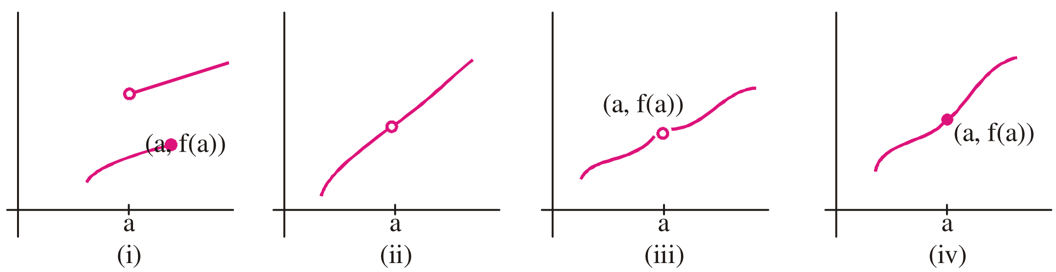
6. निम्न में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{\pi - x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x}$ (c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$

7. निम्न में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\tan 3x}$ (b) $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\tan 7\theta}{\sin 4\theta}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x + \tan 3x}{4x - \tan 5x}$

25.6 किसी बिन्दु पर एक फलन का सांतत्य



चित्र 25.5

आइये एक फलन के उपरोक्त आलेखों का प्रेक्षण करें :

आलेख (iv) को हम बिना पैंसिल उठाये आलेखित कर सकते हैं लेकिन आलेखों (i),(ii) तथा (iii) में, पूरा आलेख खींचने के लिए हमें पैंसिल को उठाना ही पड़ेगा।

स्थिति (iv) के लिए हम कहते हैं कि $x = a$ पर फलन सतत है। अन्य तीन स्थितियों में $x = a$ पर फलन सतत नहीं है, अर्थात वह $x = a$ पर असतत है।

स्थिति (i) में, $x = a$ पर फलन की सीमा का अस्तित्व नहीं है।

स्थिति (ii) में, सीमा का अस्तित्व है लेकिन $x = a$ पर फलन परिभाषित नहीं है।

स्थिति (iii) में, सीमा का अस्तित्व है, लेकिन वह फलन का $x = a$ के मान के बराबर नहीं है।

स्थिति (iv) में, सीमा का अस्तित्व है तथा वह फलन का $x = a$ के मान के बराबर भी है।

उदाहरण 25.16. फलन $f(x) = x - a$ का $x = a$ पर सांतत्य का परीक्षण कीजिए।

हल : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = \lim\limits_{h\to 0}[(a+h)-a]$

$= 0$ .....(i)

तथा $f(a) = a - a = 0$ .....(ii)

(i) तथा (ii) से, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

अतः $x = a$ पर फलन $f(x)$ सतत है।

उदाहरण 25.17. दर्शाइए कि $f(x)=c$ सतत है।

हल : अचर फलन $f(x)=c$ का प्रांत R है। माना 'a' एक स्वेच्छ वास्तविक संख्या है।

$\therefore \quad \lim_{x\to a} f(x)=c$ तथा $f(a)=c$

$\therefore \quad \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

$\therefore$ $x=a$ पर $f(x)$ सतत् है। परन्तु a स्वेच्छ है, अतः $f(x)=c$ एक सतत फलन है।

उदाहरण 25.18. दर्शाइए कि $f(x)=cx+d$ एक सतत फलन है।

हल : फलन $f(x)=cx+d$ का प्रांत R है तथा माना a एक स्वेच्छ वास्तविक संख्या है।

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{h\to 0} f(a+h)$$

$$=\lim_{h\to a}[c\,(a+h)+d]$$

$$=ca+d \qquad .....(i)$$

तथा $\quad f(a)=ca+d \qquad .....(ii)$

(i) तथा (ii) से, $\quad \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

अतः $x=a$ पर $f(x)$ सतत है

क्योंकि a स्वेच्छ है, अतः $f(x)$ एक सतत फलन है।

उदाहरण 25.19. सिद्ध कीजिए कि $f(x)=\sin x$ एक सतत फलन है।

हल : $f(x)=\sin x$

$\sin x$ का प्रांत R है। माना 'a' एक स्वेच्छ वास्तविक संख्या है

$\therefore \quad \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{h\to 0} f(a+h)=\lim_{h\to 0}\sin(a+h)$

$$=\lim_{h\to 0}\,[\sin a.\cos h+\cos a.\sin h]$$

$=\sin a \lim_{h\to 0}\cos h+\cos a \lim_{h\to 0}\sin h \qquad \left[\because \lim_{x\to a} kf(x)=k\lim_{x\to a} f(x)\right.$ जहाँ k एक अचर है$\left.\right]$

$=\sin a\times 1+\cos a\times 0 \qquad \left[\because \lim_{x\to 0}\sin x=0\right.$ और $\left.\lim_{x\to 0}\cos x=1\right]$

$=\sin a \qquad .....(i)$

तथा $f(a)=\sin a \qquad .....(ii)$

(i) तथा (ii) से, $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

$\therefore \sin x$, $x=a$ पर सतत है

$\because \sin x$, $x=a$ पर सतत है तथा x एक स्वेच्छ बिन्दु है।

इसलिए $f(x)=\sin x$ सतत है।

परिभाषा :

1. एक फलन $f(x)$ एक खुले अन्तराल]a,b[में सतत है यदि वह]a,b[* के प्रत्येक बिन्दु पर सतत है।

2. एक फलन $f(x)$,एक बन्द अन्तराल [a,b] में सतत है यदि यह]a,b[के प्रत्येक बिन्दु पर सतत है तथा यह बिन्दु a पर दायें से तथा 'b' पर बायें से सतत है।

अर्थात $$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$$

तथा $$\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$$

* *खुले अन्तराल]a, b[में हम अन्त बिन्दु a तथा b नहीं लेते।*

देखें आपने कितना सीखा 25.3

1. निम्न फलनों की सततता का परीक्षण कीजिए :

   (a) $f(x)=x-5, x=2$ पर (b) $f(x)=2x+7, x=0$ पर

   (c) $f(x)=\frac{5}{3}x+7, x=3$ पर (d) $f(x)=px+q, x=-q$ पर

2. दर्शाइए कि फलन $f(x)=2a+3b$ सतत है जहाँ a तथा b अचर हैं।

3. दर्शाइए कि फलन $5x+7$ सतत है

4. (a) दर्शाइए कि $\cos x$ एक सतत फलन है

   (b) दर्शाइए कि $\cot x$ अपने प्रांत के सभी बिन्दुओं पर सतत है।

5. निम्न फलनों में अचरों के मान ज्ञात कीजिए:

   (a) $f(x)=px-5$ तथा $f(2)=1$ जबकि $x=2$ पर $f(x)$ सतत है

   (b) $f(x)=a+5x$ तथा $f(0)=4$ इस प्रकार है कि $x=0$ पर $f(x)$ सतत है

   (c) $f(x)=2x+3b$ तथा $f(-2)=\frac{2}{3}$ जबकि $f(x), x=-2$ पर सतत है

25.7 एक बिन्दु पर फलन का सांतत्य अथवा असांतत्य

अब तक हमने केवल उन्हीं फलनों पर विचार किया है जो सतत हैं। अब हम कुछ ऐसे उदाहरणों की चर्चा करेंगे जिनमें दिये गए फलन सतत हो सकते है अथवा नहीं।

उदाहरण 25.20. दर्शाइए कि फलन $f(x)=e^x$ एक सतत फलन है।

हल : e^x का प्रांत R है। माना $a\in R$ जहां a एक स्वेच्छ है

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(a+h)$ जबकि h एक बहुत छोटी संख्या है।

$$= \lim_{h \to 0} e^{a+h} = \lim_{h \to 0} e^a \cdot e^h = e^a \lim_{h \to 0} e^h$$

$$= e^a \times 1$$

$$= e^a \qquad .....(i)$$

साथ ही, $f(a) = e^a$ .....(ii)

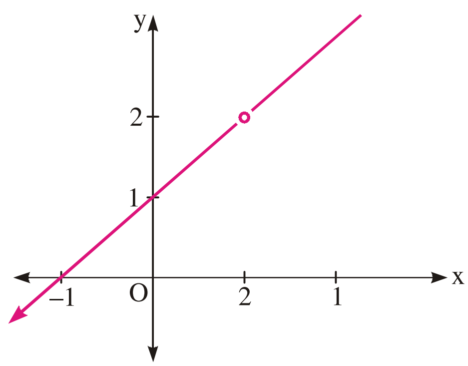
$\therefore$ (i) तथा (ii) से , $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

$\therefore$ f (x), x = a पर सतत है।

क्योंकि a एक स्वेच्छ है, e^x एक सतत फलन है।

उदाहरण 25.21. फलन $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ के आलेख से इसके सांतत्य की चर्चा कीजिए।

हल : फलन का आलेख (चित्र 25.6) में दिया गया है। फलन असतत है क्योंकि $x = 1$ पर आलेख में एक असतता (अंतराल) है।



चित्र 25.6

देखें आपने कितना सीखा 25.4

1. (a) दर्शाइए कि $f(x) = e^{5x}$ एक सतत फलन है।

   (b) दर्शाइए कि $f(x) = e^{\frac{-2}{3}x}$ एक सतत फलन है।

   (c) दर्शाइए कि $f(x) = e^{3x+2}$ एक सतत फलन है।

   (d) दर्शाइए कि $f(x) = e^{-2x+5}$ एक सतत फलन है।

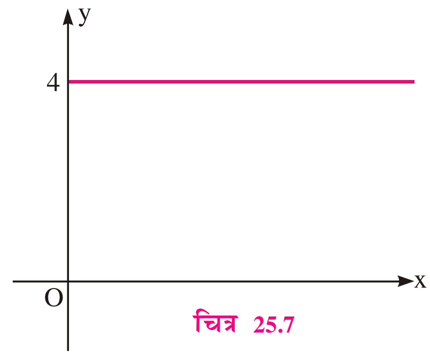
2. आलेख द्वारा, निम्न फलनों में से प्रत्येक के सांतत्य का परीक्षण कीजिए :

   (a) $f(x) = x+1.$ (b) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$

(c) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ (d) $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-4}$

25.8 सतत फलनों के गुण धर्म

(i) फलन $f(x)=4$ पर विचार करें। फलन $f(x)=4$ का आलेख चित्र 25.7 में दिखाया गया है। आलेख से हम देखते हैं कि फलन सतत है। साधारणतया सभी अचर फलन सतत हैं।



चित्र 25.7

(ii) यदि कोई फलन सतत है, तो उस फलन का अचर गुणज भी सतत है। आइए फलन $f(x)=\dfrac{7}{2}x$ पर विचार करें। हम जानते हैं कि $\dfrac{7}{2}$ एक अचर फलन है, इसलिए यह सतत है। x भी सतत फलन है

अब

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{h\to 0}\frac{7}{2}(a+h)$$

$$=\frac{7}{2}a \quad .....(i)$$

तथा $$f(a)=\frac{7}{2}a \quad .....(ii)$$

$\therefore$ $f(x)=\dfrac{7}{2}x$, $x=a$ पर एक सतत फलन है

यदि $x=a$ पर $\dfrac{7}{2}$ तथा x सतत् फलन हैं तो $\dfrac{7}{2}x$ भी $x=a$ पर सतत फलन है।

(iii) फलन $f(x)=x^2+2x$ पर विचार करें। हम जानते हैं कि x^2 तथा $2x$ दोनों सतत हैं

अब $$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h),\ h>0$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[(a+h)^2+2(a+h)\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[a^2+2ah+h^2+2a+2ah\right]$$

$$=a^2+2a \quad .....(i)$$

तथा $$f(a)=a^2+2a \quad .....(ii)$$

(i) तथा (ii) से, $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

$\therefore$ f(x), x = a पर सतत है।

अतः हम कहते हैं कि $x=a$ पर x^2 तथा $2x$ दो सतत फलन हैं, तो (x^2+2x) भी $x=a$ पर सतत है।

(iv) फलन $f(x)=\left(x^2+1\right)(x+2)$ पर विचार कीजिए। हम जानते हैं कि $\left(x^2+1\right)$ तथा $(x+2)$ दो सतत फलन हैं

तथा $$f(x)=\left(x^2+1\right)(x+2)$$

$$=x^3+2x^2+x+2$$

क्योंकि $x^3, 2x^2, x$ तथा 2 सतत फलन हैं, इसलिए x^3+2x^2+x+2 भी एक सतत फलन है

हम कहते हैं कि यदि $\left(x^2+1\right)$ तथा $(x+2)$ दो सतत फलन हैं, तो $\left(x^2+1\right)(x+2)$ भी एक सतत फलन है

(v) फलन $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ को $x=2$ पर विचार कीजिये। हम जानते हैं कि $x^2-4, x=2$ पर सतत फलन है। $(x+2)$ भी $x=2$ पर सतत है

तथा $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to 2}(x-2)$$

$$=2-2=0$$

तथा $$f(2)=\frac{(2)^2-4}{2+2}$$

$$=\frac{0}{4}=0$$

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$. अतः f (x), x = 2 पर सतत है

यदि $x=2$ पर $\left(x^2+4\right)$ तथा $(x+2)$ दो सतत फलन हैं, तो $\dfrac{x^2-4}{x+2}$ भी $x=2$ पर सतत है।

(vi) फलन $f(x)=|x-2|$ पर विचार करें। इस फलन को हम इस प्रकार लिख सकते हैं

$$f(x)=\begin{cases}-(x-2), x<2\\ (x-2), x\ge 2\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{h\to 0} f(2-h),\ h>0$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[(2-h)-2\right]$$

$$=2-2=0$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{h\to 0} f(2+h),\ h>0 \qquad \text{......(i)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(2+h)-2\right]$$

$$=2-2=0 \qquad \text{.....(ii)}$$

और $$f(2) = (2-2) = 0 \quad .....(iii)$$

(i), (ii) तथा (iii) से, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

अतः $|x-2|$, $x = 2$ पर सतत है।

उपरोक्त परिणामों से हम सतत फलनों के कुछ गुणधर्मों को नीचे दे रहे हैं:

यदि $f(x)$ तथा $g(x)$, $x = a$ पर दो सतत फलन हैं, तो

(i) $C f(x)$, $x = a$ पर सतत फलन है जहाँ C एक अचर है

(ii) $f(x) \pm g(x)$, $x = a$ पर सतत है

(iii) $f(x) \cdot g(x)$, $x = a$ पर सतत है

(iv) $f(x)/g(x)$, $x = a$ पर सतत है जहाँ $g(a) \neq 0$

(v) $|f(x)|$, $x = a$ पर सतत है

टिप्पणी: प्रत्येक अचर फलन सतत है

25.9 सातंत्य पर कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

उपरोक्त चर्चित गुणों का प्रयोग करते हुए हम सांतत्य पर कुछ परिणामों की चर्चा करेंगे।

(i) फलन $f(x) = px + q, x \in R$ (i)

इस फलन का प्रांत वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। मान लें R में a एक स्वेच्छ वास्तविक संख्या है

(i) के दोनों पक्षों की सीमा लेने पर हमें मिलता है

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (px + q) = pa + q$$

$$= px + q \text{ का } x = a \text{ पर मान}$$

$\therefore$ $x = a$ पर $px + q$ सतत है

इसी प्रकार यदि $f(x) = 5x^2 + 2x + 3$ पर विचार करें, तो हम दर्शा सकते हैं कि यह सतत फलन है।

व्यापक रूप में यदि, $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

जहां $a_0, a_1, a_2 ..... a_n$ अचर हैं तथा n ऋणेतर पूर्णांक है

हम दर्शा सकते हैं कि बिन्दु $x = c$ (जहां c कोई वास्तविक संख्या है) पर सभी $a_0, a_1 x, a_2 x^2, ... a_n x^n$ सतत हैं और गुण (i) से उन के योगफल भी $x = c$ पर सतत है।

$\therefore$ किसी बिन्दु c पर $f(x)$ सतत फलन है।

अतः प्रत्येक बहुपद फलन प्रत्येक बिन्दु पर सतत है।

(ii) फलन $f(x) = \dfrac{(x+1)(x+3)}{(x-5)}$ पर विचार करें।

$f(x)$ परिभाषित नहीं है जब $x-5=0$ अर्थात $x=5$ है। चूंकि $(x+1)$ तथा $(x+3)$ दोनों सतत हैं, $(x+1)(x+3)$ भी सतत है [गुण (iv) का प्रयोग करने पर]

$\therefore$ फलन का अंश सतत है,

$(x-5)$ भी सतत है

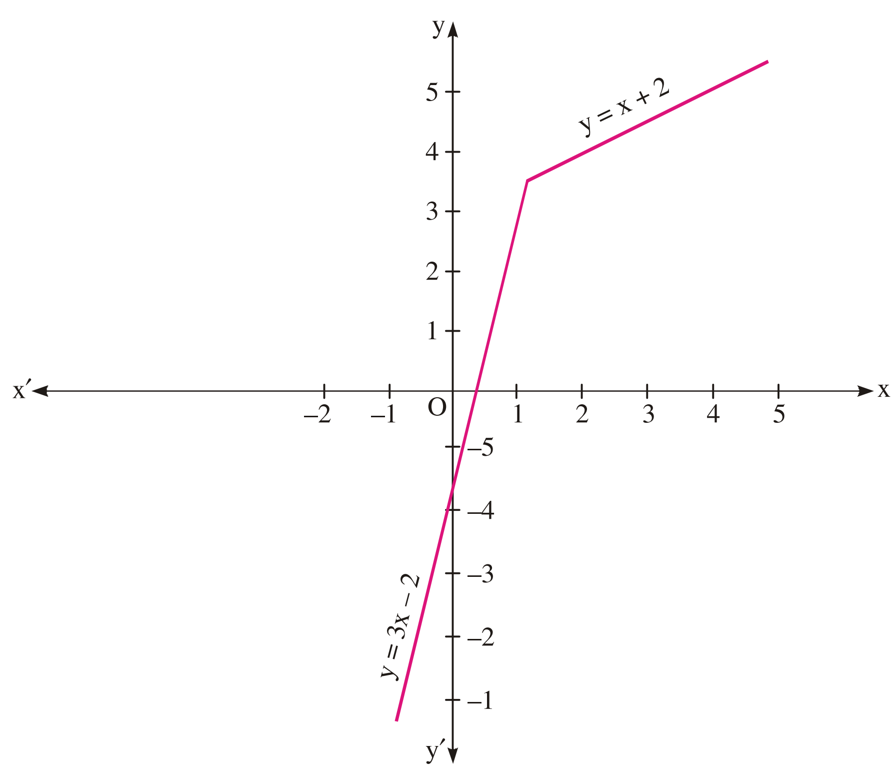
$\therefore$ गुण (iv) का प्रयोग करने पर हम कह सकते हैं कि $x=5$ के अतिरिक्त सभी बिन्दुओं पर फलन $\dfrac{(x+1)(x+3)}{(x-5)}$ सतत है।

व्यापक रूप में, यदि $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ जहां $p(x)$ तथा $q(x)$ बहुपद फलन हैं तथा $q(x)\neq 0$ तो $f(x)$ सतत है क्योंकि $p(x)$ तथा $q(x)$ सतत हैं।

उदाहरण 25.22. यदि $f(x)=\begin{cases}3x-2, x<2 \text{ के लिए}\\ x+2, x\geq 2 \text{ के लिए}\end{cases}$ हो, तो $x=2$ पर $f(x)$ के सांतत्य की जांच कीजिए।

हल : क्योंकि $f(x)$, बिन्दु $x=2$ के बाईं ओर बहुपद फलन $3x-2$ के रूप में परिभाषित है तथा $x=2$ के दाईं ओर दूसरे बहुपद फलन $x+2$ के रूप में। इसलिए $x=2$ पर हम फलन की बाईं पक्ष सीमा तथा दाईं पक्ष सीमा अलग-अलग ज्ञात करेंगे।

$$\text{बाईं पक्ष सीमा} = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}(3x-2) = 3\times 2-2=4$$



चित्र 25.8

दाईं पक्ष सीमा $= \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} (x+2) = 4$

चूंकि $x = 2$ पर बाईं पक्ष सीमा तथा दाईं पक्ष सीमा बराबर है, इसलिए $x = 2$ पर फलन $f(x)$ की सीमा का अस्तित्व है और वह 4 के बराबर है अर्थात $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$

तथा $x = 2$ पर $f(x)$, $x + 2$ के रूप में परिभाषित है।

$\therefore$ $$f(2) = 2 + 2 = 4.$$

अत: $$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$$

इसलिए $x = 2$ पर $f(x)$ सतत है।

उदाहरण 25.23.

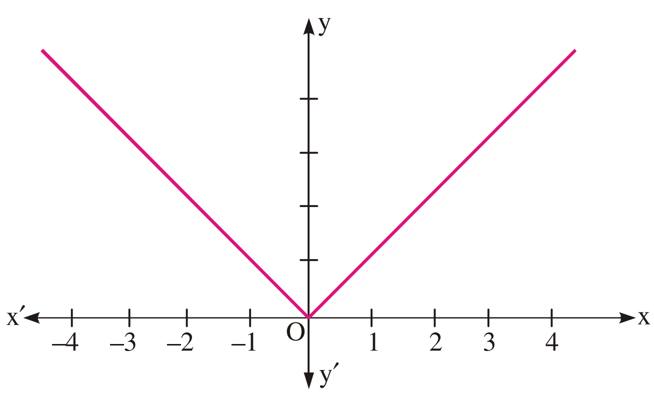
(i) $f(x) = |x|$ का आलेख खींचिए।

(ii) $x = 0$ पर $f(x)$ के सांतत्य की चर्चा कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $x \geq 0$ के लिए $|x| = x$ और $|x| = -x$ होता है। अत: $f(x)$ को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

(i) फलन का आलेख चित्र 25.9 में दिया गया है।



चित्र 25.9

(ii) बाईं पक्ष सीमा $= \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} (-x) = 0$

दाईं पक्ष सीमा $= \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} x = 0$

अत: $$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

तथा $$f(0) = 0$$

$$\therefore \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

अतः $x=0$ पर फलन $f(x)$ सतत है।

उदाहरण 25.24. फलन $f(x) = |x-b|$ के $x=b$ पर सांतत्य का परीक्षण कीजिए।

हल : हमें दिया है $f(x) = |x-b|$

इस फलन को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है :

$$f(x) = \begin{cases} -(x-b), x<b \\ (x-b), x \geq b \end{cases}$$

$$\text{बाईं पक्ष सीमा} = \lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(b-h) = \lim_{h\to 0}[-(b-h-b)]$$

$$= \lim_{h\to 0} h = 0 \qquad \text{.....(i)}$$

$$\text{दाईं पक्ष सीमा} = \lim_{x\to b^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(b+h) = \lim_{h\to 0}[(b+h)-b]$$

$$= \lim_{h\to 0} h = 0 \qquad \text{.....(ii)}$$

साथ ही, $\qquad f(b) = b-b = 0$ .....(iii)

(i), (ii) तथा (iii) से, $\qquad \lim_{x\to b} f(x) = f(b)$

अतः $f(x), x=b$ पर सतत है।

उदाहरण 25.25. यदि $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$

तो ज्ञात कीजिए कि $f(x), x=0$ पर सतत है या नहीं।

हल : यहां $\qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$

$$\text{बाईं पक्ष सीमा} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin 2(0-h)}{0-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin 2h}{-h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin 2h}{2h} \times \frac{2}{1}\right)$$

$$= 1 \times 2 = 2 \qquad \text{.....(i)}$$

$$\text{दाईं पक्ष सीमा} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin 2(0+h)}{0+h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin 2h}{2h} \times \frac{2}{1}$$

$$= 1 \times 2 = 2 \qquad .....(ii)$$

साथ ही, $f(0) = 2$ (दिया है) .....(iii)

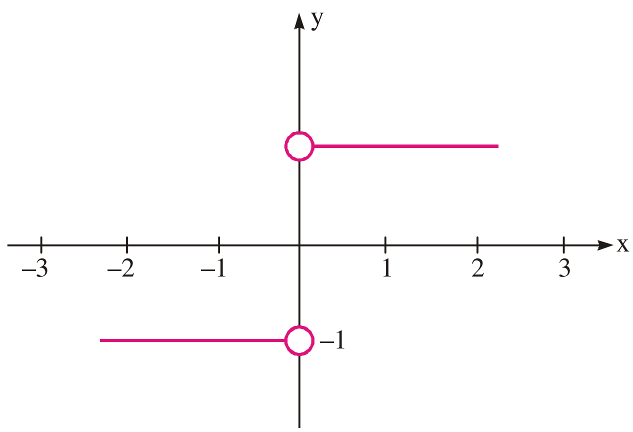
(i), (ii) तथा (iii) से $\lim_{x\to 0} f(x) = 2 = f(0)$

अतः $x = 0$ पर $f(x)$ सतत है।

चिन्ह फलन : फलन $f(x) = \text{sgn}(x)$ [जिसे सिगनम (x) पढ़ा जाता है] को निम्न से परिभाषित किया जाता है

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

फलन के नीचे दिये गये आलेख से इसकी बाईं पक्ष सीमा तथा दाईं पक्ष सीमा ज्ञात कीजिए।



चित्र 25.10

आलेख से, हम देखते हैं कि जब $x \to 0^+$, $f(x) \to 1$ तथा जब $(x) \to 0^-$, $f(x) \to -1$

अतः $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1, \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$

क्योंकि यह सीमाएँ समान नहीं है, इसलिए फलन $f(x), x = 0$ पर असतत है।

सबसे बड़ा पूर्णांक फलनः आइए फलन $\lim_{x\to 0} f(x) = [x]$, जहाँ $[x], x$ से बराबर या छोटा बड़े से बड़ा पूर्णांक दर्शाता है। ज्ञात कीजिए कि क्या $f(x)$ सतत है ?

(i) $x = \frac{1}{2}$ पर (ii) $x = 1$ पर

इसे हल करने के लिए, आइए हम x के कुछ स्वेच्छ मान लें जैसे 1, 3, 0, 2, –0, –0.2, 2,-- सबसे बड़े पूर्णांक फलन की परिभाषा से

$[1.3] = 1, [1.99] = 1, [2] = 2, [0.2] = 0, [-0.2] = -1, [-3.1] = -4,$ इत्यादि

साधारणतया $-3 \le x < -2$ के लिए $[x] = -3$

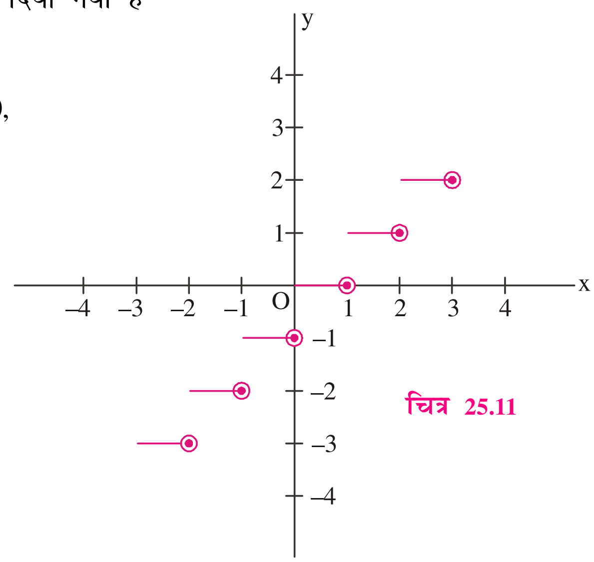
$-2 \le x < -1$ के लिए $\quad [x] = -2$

$-1 \le x < 0$ के लिए $\quad [x] = -1$

$0 \le x < 1$ के लिए $\quad [x] = 0$

$1 \le x < 2$ के लिए $\quad [x]=1$ इसी प्रकार आगे

फलन $f(x) = [x]$ का आलेख चित्र 25.11 में दिया गया है



चित्र 25.11

(i) आलेख से

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = 0, \ \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = 0,$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = 0$$

तथा $\quad f\left(\frac{1}{2}\right) = [0.5] = 0$

इसलिए $\quad \lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$

अत: $f(x)$, $x = \frac{1}{2}$ पर सतत है

(ii) $\quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 0, \ \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$

अत: $x = 1$ पर $f(x)$ का अस्तित्व नहीं है

टिप्पणी: फलन $f(x) = [x]$ को पग फलन भी कहते हैं।

उदाहरण 25.26. फलन $\frac{x-1}{(x+4)(x-5)}$ किन बिन्दुओं पर सतत है?

हल : $f(x) = \frac{x-1}{(x+4)(x-5)}$ दिया है

अंश में दिया फलन $(x-1)$ सतत है। हर में दिया फलन $(x+4)\,(x-5)$ भी सतत है।

लेकिन $f(x)$, $x = -4, 5$ पर परिभाषित नहीं है

फलन $f(x)$, बिन्दुओं $-4, 5$ को छोड़कर, जहाँ पर यह परिभाषित नहीं है, प्रांत के शेष सब बिन्दुओं पर सतत है।

देखें आपने कितना सीखा 25.5

1. (a) यदि $f(x) = 2x+1$ जब $x \ne 1$ तथा $f(x) = 3$ जब $x = 1$ दर्शाइए कि $x = 1$ पर $f(x)$ सतत है।

(b) यदि $f(x)=\begin{cases}4x+3, & x\neq 2\\ 3x+5, & x=2\end{cases}$, तो

ज्ञात कीजिए कि $x=2$ पर फलन f सतत है अथवा नहीं।

(c) ज्ञात कीजिए कि $x=2$ पर फलन $f(x)$ सतत है अथवा नहीं जहाँ,

$$f(x)=\begin{cases}4x+3, & x\leq 2\\ 8-x, & x>2\end{cases}$$

(d) $x=1$ पर फलन $f(x)$ के सांतत्य की जांच कीजिए, जहाँ

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leq 1\\ x+5, & x>1\end{cases}$$

(e) k का मान ज्ञात कीजिए जबकि फलन

$$f(x)=\begin{cases}kx^2, & x\leq 2\\ 3, & x>2\end{cases}$$ $x=2$ पर सतत है।

2. निम्न फलन के सांतत्य की जांच कीजिए :

(a) $x=2$ पर $f(x)=|x-2|$ (b) $x=-5$ पर $f(x)=|x+5|$

(c) $x=a$ पर $f(x)=|a-x|$

(d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-2|}{x-2}, & x\neq 2\\ 1, & x=2\end{cases}$, $x=2$ पर सतत है या नहीं जाँच कीजिए।

(e) दर्शाइए कि $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-a|}{x-a}, & x\neq a\\ 1, & x=a\end{cases}$, $x=a$ पर असतत है।

3. (a) यदि $f(x)=\begin{cases}\sin 4x, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$, $x=0$ पर, तो जाँच कीजिए कि $f(x)$ एक सतत फलन है या असतत।

(b) यदि $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 7x}{x}, & x\neq 0\\ 7, & x=0\end{cases}$, $x=0$ पर, तो जाँच कीजिए कि $f(x)$ एक सतत फलन है या असतत।

(c) a के किस मान के लिए फलन $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 5x}{3x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$, $x=0$ पर सतत है?

4. (a) दर्शाइए कि फलन $f(x), x=2$ पर सतत है, जहाँ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}, & x\neq 2 \text{ के लिए}\\ 3, & x=2 \text{ के लिए}\end{cases}$$

(b) $x=1$ पर फलन $f(x)$ के सांतत्य की जांच कीजिए, जहाँ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}, & x\neq 1 \text{ के लिए}\\ -2, & x=1 \text{ के लिए}\end{cases}$$

(c) k के किस मान के लिए निम्न फलन $x=1$ पर सतत है जहाँ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{जब } x\neq 1\\ k & \text{जब } x=1\end{cases}$$

(d) $x=2$ के लिए फलन $f(x)$ के सांतत्य की चर्चा कीजिए, जब

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2 \text{ के लिए}\\ 7, & x=2 \text{ के लिए}\end{cases}$$

5. (a) यदि $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ ज्ञात कीजिए कि $x=0$ पर, फलन f सतत है अथवा नहीं

(b) मूल बिन्दु पर फलन $f(x)$ के सांतत्य की जांच कीजिए :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

6. ज्ञात कीजिए कि $f(x)=[x]$ निम्न बिन्दु पर सतत है अथवा नहीं :

(a) $x=\dfrac{4}{3}$, (b) $x=3$ (c) $x=-1$ (d) $x=\dfrac{2}{3}$

7. किन बिन्दुओं पर निम्न स्थितियों में प्रत्येक फलन $f(x)$ सतत है?

(a) $f(x)=\dfrac{x+2}{(x-1)(x-4)}$ (b) $f(x)=\dfrac{x-5}{(x+2)(x-3)}$ (c) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2+5x-6}$

(d) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+5}{x^2-8x+16}$

आइये दोहराएँ

- यदि एक फलन $f(x)$, ℓ की ओर अग्रसर होता है जब x, a की ओर अग्रसर होता है, तो हम कहते हैं कि $f(x)$ की सीमा ℓ है

  संकेत में हम लिखते हैं कि $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

- यदि $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ तथा $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$ हो, तो

  (i) $\lim\limits_{x \to a} kf(x) = k \lim\limits_{x \to a} f(x) = k\ell$

  (ii) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell \pm m$

  (iii) $\lim\limits_{x \to a} [f(x)g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell m$

  (iv) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{\ell}{m}$, जबकि $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

- कुछ प्रसिद्ध फलनों की सीमाएँ

  (i) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$

  (ii) $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$

  (iii) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$

  (iv) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

  (v) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

  (vi) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(1 + x)}{x} = 1$

  (vii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

सहायक वेबसाइट

- *http://www.youtube.com/watch?v=HB8CzZEd4xw*
- *http://www.zweigmedia.com/RealWorld/Calcsumm3a.html*
- *http://www.intuitive-calculus.com/limits-and-continuity.html*

आइए अभ्यास करें

निम्नलिखित सीमाओं का मान ज्ञात कीजिए।

1. $\lim\limits_{x \to 1} 5$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{2}$

3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^3+1}$

4. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+2x}{x^3+x^2-2x}$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+k)^4-x^4}{k(k+2x)}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to-1}\left[\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2-1}\right]$

8. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(2x-3)\sqrt{x}-1}{(2x+3)(x-1)}$

9. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}$

10. $\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right]$

11. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$

12. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a^2}{x^2-a^2}$

निम्नलिखित फलनों की बायीं तथा दायीं सीमा ज्ञात कीजिए:

13. $f(x)=\begin{cases}-2x+3 \text{ if } x\le1\\ 3x-5 \text{ if } x>1\end{cases}$ as $x\to1$

14. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x+1|}$ as $x\to1$

निम्नलिखित सीमाओं का मान ज्ञात कीजिए:

15. $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{|x+1|}{x+1}$

16. $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{|x-2|}{x-2}$

17. $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x-2}{|x-2|}$

18. यदि $f(x)=\dfrac{(x+2)^2-4}{x}$, सिद्ध कीजिए कि $\lim\limits_{x\to0}f(x)=4$ यद्यपि f(0) परिभाषित नहीं है।

19. k का मान ज्ञात कीजिए यदि $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ परिभाषित है जहां $f(x)=\begin{cases}5x+2, x\le2\\ 2x+k, x>2\end{cases}$

20. मान ज्ञात कीजिए $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 7x}{2x}$

21. मान ज्ञात कीजिए $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}\right]$

22. मान ज्ञात कीजिए $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$

23. मान ज्ञात कीजिए $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x+3x}{2x+\sin 3x}$

24. मान ज्ञात कीजिए $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$

25. मान ज्ञात कीजिए $\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\sin 5\theta}{\tan 8\theta}$

निम्नलिखित सांत्यता का परीक्षण कीजिए:

26. $f(x)\begin{cases}1+3x \text{ if } x>-1\\ 2 \text{ if } x\le -1\end{cases}$ $x=-1$ पर

27. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-x, 0<x<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}, x=\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}-x, \frac{1}{2}<x<1\end{cases}$ $x=\frac{1}{2}$ पर

28. k के किस मान के लिए फलन

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-16}{x-4} & \text{यदि } x\ne 4\\ k & \text{यदि } x=4\end{cases}$$ $x=4$ पर सतत है ?

29. निम्न फलनों के लिए असतत होने के बिन्दु ज्ञात कीजिए :

(a) $\frac{x^2+3}{x^2+x+1}$ (b) $\frac{4x^2+3x+5}{x^2-2x+1}$

(b) $\frac{x^2+x+1}{x^2-3x+1}$ (d) $f(x)=\begin{cases}x^4-16, & x\ne 2\\ 16, & x=2\end{cases}$

30. दर्शाइए कि फलन $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}+\cos, & x\ne 0\\ 2, & x=0\end{cases}$ $x=0$ पर सतत है

31. 'a' का मान ज्ञात कीजिए कि फलन $f(x)$ जो निम्न द्वारा परिभाषित है

$$f(x)=\begin{cases}\frac{a\cos x}{\pi-2x}, & x\ne\frac{\pi}{2}\\ 5, & x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$ सतत है।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 25.1

1. (a) 17 (b) 7 (c) 0 (d) 2
(e) - 4 (f) 8

2. (a) 0 (b) $\frac{3}{2}$ (c) $-\frac{2}{11}$ (d) $\frac{q}{b}$ (e) 6
(f) -10 (g) 3 (h) 2

3. (a) 3 (b) $\frac{7}{2}$ (c) 4 (d) $\frac{1}{2}$

4. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (c) $\frac{1}{2\sqrt{6}}$ (d) 2 (e) -1

5. (a) अस्तित्व नहीं है (b) अस्तित्व नहीं है

6. (a) 0 (b) $\frac{1}{4}$ (c) अस्तित्व नहीं है

7. (a) $1, -2$ (b) 1 (c) 19

8. $a = -2$

10. अस्तित्व नहीं है

देखें आपने कितना सीखा 25.2

1. (a) 2 (b) $\frac{e^2-1}{e^2+1}$

2. (a) $-\frac{1}{e}$ (b) $-e$

3. (a) 2 (b) $\frac{1}{5}$ (c) 0 (d) $\frac{a}{b}$

4. (a) $\frac{1}{2}$ (b) 0 (c) 4 (d) $\frac{2}{3}$

5. (a) $\frac{a^2}{b^2}$ (b) 2 (c) $\frac{1}{2}$

6. (a) 1 (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) 0

7. (a) $\frac{5}{3}$ (b) $\frac{7}{4}$ (c) -5

देखें आपने कितना सीखा 25.3

1. (a) सतत (b) सतत
   (c) सतत (d) सतत

5. (a) $p = 3$ (b) $a = 4$ (c) $b = \frac{14}{9}$

देखें आपने कितना सीखा 25.4

2. (a) सतत
   (b) $x = 2$ पर असतत
   (c) $x = -3$ पर असतत
   (d) $x = 4$ पर असतत

देखें आपने कितना सीखा 25.5

1. (b) सतत (c) असतत

   (d) असतत (e) $k = \frac{3}{4}$

2 (a) सतत (b) सतत (c) सतत

   (d) असतत (e) असतत

3 (a) असतत (b) सतत (c) $\frac{5}{3}$

4 (b) सतत (c) $k = 2$

   (d) असतत

5. (a) असतत (b) असतत

6 (a) सतत (b) असतत

   (c) असतत (d) सतत

7. (a) 1 तथा 4 को छोडकर सभी वास्तविक संख्याएँ

   (b) -2 तथा 3 को छोडकर सभी वास्तविक संख्याएँ

   (c) -6 तथा 1 को छोडकर सभी वास्तविक संख्याएँ

   (d) 4 को छोडकर सभी वास्तविक संख्याएँ

आइये अभ्यास करें

1. 5 2. $\sqrt{2}$ 3. 4 4. $-\frac{1}{3}$

5. $2x^2$ 6. 1 7. $-\frac{1}{2}$ 8. $-\frac{1}{10}$

9. -8 10. $\frac{1}{2}$

11. 1 12. $\frac{a-1}{2a}$

13. $1, -2$ 14. $-2, 2$

15. -1 16. 1

17. -1 19. $k = 8$

20. $\frac{7}{2}$ 21. 1

22. $\frac{9}{2}$ 23. 1

24. $\frac{2}{\pi}$ 25. $\frac{5}{8}$

26. असतत

27. असतत

28. $k = 8$

29. (a) नहीं (b) $x = 1$

(c) $x = 1,\ x = 2$ (d) $x = 2$

31. 10