26

अवकलन

अवकल गणित (Differential Calculus) का उदगम संभवत: 1665 अथवा 1666 ई. में हुआ था जब आइसाक न्यूटन (Issac Newton) ने सबसे पहले उस प्रक्रिया की विचारोत्पत्ति (Conceived) की जिसे हम आजकल अवकलन (एक गणितीय प्रक्रिया के द्वारा मिलने वाला परिणाम) कहते हैं। न्यूटन तथा लेबनिज़ के आविष्कारों में, दूसरे अनेक परिणामों के साथ-साथ, संयुक्त फलनों के योग, गुणन तथा विभाजन के अवकलन करने के नियम हैं।

इस पाठ में हम एक फलन के अवकलज को परिभाषित करेंगे, उसकी ज्यामितीय तथा भौतिक व्याख्या करेंगें, अवकलजों के विभिन्न नियमों की चर्चा करेगें तथा फलनों के द्वितीय कोटि के अवकलजों की अवधारणा को भी आरम्भ करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- किसी फलन $f(x)$ के अवकलज को $x=a$ पर परिभाषित करना तथा उसकी ज्यामितीय व्याख्या भी करना।
- सिद्ध करना कि किसी स्थिर फलन का अवकलन शून्य होता है।
- $f(x)=x^n$ का अवकलज प्रथम सिद्धान्त से ज्ञात करना, जबकि $n \in Q$ तथा उसका प्रयोग अन्य फलनों के अवकलज ज्ञात करने में करना।
- दो फलनों के गुणन तथा भाग द्वारा प्राप्त फलन के अवकलज ज्ञात करने के नियमों को बता कर उनका प्रयोग करना।
- श्रंखला नियम को बताकर उसका अवकलज ज्ञात करने में प्रयोग करना।
- बीजीय फलनों (परिमेय फलनों सहित) का अवकलज ज्ञात करना, तथा
- एक फलन का द्वितीय कोटि का अवकलज (second order derivative) ज्ञात करना।

पूर्व ज्ञान

- बहुपद प्रमेय
- फलन तथा उनके आलेख
- एक फलन की सीमा की परिकल्पना

26.1 किसी फलन का अवकलज

फलन $y=x^2$ पर विचार कीजिए तथा मान लीजिए कि इस के आलेख पर एक बिन्दु (5,25) है। यदि x का मान 5 से 5.1, 5.01, 5.001..आदि बदलता है तो y, 25 से 26.01,25.1001, 25.010001... हो जाता है। x में होने वाला एक छोटा सा परिवर्तन y के मान में भी थोड़ा सा परिवर्तन कर देता है। हम x में परिवर्तन को δx से तथा उसके संगत y के परिवर्तन को δy द्वारा व्यक्त करते हैं। यह मानकर कि यह वृद्धि धनात्मक अथवा ऋणात्मक है इन परिवर्तनों का अनुपात $\frac{\delta y}{\delta x}$ को वृद्धि अनुपात कहते हैं। यहाँ $y=x^2$ के (5,25) पर, तथा वृद्धि $\delta x = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, \ldots\ldots$ तथा $\delta y = 1.01, .1001, .010001, .00100001$ आदि लेने पर हमें नीचे दी गई तालिका प्राप्त होती है :

x	5.1	5.01	5.001	5.0001
δx	.1	.01	.001	.0001
y	26.01	25.1001	25.010001	25.00100001
δy	1.01	.1001	.010001	.00100001
$\frac{\delta y}{\delta x}$	10.1	10.01	10.001	10.0001

उपरोक्त तालिका से हम निम्नलिखित निरीक्षण करते हैं :

(i) जब δx बदलता है, तो δy बदलता है

(ii) जब $\delta y \to 0$ तो, $\delta x \to 0$.

(iii) अनुपात $\frac{\delta y}{\delta x}$ संख्या 10 की ओर अग्रसर होता है।

इस प्रकार इस उदाहरण से पता चलता है कि $\delta y \to 0$ जब $\delta x \to 0$ लेकिन $\frac{\delta y}{\delta x}$ एक सीमित संख्या बन जाता है यह आवश्यक नहीं कि वह शून्य हो। सीमा $\lim\limits_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$ को संगतता में $\frac{dy}{dx}$ द्वारा निरुपित करते हैं। $\frac{dy}{dx}$ को y का x के सापेक्ष अवकलज (derivative) कहते हैं तथा उसे x के सापेक्ष y का **अवकल गुणांक** (differential co-efficient) पढ़ा जाता है।

दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि $\lim\limits_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx} = 10$ (उपरोक्त उदाहरण में) है। याद रखिए कि जबकि δx तथा δy बहुत छोटी–छोटी संख्याएँ (वृद्धि) हैं, तो भी अनुपात $\frac{\delta y}{\delta x}$ एक निश्चित संख्या 10 है।

व्यापक रूप से मान लीजिए कि

$$y = f(x) \qquad .....(i)$$

एक फलन है। इसका अवकलज ज्ञात करने के लिए मान लीजिए कि x के मान में δx एक छोटा सा परिवर्तन है, तब x का मान $x+\delta x$ हो जायेगा, जहाँ $f(x)$ परिभाषित है। इसी प्रकार y के मान में भी संगत परिवर्तन δy है और तब y का मान $y+\delta y$ हो जायेगा।

इस प्रकार
$$y+\delta y = f(x+\delta x) \qquad ...(ii)$$

$$\therefore \quad (y+\delta y)-y=f(x+\delta x)-f(x)$$

$$\delta y=f(x+\delta x)-f(x) \qquad \text{...(iii)}$$

परिवर्तन की दर ज्ञात करने के लिए हम (iii) को δx से भाग करते हैं।

$$\therefore \quad \frac{\delta y}{\delta x}=\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x} \qquad \text{...(iv)}$$

अन्त में हम अनुपात $\frac{\delta y}{\delta x}$ का सीमांत मान लेते हैं जब $\delta x \to 0$.

यदि
$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x} \qquad \text{...(v)}$$

एक सीमित संख्या है तो $f(x)$ एक अवकलनीय फलन कहलाता है तथा सीमांत मान को $f(x)$ का x के सापेक्ष अवकलज कहा जाता है तथा इसे संकेत $f'(x)$ द्वारा लिखा जाता है।

दूसरे शब्दों में $\frac{d}{dx}f(x)$ अथवा $\frac{dy}{dx}$ (जिसे y का $\frac{d}{dx}$) पढ़ा जाता है।

अत:
$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}=f'(x)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)$$

टिप्पणी

(1) समीकरण (v) द्वारा निरुपित सीमांत प्रक्रिया एक गणितीय संक्रिया है। इस प्रक्रिया को अवकलन कहा जाता है तथा इसके परिणाम को अवकलज कहते हैं।

(2) एक फलन, जिसका किसी बिन्दु पर अवकलज का अस्तित्व है, उसे अवकलनीय फलन कहते हैं।

(3) इस बात को सत्यापित किया जा सकता है कि यदि $f(x)$ किसी बिन्दु $x=a$ पर अवकलनीय है, तो वह उस बिन्दु पर सतत भी है यद्यपि यह आवश्यक नहीं कि इसका विलोम सत्य हो।

(4) संकेत δx के स्थान पर Δx अथवा h का भी उपयोग किया जाता है।

अर्थात, $\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ अथवा $\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ है।

(5) यदि $y=f(x)$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ को y_1 अथवा y' द्वारा भी निरुपित किया जाता है।

26.2 वेग एक सीमान्त

मान लीजिए कि कि एक कण, जो आरम्भ में O पर स्थिर है, एक सरल रेखा OP पर गतिमान है। इस कण द्वारा P बिन्दु तक पहुँचने में तय की गई दूरी समय t का फलन है।

चित्र 21.1

हम दूरी OP को लिख सकते हैं, $OP = s = f(t)$

इसी प्रकार यदि P के समीप एक बिन्दु Q तक पहुँचने की दूरी δs तथा समय δt हो तो

$$OQ = OP + PQ$$
$$= s + \delta s$$
$$= f(t + \delta t) \qquad ...(ii)$$

कण का समय अन्तराल δt में औसत वेग

$$= \frac{\text{दूरी में परिवर्तन}}{\text{समय में परिवर्तन}}$$

$$= \frac{(s+\delta s) - s}{(t+\delta t) - t} \qquad \text{(i) और (ii) द्वारा}$$

$$= \frac{f(t+\delta t) - f(t)}{\delta t}$$

अब हम P के समीप छोटे अन्तराल में औसत वेग ज्ञात करने के लिए δt को और छोटा बना लेते हैं। औसत वेग का सीमांत मान जबकि $\delta t \to 0$ (P बिन्दु पर) किसी समय t पर कण का तात्क्षणिक वेग कहलाता है।

$$\therefore \qquad \text{समय } t \text{ पर वेग} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{f(t+\delta t) - f(t)}{\delta t}$$

इसे $\frac{ds}{dt}$ द्वारा निरूपित किया जाता है।

अतः यदि किसी गतिमान कण द्वारा समय t पर तय की गई दूरी f(t) है तो $t = t_0$ पर f_1 का अवकलज बिन्दु P पर तात्क्षणिक अर्थात् समय $t = t_0$ पर वेग निरूपित करता है।

इसको **किसी फलन का एक बिन्दु पर अवकलज का भौतिक प्रदर्शन भी कहा जाता है।**

टिप्पणी : अवकलज $\frac{dy}{dx}$, y की x के सापेक्ष तात्क्षणिक परिवर्तन दर को व्यक्त करता है।

उदाहरण 26.1. एक कार द्वारा समय t सेकंड में तय की गयी 's' मी दूरी निम्नलिखित सम्बन्ध द्वारा परिभाषित है :

$$s = 3t^2$$

समय t = 4 सेकण्ड पर कार का वेग ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $\quad f(t) = s = 3t^2$

$$\therefore \qquad f(t+\delta t) = s + \delta s = 3(t+\delta t)^2$$

$$\text{किसी समय } t \text{ पर कार का वेग} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{f(t+\delta t) - f(t)}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{3(t+\delta t)^2 - 3t^2}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{3(t^2 + 2t.\delta t + \delta t^2) - 3t^2}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} (6t + 3\delta t) = 6t$$

$\therefore t = 4$ सेकण्ड पर कार का वेग $= (6 \times 4)$ मी/सेकण्ड

$= 6 \times 4 = 24$ मी/सेकण्ड

देखें आपने कितना सीखा 26.1

1. किसी सरल रेखा में गतिमान कणों का वेग दिये गए समय–दूरी सम्बन्धों से t के इंगित मानों पर ज्ञात कीजिए :

   (a) $s = 2 + 3t; t = \frac{1}{3}.$ (b) $s = 8t - 7; t = 4.$

   (c) $s = t^2 + 3t; t = \frac{3}{2}.$ (d) $s = 7t^2 - 4t + 1; t = \frac{5}{2}.$

2. एक सरल रेखा में गतिमान एक कण द्वारा t सेकण्ड में तय की गयी दूरी s मी की दूरी $s = t^4 - 18t^2$ द्वारा प्रदर्शित की गई है। $t = 10$ सेकण्ड पर गति ज्ञात कीजिए

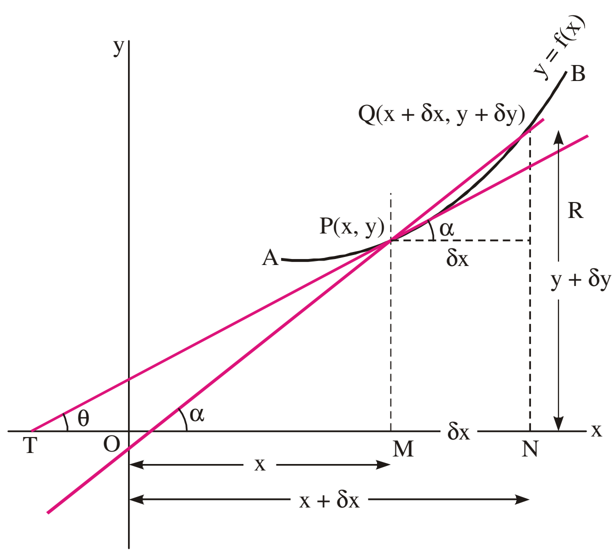
3. एक कण एक क्षैतिज रेखा में गतिमान है। इसकी एक स्थिर बिन्दु 0 से t सेकण्ड में दूरी s नीचे दिए गये संबंध द्वारा परिभाषित है :

$$s = 10 - t^2 + t^3$$

   3 सेकण्ड के अन्त में कण की तात्क्षणिक गति ज्ञात कीजिए।

26.3 dy/dx का ज्यामितीय अर्थ

मान लीजिए कि $y = f(x)$ एक x का सतत फलन है। आइये, इस फलन का ग्राफ खींचें। मान लीजिए कि APQB इसका ग्राफीय निरूपण है।



चित्र 21.2

मान लीजिए कि $y = f(x)$ पर एक बिन्दु P (x,y) है। मान लीजिए कि P के समीप ही दूसरा बिन्दु $Q(x+\delta x, y+\delta y)$ है। PM और QN, x–अक्ष पर लम्ब डालें और PR x–अक्ष के समान्तर खींचे ताकि PR, QN को R पर काटे। QP को मिलायें तथा इसे बिन्दु S तक बढ़ायें । मान लीजिए कि प्रतिछेदी रेखा QPS घनात्मक x–अक्ष के साथ माना कि α कोण बनाती है। बिन्दु P पर वक्र की PT स्पर्श रेखा खीचें जो कि x–अक्ष के साथ θ कोण बनाती है। त्रिभुज QPR में $\angle QPR = \alpha$

$$\tan\alpha = \frac{QR}{PR} = \frac{QN-RN}{MN} = \frac{QN-PM}{ON-OM} = \frac{(y+\delta y)-y}{(x+\delta x)-x} = \frac{\delta y}{\delta x} \qquad \text{(i)}$$

अब मान लीजिए कि बिन्दु Q वक्र पर बिन्दु P की ओर P के समीप और समीप जाता है। इस प्रकार जब $Q \to P$ तब $\delta x \to 0$, $\delta y \to 0$,

$$\alpha \to 0, (\tan\alpha \to \tan\theta)$$

और परिणाम स्वरूप छेदक रेखा QPR स्पर्श रेखा PT के साथ संपाती होने के लिए प्रवृत होती है।

(i) से $\qquad \tan\alpha = \dfrac{\delta y}{\delta x}$

सीमांत स्थिति में, $\qquad \displaystyle\lim_{\substack{\delta x\to 0\\ \delta y\to 0\\ \alpha\to\theta}} \tan\alpha = \lim_{\delta x\to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$

$$\therefore \qquad \tan\theta = \frac{dy}{dx} \qquad \text{...(ii)}$$

इस प्रकार $\dfrac{dy}{dx}$, जो कि $y = f(x)$ का वक्र के किसी बिन्दु P (x,y) पर अवकलज है, बिन्दु P पर स्पर्श रेखा के ढलान या प्रवणता को निरूपित करता है।

इसे $\dfrac{dy}{dx}$ का ज्यामितीय प्रदर्शन कहा जाता है।

यह बात याद रखें कि वक्र के विभिन्न बिन्दुओं पर $\dfrac{dy}{dx}$ के मान भिन्न भिन्न होते हैं।

इसलिए किसी विशेष बिन्दु पर वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात करने के लिए $y = f(x)$ समीकरण से $\dfrac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए और $\dfrac{dy}{dx}$ में बिन्दु के निर्देशांक का मान प्रतिस्थापित कीजिए।

उपप्रमेय 1

यदि वक्र के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है। तो $\theta = 0°$ या $180°$, $\dfrac{dy}{dx} = \tan 0°$ या $\tan 180° = 0$ अर्थात $\dfrac{dy}{dx} = 0$

अतः $y = f(x)$ के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है

उपप्रमेय 2

यदि वक्र के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा, x अक्ष के लम्बवत हो तो $\theta = 90°$, $\frac{dy}{dx} = \tan 90° = \infty$

अत: $y = f(x)$ के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा y-अक्ष के समान्तर है।

26.4 अचर फलन का अवकलज

कथन : एक अचर का अवकलज शून्य होता है

उपपत्ति : $y = c$ एक अचर फलन है।

या $$y = cx^0 \qquad [\because x^0 = 1] \qquad ..(i)$$

मान लीजिए कि x में एक छोटी सी वृद्धि δx होती है तथा y में उसके संगत वृद्धि δy होती है ताकि

$$y + \delta y = c(x + \delta x)^0 \qquad ..(ii)$$

(ii) में से (i) को घटाने पर

$$(y + \delta y) - y = c(x + \delta x)^0 - cx^0, \qquad (\because x^0 = 1)$$

$$\delta y = c - c$$

$$\delta y = 0$$

δx से भाग करने पर $$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{0}{\delta x}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 0$$

$\delta x \to 0$ सीमांत लेते हुए $$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

अथवा $$\frac{dc}{dx} = 0$$

यह सिद्ध करता है कि किसी अचर की परिवर्तन दर शून्य है। इसलिए एक अचर का अवकलज शून्य है।

26.5 किसी फलन का प्रथम सिद्धान्त से अवकलन

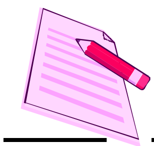
किसी फलन के एक बिन्दु पर अवकलज की परिभाषा का स्मरण करने से, हमें किसी फलन का प्रथम सिद्धान्त से अवकलज ज्ञात करने के लिए निम्न कार्यकारी नियम प्राप्त होता है।

चरण I : दिए गए फलन को $y = f(x)$ के रूप में लिखिए ....(i)

चरण II : मान लीजिए कि x में छोटा परिवर्तन δx है तथा y में संगत परिवर्तन δy है। इस प्रकार

$$y + \delta y = f(x + \delta x) \qquad ....(ii)$$

चरण III : (i) को (ii) में से घटाने पर हमें मिलता है



टिप्पणी

$$\delta y = f(x+\delta x) - f(x) \qquad \text{..(iii)}$$

चरण IV : (iii) के परिणाम को δx से भाग देने पर, हमें मिलता है

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$$

चरण V : जब $\delta x \to 0$ तो उपरोक्त की सीमा लेने पर

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$$

टिप्पणी:

प्रथम सिद्धान्त से फलनों का अवकलज ज्ञात करने को **डेल्टा विधि** अथवा आदित: अवकलन विधि भी कहते हैं।

अब हम कुछ मानक फलनों के अवकलज प्रथम सिद्धान्त से ज्ञात करेंगे।

कुछ फलनों के प्रथम सिद्धान्त द्वारा अवकलज

मान लीजिए कि $\qquad y = x^n \qquad$ .....(i)

x में एक छोटी बढ़ोत्तरी δx के लिए मान लीजिए कि y में संगत बढ़ोत्तरी δy है

तब $\qquad y + \delta y = (x+\delta x)^n \qquad$ ...(ii)

(i) को (ii) में से घटाने पर

$$(y+\delta y) - y = (x+\delta x)^n - x^n$$

$$\therefore \qquad \delta y = x^n\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^n - x^n$$

$$= x^n\left[\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^n - 1\right]$$

क्योंकि δx, x की तुलना में बहुत छोटा है, $\frac{\delta x}{x} < 1$, अत: हम $\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^n$ का किसी घातांक के लिए द्विपद प्रमेय द्वारा प्रसार लिख सकते हैं।

$\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^n$ को द्विपद प्रमेय द्वारा प्रसारित करने पर

$$\delta y = x^n\left[1 + n\left(\frac{\delta x}{x}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{\delta x}{x}\right)^3 + \ldots - 1\right]$$

$$= x^n(\delta x)\left[\frac{n}{x} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\delta x}{x^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{(\delta x)^2}{x^3} + \ldots\right]$$

उपरोक्त को δx से भाग देने पर हमें मिलता है :

$$\frac{\delta y}{\delta x} = x^n \left[\frac{n}{x} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{\delta x}{x^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{(\delta x)^2}{x^3} + \dots \right]$$

जब $\delta x \to 0$ तथा $(\delta x)^2$ तथा उससे बड़ी घातें भी शून्य की ओर अग्रसर होती हैं, उपरोक्त की सीमा लेने पर

$$\therefore \qquad \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} x^n \left[\frac{n}{x} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{\delta x}{x^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{(\delta x)^2}{x^3} + \dots \right]$$

अथवा $\displaystyle \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx} = x^n \left[\frac{n}{x} + 0 + 0 + \dots \right]$

अथवा $\displaystyle \frac{dy}{dx} = x^n \cdot \frac{n}{x} = nx^{n-1}$

अतएव $\displaystyle \mathbf{\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1},} \qquad \left[\because \ y = x^n \right]$

इसको न्यूटन का पावर-फार्मूला **(Power Formula)** अथवा पावर नियम **(Power Rule)** कहते हैं।

टिप्पणी : इस सूत्र का प्रयोग करके हम $x, x^2, x^3, \dots$ आदि फलनों अर्थात जब $n = 1,2,3,\dots$ हैं का अवकलन ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण के लिए $\displaystyle \frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx} x^1 = 1x^{1-1} = 1x^0 = 1.1 = 1$

$$\frac{d}{dx} x^2 = 2x^{2-1} = 2x$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\right) = 3x^{3-1} = 3x^2$$

उदाहरण 26.2. निम्नलिखित में से प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) x^{10} (ii) x^{50} (iii) x^{91}

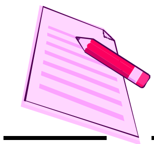
हल : (i) $\displaystyle \frac{d}{dx}\left(x^{10}\right) = 10x^{10-1} = 10x^9$

(ii) $\displaystyle \frac{d}{dx}\left(x^{50}\right) = 50x^{50-1} = 50x^{49}$

(iii) $\displaystyle \frac{d}{dx}\left(x^{91}\right) = 91x^{91-1} = 91x^{90}$

अत: $\displaystyle \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^{1/2}}$ अथवा $\displaystyle \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

अब हम कुछ सरल फलनों का अवकलज परिभाषित अथवा प्रथम सिद्धान्त से करेंगे।



उदाहरण 26.3. x^2 का प्रथम सिद्धान्त से अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए $y = x^2$ .....(i)

x में एक छोटी बढ़ोतरी δx से y में संगत बढ़ोतरी δy है

$$y + \delta y = (x + \delta x)^2 \quad .....(ii)$$

(ii) में से (i) घटाने पर, हमें मिलता है :

$$(y + \delta y) - y = (x + \delta x)^2 - x^2$$

अथवा $$\delta y = x^2 + 2x(\delta x) + (\delta x)^2 - x^2$$

अथवा $$\delta y = 2x(\delta x) + (\delta x)^2$$

उपरोक्त को δx से भाग देने पर, हमें मिलता है :

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 2x + \delta x$$

सीमा लेने पर हमें मिलता है :

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} (2x + \delta x)$$

अर्थात $$\frac{dy}{dx} = 2x + \lim_{\delta x \to 0} (\delta x)$$

$$= 2x + 0$$

$$= 2x$$

अतएव, $$\frac{dy}{dx} = 2x \quad \text{अथवा} \quad \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

उदाहरण 26.4. $\sqrt{x}$ का प्रथम सिद्धान्त से अवकलज कीजिए ।

हल : मान लीजिए $y = \sqrt{x}$ ..(i)

x में एक छोटी बढ़ोतरी δx के लिए मान लीजिए कि y में संगत बढ़ोतरी δy है

$\therefore$ $$y + \delta y = \sqrt{x + \delta x} \quad ...(ii)$$

(ii) में से (i) घटाने पर, हमें मिलता है

$$(y + \delta y) - y = \sqrt{x + \delta x} - \sqrt{x}$$

अथवा $$\delta y = \sqrt{x + \delta x} - \sqrt{x}$$

(iii) के दायें पक्ष के अंश का परिमेयकरण करने पर मिलता है

$$\delta y = \frac{\sqrt{x + \delta x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x + \delta x} + \sqrt{x}}\left(\sqrt{x + \delta x} + \sqrt{x}\right)$$

$$= \frac{(x + \delta x) - x}{\left(\sqrt{x + \delta x} + \sqrt{x}\right)} \quad \text{अथवा} \quad \delta y = \frac{\delta x}{\sqrt{x + \delta x} + \sqrt{x}}$$

δx से भाग देने पर हमें मिलता है

$$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\delta x}+\sqrt{x}}$$

सीमा लेने पर हमें मिलता है

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{x+\delta x}+\sqrt{x}}\right]$$

अथवा $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} \qquad$ अथवा $\qquad \dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

उदाहरण 26.5. यदि $f(x)$ एक अवकलनीय फलन है तथा c एक अचर है तो $\phi(x)=cf(x)$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : हमें फलन $\phi(x)=cf(x)$ ......(i) का अवकलज ज्ञात करना है

x में एक छोटी बढ़ोतरी δx के लिए, मान लीजिए कि संगत फलन $\phi(x)$ का मान $\phi(x+\delta x)$ तथा $f(x)$ का मान $f(x+\delta x)$ है।

$$\therefore \qquad \phi(x+\delta x)=cf(x+\delta x) \qquad ...(ii)$$

(ii) में से (i) घटाने पर हमें मिलता है

$$\phi(x+\delta x)-\phi(x)=c\left[f(x+\delta x)-f(x)\right]$$

उपरोक्त को δx से भाग देने पर हमें मिलता है

$$\frac{\phi(x+\delta x)-\phi(x)}{\delta x}=c\left[\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}\right]$$

सीमा लेने पर हमें मिलता है

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\phi(x+\delta x)-\phi(x)}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}c\left[\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}\right]$$

अथवा $$\phi'(x)=c\lim_{\delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}\right]$$

अथवा $$\phi'(x)=cf'(x)$$

अतः $$\frac{d}{dx}\left[cf(x)\right]=c\cdot\frac{d}{dx}(f(x))$$

देखें आपने कितना सीखा 26.2

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का डेल्टा विधि से अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) $10x$ (b) $2x+3$ (c) $3x^2$

   (d) x^2+5x (e) $7x^3$

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन को प्रथम सिद्धान्त से अवकलित कीजिए :

(a) $\frac{1}{x}, x \neq 0$ (b) $\frac{1}{ax}, x \neq 0$ (c) $x + \frac{1}{x}, x \neq 0$

(d) $\frac{1}{ax+b}, x \neq \frac{-b}{a}$ (e) $\frac{ax+b}{cx+d}, x \neq \frac{-d}{c}$ (f) $\frac{x+2}{3x+5}, x \neq \frac{-5}{3}$

3. निम्नलिखित में से प्रत्येक का प्रथम सिद्धान्त से अवकलज ज्ञात कीजिए :

(a) $\frac{1}{\sqrt{x}}, x \neq 0$ (b) $\frac{1}{\sqrt{ax+b}}, x \neq \frac{-b}{a}$ (c) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}, x \neq 0$

(d) $\frac{1+x}{1-x}, x \neq 1$

4. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का डेल्टा विधि से अवकलज ज्ञात कीजिए :

(a) $f(x) = 3\sqrt{x}$ । $f'(2)$ भी ज्ञात कीजिए। (b) $f(r) = \pi r^2$ । $f(2)$ भी ज्ञात कीजिए।

(c) $f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ । $f'(3)$ भी ज्ञात कीजिए।

26.6 अवकलजों का बीजगणित

बहुत से फलन दूसरे फलनों के संयोजन से बनते हैं। संयोजन फलनों के योग, अन्तर, गुणन अथवा भाग द्वारा बने हो सकते हैं। हमें कभी-कभी ऐसी परिस्थिति भी मिलती है जहाँ एक फलन का फलन दूसरे फलन के रूप में व्यक्त होता है।

ऐसी परिस्थितयों में अवकलज को एक अच्छा औजार (tool) बनाने के लिए, हमें योग, अन्तर, गुणन, भाग तथा फलनों के फलन के अवकलजों के नियम बनाने आवश्यक हैं। ऐसे नियम हमें बहुपदों, बीजीय (परिमेय सहित) फलनों के अवकलज ज्ञात करने में सहायक होगें।

26.7 फलनों के योग तथा अन्तर का अवकलज

यदि $f(x)$ तथा $g(x)$ दोनों अवकलनीय फलन हैं तथा $h(x) = f(x) + g(x)$ तो $h'(x)$ क्या होगा?

मान लीजिए कि δx, x में एक छोटी बढ़ोतरी है तथा δy, y में संगत छोटी बढ़ोतरी है।

$\therefore$ $$h(x+\delta x) = f(x+\delta x) + g(x+\delta x)$$

अत: $$h'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{[f(x+\delta x)+g(x+\delta x)]-[f(x)+g(x)]}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{[f(x+\delta x)-f(x)]+[g(x+\delta x)-g(x)]}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x} + \frac{g(x+\delta x)-g(x)}{\delta x}\right]$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x} + \lim_{\delta x \to 0} \frac{g(x+\delta x)-g(x)}{\delta x}$$

अथवा $$h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

अतः हम देखते हैं कि दो फलनों के योग का अवकलज उनके अवकलजों के योग के बराबर होता है। इसे योग का नियम कहते हैं।

उदाहरणतया $\quad y = x^2 + x^3$

तो $\quad y' = \frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(x^3\right)$

$\quad = 2x + 3x^2$

इस प्रकार $\quad y' = 2x + 3x^2$

इस योग नियम से हम अन्तर नियम भी सरलता से ज्ञात कर सकते हैं।

क्योंकि यदि $h(x) = f(x) - g(x)$ है।

तो $\quad h(x) = f(x) + \left[-g(x)\right]$

$\therefore \quad h'(x) = f'(x) + \left[-g'(x)\right]$

$\quad = f'(x) - g'(x)$

अर्थात दो फलनों के अन्तर का अवकलज उनके अवकलजों के अन्तर के बराबर होता है। इसे अन्तर नियम कहा जाता है।

इस प्रकार हम प्राप्त करते हैं :

योग नियम : $\quad \frac{d}{dx}\left[f(x) + g(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[f(x)\right] + \frac{d}{dx}\left[g(x)\right]$

अन्तर नियम : $\quad \frac{d}{dx}\left[f(x) - g(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[f(x)\right] - \frac{d}{dx}\left[g(x)\right]$

उदाहरण 26.6. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $\quad y = 10t^2 + 20t^3$

(ii) $\quad y = x^3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$

हल : (i) हमें दिया है $\quad y = 10t^2 + 20t^3$

$\therefore \quad \frac{dy}{dt} = 10(2t) + 20\left(3t^2\right)$

$\quad = 20t + 60t^2$

(ii) $\quad y = x^3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \qquad x \neq 0$

$\quad = x^3 + x^{-2} - x^{-1}$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 + (-2)x^{-3} - (-1)x^{-2} = 3x^2 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2}$

उदाहरण 26.7. इंगित मानों पर निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन के अवकलज का मान ज्ञात कीजिए:

$y = x^3 + 3x^2 + 4x + 5, \; x = 1$

हल : हमें दिया है $\quad y = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[x^3 + 3x^2 + 4x + 5\right] = 3x^2 + 6x + 4$$

$$\therefore \quad \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} = 3(1)^2 + 6(1) + 4 = 13$$

देखें आपने कितना सीखा 26.3

1. y' ज्ञात कीजिए :

   (a) $y = 12$ $\qquad$ (b) $y = 12x$ $\qquad$ (c) $y = 12\,x + 12$

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) $f(x) = 20x^9 + 5x$ $\qquad$ (b) $f(x) = -50x^4 - 20x^2 + 4$

   (c) $f(x) = 4x^3 - 9 - 6x^2$ $\qquad$ (d) $f(x) = \frac{5}{9}x^9 + 3x$

   (e) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - \frac{2}{5}$ $\qquad$ (f) $f(x) = \frac{x^8}{8} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} - 2$

   (g) $f(x) = \frac{2}{5}x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{-4}{5}} + \frac{3}{x^2}$ $\qquad$ (h) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

3. (a) यदि $f(x) = 16x + 2$ तो $f'(0), f'(3), f'(8)$ ज्ञात कीजिए।

   (b) यदि $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 16$ तो $f'(-1), f'(0), f'(1)$ ज्ञात कीजिए।

   (c) यदि $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{7}x^7 + 2x - 5$, तो $f'(-2)$ ज्ञात कीजिए।

   (d) दिया है कि $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $\frac{dV}{dr}$ ज्ञात कीजिए तथा $\left.\frac{dV}{dr}\right]_{r=2}$ ज्ञात कीजिए।

26.8 फलनों के गुणन का अवकलज

आप अंक गणित की चार मूल संक्रियाओं: योग, अन्तर (व्यवकलन) गुणा तथा भाग के विषय में जानते हैं। अभी तक हमने योग तथा अन्तर के नियमों की चर्चा की। आइए अब हम दो फलनों के गुणन से बने फलन का अवकलज ज्ञात करें।

फलन $y = (x^2 + 1)^2$ पर विचार कीजिए।

इसको हम निम्न प्रकार से लिख सकते हैं

$$y = (x^2+1)(x^2+1)$$

ऐसी परिस्थिति में हमें अवकलज ज्ञात करने की विधि ज्ञात करने की आवश्यकता है।

मान लीजिए कि x में बढ़ोतरी δx तथा y में संगत बढ़ोतरी δy है तब

$$y+\delta y = [(x+\delta x)^2+1][(x+\delta x)^2+1)]$$

$$\Rightarrow \qquad \delta y = [(x+\delta x)^2+1][(x+\delta x)^2+1)] - (x^2+1)(x^2+1)$$

$$= \left[(x+\delta x)^2+1\right]\left[(x+\delta x)^2 - x^2 + x^2 + 1\right] - \left(x^2+1\right)\left(x^2+1\right)$$

$$= [(x+\delta x)^2+1][(x+\delta x)^2 - x^2)] + (x^2+1)[(x+\delta x)^2+1] - (x^2+1)(x^2+1)$$

$$= [(x+\delta x)^2+1][(x+\delta x)^2 - x^2] + (x^2+1)[x+\delta x)^2 + 1 - (x^2+1)]$$

$$= [(x+\delta x)^2+1][(x+\delta x)^2 - x^2] + (x^2+1)[(x+\delta x)^2 - x^2]$$

$$\therefore \qquad \frac{\delta y}{\delta x} = \left[(x+\delta x)^2+1\right]\cdot\left[\frac{(x+\delta x)^2 - x^2}{\delta x}\right] + \left(x^2+1\right)\left[\frac{(x+\delta x)^2 - x^2}{\delta x}\right]$$

$$= \left[(x+\delta x)^2+1\right]\cdot\left[\frac{2x\delta x + (\delta x)^2}{\delta x}\right] + \left(x^2+1\right)\left[\frac{2x\delta x + (\delta x)^2}{\delta x}\right]$$

$$= [(x+\delta x)^2+1](2x+\delta x) + (x^2+1)(2x+\delta x)$$

$$\therefore \qquad \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x\to 0}[(x+\delta x)^2+1]\cdot[2x+\delta x] + \lim_{\delta x\to 0}(x^2+1)(2x+\delta x)$$

अथवा $$\frac{dy}{dx} = \left(x^2+1\right)\left(2x\right) + \left(x^2+1\right)\cdot\left(2x\right)$$

$$= 2x\left(2x^2+2\right)$$

$$= 4x\left(x^2+1\right)$$

आइए हम विश्लेषण करें : $\dfrac{dy}{dx} = \left(x^2+1\right) \underbrace{(2x)}_{\substack{x^2+1 \\ \text{का अवकलज}}} + \left(x^2+1\right) \underbrace{(2x)}_{\substack{x^2+1 \\ \text{का अवकलज}}}$

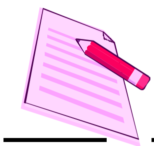
अब $\qquad y = x^3 \cdot x^2$ पर विचार कीजिए

क्या $\qquad \dfrac{dy}{dx} = x^3\cdot(2x) + x^2\cdot\left(3x^2\right)$ है?

आइए जाँच करें $\qquad x^3(2x) + x^2\left(3x^2\right) = 2x^4 + 3x^4 = 5x^4$

हमें मिला है $\qquad y = x^3 \cdot x^2 = x^5$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx} = 5x^4$$



साधारणतया, यदि $f(x)$ तथा $g(x)$, x के दो फलन हैं तो उनके गुणन का अवकलज निम्नलिखित रूप से परिभाषित होता है।

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right]=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$$

$$=\left[\text{प्रथम फलन}\right]\left[\frac{d}{dx}(\text{दूसरा फलन})\right]+\left[\text{दूसरा फलन}\right]\left[\frac{d}{dx}(\text{प्रथम फलन})\right]$$

इसको दो फलनों के गुणनफल का अवकलज पढ़ा जाता है। इसे ही गुणन नियम कहते हैं।

उदाहरण 26.8. यदि $y=5x^6\left(7x^2+4x\right)$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

I विधि : यहाँ y दो फलनों का गुणनफल है।

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=(5x^6)\cdot\frac{d}{dx}(7x^2+4x)+(7x^2+4x)\frac{d}{dx}(5x^6)$$

$$=(5x^6)(14x+4)+(7x^2+4x)(30x^5)$$

$$=70x^7+20x^6+210x^7+120x^6$$

$$=280x^7+140x^6$$

II विधि :
$$y=5x^6(7x^2+4x)$$

$$=35x^8+20x^7$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=35\times 8x^7+20\times 7x^6=280x^7+140x^6$$

जो कि वही है जो पहली विधि से प्राप्त हुआ था।

इसी नियम का दो से अधिक फलनों के लिए विस्तार किया जा सकता है।

टिप्पणी : यदि $f(x)$, $g(x)$ तथा $h(x)$ के तीन फलन हैं, तो

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)h(x)\right]=f(x)g(x)\frac{d}{dx}h(x)+g(x)h(x)\frac{d}{dx}f(x)+h(x)f(x)\frac{d}{dx}g(x)$$

उदाहरण 26.9. $\left[f(x)g(x)h(x)\right]$ का अवकलज ज्ञात कीजिए यदि

$$f(x)=x,\ g(x)=(x-3),\ \ h(x)=x^2+x$$

हल : मान लीजिए कि $y=x(x-3)\left(x^2+x\right)$

y का अवकलज ज्ञात करने के लिये हम पहले किन्ही दो फलनों का गुणनफल ज्ञात करते हैं, फिर गुणन नियम का उपयोग करते हैं, या फिर उपरोक्त टिप्पणी में दिए गए नियम का उपयोग करते हैं।

दूसरे शब्दों में, हम लिख सकते हैं

$$y=\left[x(x-3)\right]\left(x^2+x\right)$$

मान लीजिए कि $u(x) = f(x)g(x) = x(x-3) = x^2 - 3x$

तथा $h(x) = x^2 + x$

$\therefore$ $y = u(x) \times h(x)$

अत: $$\frac{dy}{dx} = x(x-3)\frac{d}{dx}\left(x^2+x\right) + \left(x^2+x\right)\frac{d}{dx}\left(x^2-3x\right)$$

$$= x(x-3)(2x+1) + \left(x^2+x\right)(2x-3)$$

$$= x(x-3)(2x+1) + \left(x^2+x\right)(x-3) + x\left(x^2+x\right)$$

$$= [f(x)g(x)]\cdot h'(x) + [g(x)h(x)]f'(x) + [h(x)f(x)].g'(x)$$

अत: $$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] = [f(x)g(x)]\cdot\frac{d}{dx}[h(x)] + [g(x)h(x)]\frac{d}{dx}[f(x)] + h(x)f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]$$

विकल्पत: हम सीधे तीन फलनों के गुणनफल को लेकर गुणन नियम लगा सकते हैं।

$$\frac{dy}{dx} = [x(x-3)]\frac{d}{dx}(x^2+x) + [(x-3)(x^2+x)]\frac{d}{dx}(x) + [(x^2+x)\cdot x]\frac{d}{dx}(x-3)$$

$$= x(x-3)(2x+1) + (x-3)(x^2+x)\cdot 1 + (x^2+x)\cdot x \cdot 1$$

$$= 4x^3 - 6x^2 - 6x$$

देखें आपने कितना सीखा 26.4

1. गुणन नियम के उपयोग से निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए:

`
   (a) $f(x) = (3x+1)(2x-7)$ (b) $f(x) = (x+1)(-3x-2)$

   (c) $f(x) = (x+1)(-2x-9)$ (d) $y = (x-1)(x-2)$

   (e) $y = x^2(2x^2+3x+8)$ (f) $y = (2x+3)(5x^2-7x+1)$

   (g) $u(x) = (x^2-4x+5)(x^3-2)$

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) $f(r) = r(1-r)(\pi r^2 + r)$ (b) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

   (c) $f(x) = (x^2+2)(x^3-3x^2+4)(x^4-1)$

   (d) $f(x) = (3x^2+7)(5x-1)\left(3x^2+9x+8\right)$

26.9 भाग नियम

आपने उन फलनों, जो दो फलनों के योग, अन्तर एवम् गुणन के रूप में है, के अवकलज ज्ञात करने के लिए क्रमश: योग, अन्तर तथा गुणन नियम सीखे हैं। आइए अब हम एक कदम और आगे बढ़ाकर उन फलनों का अवकलज ज्ञात करने के लिए 'भाग नियम' सीखें जो दो फलनों के भाग के रूप में व्यक्त हैं।

मान लीजिए कि $g(x)=\dfrac{1}{r(x)}$, $\qquad [r(x)\neq 0]$

आइए, हम g (x) का अवकलज प्रथम सिद्धान्त से ज्ञात करें।

$$g(x)=\frac{1}{r(x)}$$

$$\therefore \qquad g'(x)=\lim_{\delta x\to 0}\left[\frac{\dfrac{1}{r(x+\delta x)}-\dfrac{1}{r(x)}}{\delta x}\right]$$

$$=\lim_{\delta x\to 0}\left[\frac{r(x)-r(x+\delta x)}{\delta(x)r(x)r(x+\delta x)}\right]$$

$$=\lim_{\delta x\to 0}\left[\frac{r(x)-r(x+\delta x)}{\delta x}\right]\lim_{\delta x\to 0}\frac{1}{r(x).r(x+\delta x)}$$

$$=-r'(x)\cdot\frac{1}{[r(x)]^2}=-\frac{r'(x)}{[r(x)]^2}$$

आइए, अब ऐसे दो फलन f (x) तथा g (x) लें ताकि $\phi(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x)\neq 0$ हो।

हम लिख सकते हैं $\qquad \phi(x)=f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}$

$$\therefore \qquad \phi(x)=f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right]$$

$$=\frac{f'(x)}{g(x)}+f(x)\left[\frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}\right]=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

अतएव $\qquad \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

$$=\frac{\text{हर (अंश का अवकलज) – अंश (हर का अवकलज)}}{(\text{हर})^2}$$

इसे भाग नियम (अथवा भागफल नियम) कहते हैं

उदाहरण 26.10. यदि $f(x)=\dfrac{4x+3}{2x-1}$, $\quad x\neq\dfrac{1}{2}$, है तो $f'(x)$ ज्ञात कीजिए ।

हल: $\qquad f'(x)=\dfrac{(2x-1)\dfrac{d}{dx}(4x+3)-(4x+3)\dfrac{d}{dx}(2x-1)}{(2x-1)^2}$

$$=\frac{(2x-1).4-(4x+3).2}{(2x-1)^2}=\frac{-10}{(2x-1)^2}$$

आइए हम निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करे :

$$f(x)=\frac{1}{2x-1}, \qquad x \neq \frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2x-1}\right]=\frac{(2x-1)\frac{d}{dx}(1)-1\frac{d}{dx}(2x-1)}{(2x-1)^2}$$

$$=\frac{(2x-1)\times 0-2}{(2x-1)^2} \qquad \left[\because \frac{d}{dx}(1)=0\right]$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2x-1}\right]=-\frac{2}{(2x-1)^2}$$

देखें आपने कितना सीखा 26.5

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(a) $y=\frac{2}{5x-7},\ x\neq\frac{7}{5}$ (b) $y=\frac{3x-2}{x^2+x-1}$ (c) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

(d) $f(x)=\frac{x^4}{x^2-3}$ (e) $f(x)=\frac{x^5-2x}{x^7}$ (f) $f(x)=\frac{x}{x^2+x+1}$

(g) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^3+4}$

2. $f'(x)$ ज्ञात कीजिए :

(a) $f(x)=\frac{x(x^2+3)}{x-2}$, $[x\neq 2]$

(b) $f(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$, $[x\neq 3,\quad x\neq 4]$

26.10 श्रंखला नियम

इससे पहले हमें $\sqrt{x^4+8x^2+1}$ के रूप वाले फलन नहीं मिले हैं। इस फलन को दो फलनों के योग अन्तर, गुणन अथवा भागफल के रूप में नहीं व्यक्त कर सकते, इसलिए अब तक की सीखी हुई विधियां हमें ऐसे फलनों के अवकलज ज्ञात करने में सहायक नहीं हो सकती। अत:, इस प्रकार के फलन का अवकलज ज्ञात करने के लिए हमें एक नया नियम विकसित करना होगा।

आइए लिखें : $y=\sqrt{x^4+8x^2+1}$ अथवा $y=\sqrt{t}$ जहाँ $t=x^4+8x^2+1$ अर्थात y, t का फलन है तथा t, x का फलन है। अत: y एक फलन का फलन है। हम एक फलन के फलन का अवकलज ज्ञात करने का प्रयास करने के लिए आगे बढते हैं।

मान लीजिए कि δt , t में वृद्धि है तथा y में सगत वृद्धि δy है

तब, $\delta y \to 0$ जब $\delta t \to 0$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta y}{\delta t} \qquad \text{(i)}$$

इसी प्रकार t, x का फलन है

$\therefore$ $\delta t \to 0$ जब $\delta x \to 0$

$$\therefore \qquad \frac{dt}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta t}{\delta x} \qquad \text{(ii)}$$

क्योंकि y, t का फलन है तथा t, x का फलन है। इसलिए $\delta y \to 0$ जब $\delta x \to 0$

(i) तथा (ii) से, हमें मिलता है।

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \left[\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta y}{\delta t}\right]\left[\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta t}{\delta x}\right]$$

$$= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

अतः $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

इसे **श्रंखला नियम** कहा जाता है।

उदाहरण 26.11. यदि $y = \sqrt{x^4 + 8x^2 + 1}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल : हमें दिया है : $y = \sqrt{x^4 + 8x^2 + 1}$

जिसे हम लिख सकते हैं :

$$y = \sqrt{t}, \quad \text{जहाँ} \quad t = x^4 + 8x^2 + 1 \qquad \text{(i)}$$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad \text{तथा} \quad \frac{dt}{dx} = 4x^3 + 16x$$

यहाँ $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot (4x^3 + 16x)$$

$$= \frac{4x^3 + 16x}{2\sqrt{x^4 + 8x^2 + 1}} = \frac{2x^3 + 8x}{\sqrt{x^4 + 8x^2 + 1}}$$

उदाहरण 26.12. फलन $y = \frac{5}{(x^2 - 3)^7}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{5(x^2 - 3)^{-7}\right\}$$

$$= 5[(-7)(x^2 - 3)^{-8}] \cdot \frac{d}{dx}(x^2 - 3) \qquad \text{(श्रंखला नियम द्वारा)}$$

$$= -35(x^2 - 3)^{-8} \cdot (2x) = \frac{-70x}{(x^2 - 3)^8}$$

उदाहरण 26.13. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए यदि $y = \frac{1}{4}v^4$ तथा $v = \frac{2}{3}x^3 + 5$ हो।

हल : हमें दिया है : $y = \frac{1}{4}v^4$ तथा $v = \frac{2}{3}x^3 + 5$

(i) $$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{4}(4v^3) = v^3 = \left(\frac{2}{3}x^3 + 5\right)^3 \quad ...(i)$$

तथा $$\frac{dv}{dx} = \frac{2}{3}(3x^2) = 2x^2 \quad ..(ii)$$

अत: $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^3 + 5\right)^3 (2x^2) \qquad [(i) \text{ तथा } (ii) \text{ का उपयोग करने पर}]$$

टिप्पणी

हमने पहले वाले उदाहरणों में देखा है कि अवकलजों के विभिन्न नियमों के उपयोग से हम सभी बीजीय फलनों का अवकलज ज्ञात कर सकते हैं।

देखें आपने कितना सीखा 26.6

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(a) $f(x) = (5x - 3)^7$ (b) $f(x) = (3x^2 - 15)^{35}$

(c) $f(x) = (1 - x^2)^{17}$ (d) $f(x) = \frac{(3-x)^5}{7}$

(e) $y = \frac{1}{x^2 + 3x + 1}$ (f) $y = \sqrt[3]{(x^2+1)^5}$

(g) $y = \frac{1}{\sqrt{7 - 3x^2}}$ (h) $y = \left[\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{16}\right]^5$

(i) $y = (2x^2 + 5x - 3)^{-4}$ (j) $y = x + \sqrt{x^2 + 8}$

2. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए :

(a) $y = \frac{3-v}{2+v}, v = \frac{4x}{1-x^2}$ (b) $y = at^2, t = \frac{x}{2a}$

26.12 एक फलन के द्वितीय कोटि के अवकलज

द्वितीय कोटि का अवकलज: दिया है कि y, x का फलन, मान लीजिए $f(x)$ है। यदि इसका अवकलज $\frac{dy}{dx}$ भी अवकलनीय फलन है, तो $\frac{dy}{dx}$ का अवकलज $y = f(x)$ का x के सापेक्ष द्वितीय कोटि का

अवकलज कहलाता है तथा उसे $\frac{d^2y}{dx^2}$ द्वारा निरुपित करते हैं। अन्य प्रतीक (symbols) जो द्वितीय कोटि अवकलज के लिए प्रयुक्त होते हैं D^2, f'', y'', y_2 आदि हैं।

टिप्पणी

इस प्रकार x पर f'' का मान होगा :

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(h)}{h}$$

तीसरी, चौथी, ... कोटि के अवकलज भी इसी प्रकार से परिभाषित किये जा सकते हैं। अतः x के सापेक्ष y का दूसरा अवकलज या दूसरी कोटि का अवकलज है।

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

उदाहरण 26.14. दूसरी कोटि के अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) x^2 (ii) x^3+1 (iii) $(x^2+1)(x-1)$ (iv) $\frac{x+1}{x-1}$

हल : (i) मान लीजिए $y = x^2$, तब $\frac{dy}{dx} = 2x$

तथा $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(2x) = 2 \cdot \frac{d(x)}{dx}$$
$$= 2.1 = 2$$

$\therefore$ $$\frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

(ii) मान लीजिए $y = x^3 + 1$

तब, $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ (योग नियम द्वारा तथा अचर का अवकलज शून्य है।)

तथा $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(3x^2) = 3.2x = 6x$$

अर्थात् $$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

(iii) मान लीजिए $y = (x^2+1)(x-1)$,

तब, $$\frac{dy}{dx} = (x^2+1)\frac{d}{dx}(x-1) + (x-1), \frac{d}{dx}(x^2+1)$$

$$= (x^2+1)\cdot 1 + (x-1)\cdot 2x \ = x^2 + 1 + 2x^2 - 2x = 3x^2 - 2x + 1$$

तथा $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(3x^2-2x+1\right)=6x-2$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=6x-2$$

(iv) मान लीजिए कि $y=\frac{x+1}{x-1}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x-1)\cdot 1-(x+1).1}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

तथा $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{-2}{(x-1)^2}\right]=-2.-2.\frac{1}{(x-1)^3}=\frac{4}{(x-1)^3}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4}{(x-1)^3}$$

देखें आपने कितना सीखा 26.7

निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का दूसरी कोटि का अवकलज ज्ञात कीजिए :

1. (a) x^3 (b) $x^4+3x^3+9x^2+10x+1$

 (c) $\frac{x^2+1}{x+1}$ (d) $\sqrt{x^2+1}$

आइये दोहराएँ

- किसी फलन $f(x)$ का x के सापेक्ष अवकलज

$$f'(x)=\lim_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$$

- एक अचर का अवकलज शून्य द्वारा परिभाषित होता है अर्थात $\frac{dc}{dx}=0$ जहाँ c एक अचर है
- ज्यामितीय रूप में फलन $y=f(x)$ का बिन्दु $P(x,y)$ पर अवकलज $\frac{dy}{dx}$, वक्र $y=f(x)$ के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा की प्रवणता होती है।
- y का x के सापेक्ष अवकलज y का x के सापेक्ष तात्क्षणिक परिवर्तन दर का द्योतक है।
- यदि $f(x)$ एक अवकलनीय फलन है तथा c एक अचर है, तो $\frac{d}{dx}\left[cf(x)\right]=cf'(x)$ अवकलज दर्शाता है जहाँ $f'(x), f(x)$ का अवकलज निरुपित करता है।

- फलनों का योग अथवा अन्तर नियम :

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]\pm\frac{d}{dx}\left[g(x)\right]$$

फलनों के योग अथवा अन्तर का अवकलज उनके अवकलजों के क्रमश: योग अथवा अन्तर के बराबर होता है।

- **गुणन नियम :**

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right]=f(x)\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

(पहला फलन) (दूसरे फलन का अवकलज)+ (दूसरा फलन) (पहले फलन का अवकलज)

- **भागफल नियम :**

$$\text{यदि}\quad \phi(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\quad g(x)\neq 0,\quad \text{तो}$$

$$\phi'(x)=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}=\frac{\text{हर}\left(\frac{d}{dx}(\text{अंश})\right)-\text{अंश}\left(\frac{d}{dx}(\text{हर})\right)}{(\text{हर})^2}$$

- श्रंखला नियम : $\frac{d}{dx}\left[f\{g(x)\}\right]=f'[g(x)]\cdot\frac{d}{dx}[g(x)]$

$f(x)$ का $g(x)$ के सापेक्ष अवकलज $\times$ $g(x)$ का x के सापेक्ष अवकलज

- y का x के सापेक्ष, द्वितीय कोटि का अवकलज, $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}$ है।

सहायक वेबसाइट

- *http://www.bbc.co.uk/education/asguru/maths/12methods/03differentiation/index.shtml*
- *https://www.youtube.com/watch?v=MGOFPFLTHLg*
- *https://www.youtube.com/watch?v=IrBWXoJ9NMQ*
- *https://www.youtube.com/watch?v=rsrMQ5osWfc*
- *https://www.youtube.com/watch?v=CzGGtJnbd1A*
- *https://www.youtube.com/watch?v=Dx4GuHH4lTI*
- *https://www.youtube.com/watch?v=nVfWs10A_b8*
- *https://www.youtube.com/watch?v=j5pVhP8GmP4*

आइए अभ्यास करें

1. एक कार द्वारा t सेकेण्ड में तय की गई दूरी s मी $s=t^2$ द्वारा दी गयी है, ज्ञात कीजिए :
(a) दूरी का समय के सापेक्ष परिवर्तन दर (b) कार की गति जब $t = 3$ सेकेण्ड

2. दिया है : $f(t)=3-4t^2$। डेल्टा विधि के प्रयोग से $f'(t)$ तथा $f'\left(\frac{1}{3}\right)$ ज्ञात कीजिए।

3. $f(x)=x^4$ का प्रथम सिद्धान्त द्वारा अवकलन कीजिए। अतएव $f'(0), f'\left(-\frac{1}{2}\right)$ ज्ञात कीजिए।

4. फलन $\sqrt{2x+1}$ का प्रथम सिद्धान्त से अवकलज ज्ञात कीजिए

5. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का प्रथम सिद्धान्त से अवकलज ज्ञात कीजिए :

(a) $ax+b$, (b) $2x^2+5$

(c) x^3+3x^2+5 (d) $(x-1)^2$)

6. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(a) $f(x)=px^4+qx^2+7x-11$ (b) $f(x)=x^3-3x^2+5x-8$

(c) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ (d) $f(x)=\frac{x^2-a}{a-2}, a\neq 2$

7. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का दो विधियों से अवकलज ज्ञात कीजिए- पहले गुणन नियम द्वारा तथा फिर गुणन को खोलकर। सत्यापित कीजिए कि दोनों उत्तर एक ही हैं :

(a) $y=\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ (b) $y=x^{\frac{3}{2}}\left(2+5x+\frac{1}{x}\right)$

8. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(a) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ (b) $f(x)=\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{10}{x^3}$

(c) $f(x)=\frac{1}{(1+x^4)}$ (d) $f(x)=\frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x}}$

(e) $f(x)=\frac{3x^2+4x-5}{x}$ (f) $f(x)=\frac{x-4}{2\sqrt{x}}$

(g) $f(x)=\frac{(x^3+1)(x-2)}{x^2}$

9. श्रखंला नियम के उपयोग से, निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(a) $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ (b) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ (c) $\sqrt[3]{x^2(x^2+3)}$

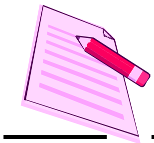
10. निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए द्वितीय कोटि का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(a) $\sqrt{x+1}$ (b) $x\cdot\sqrt{x-1}$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 26.1

1. (a) 3 (b) 8 (c) 6 (d) 31



2. 3640 मी/सेकेण्ड 3. 21 मी/सेकेण्ड

देखें आपने कितना सीखा 26.2

1. (a) 10 (b) 2 (c) 6x (d) 2x+5 (e) $21x^2$

2. (a) $-\frac{1}{x^2}$ (b) $-\frac{1}{ax^2}$ (c) $1-\frac{1}{x^2}$ (d) $\frac{-a}{(ax+b)^2}$ (e) $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

(f) $-\frac{1}{(3x+5)^2}$

3. (a) $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ (b) $\frac{-a}{2(ax+b)(\sqrt{ax+b})}$ (c) $\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)$

(d) $\frac{2}{(1-x)^2}$

4. (a) $\frac{3}{2\sqrt{x}};\frac{3}{2\sqrt{2}}$ (b) $2\pi r$; 4π (c) $2\pi r^2$; 36π

देखें आपने कितना सीखा 26.3

1. (a) 0 (b) 12 (c) 12

2. (a) $180x^8+5$ (b) $-200x^3-40x$ (c) $12x^2-12x$

(d) $5x^8+3$ (e) $3x^2-6x+3$ (f) $x^7-x^5+x^3$

(g) $\frac{4}{15}x^{\frac{-1}{3}}+\frac{4}{5}x^{\frac{-9}{5}}-6x^{-3}$ (h) $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$

3. (a) 16, 16, 16 (b) 3,1 ,1 (c) 186

(d) $4\pi r^2, 16\pi$

देखें आपने कितना सीखा 26.4

1. (a) $12x-19$ (b) $-6x-5$ (c) $4x-11$

(d) $2x-3$ (e) $8x^3+9x^2+16x$ (f) $30x^2+2x-19$

(g) $5x^4-16x^3+15x^2-4x+8$

2. (a) $-4\pi r^3+3(\pi-1)r^2+2r$ (b) $3x^2-12x+11$

(c) $9x^8-28x^7+14x^6-12x^5-5x^4+44x^3-6x^2+4x$

(d) $(5x-1)(3x^2+9x+8).6x+5(3x^2+7)(3x^2+9x+8)+(3x^2+7)(5x-1)(6x+9)$

देखें आपने कितना सीखा 26.5

1. (a) $\frac{-10}{(5x-7)^2}$ (b) $\frac{-3x^2+4x-1}{(x^2+x+1)^2}$ (c) $\frac{4x}{(x^2+1)^2}$

(d) $\frac{2x^5-12x^3}{(x^2-3)^2}$ (e) $\frac{-2x^4+12}{x^7}$ (f) $\frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2}$ (g) $\frac{4-5x^3}{2\sqrt{x}(x^3+4)^2}$

2. (a) $\frac{2x^3-6x^2-6}{(x-2)^2}$ (b) $\frac{-4x^2+20x-22}{(x-3)^2(x-4)^2}$

देखें आपने कितना सीखा 26.6

1. (a) $35(5x-6)^6$ (b) $210x(3x^2-15)^{34}$

(c) $-34x(1-x^2)^{16}$ (d) $\frac{-5}{7}(3-x)^4$

(e) $-(2x+3)(x^2+3x+1)^{-2}$ (f) $\frac{10x}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{2}{3}}$

(g) $3x(7-3x^2)^{-3/2}$ (h) $5(x^5+2x^3)\left(\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{2}+\frac{1}{16}\right)^4$

(i) $-4(4x+5)(2x^2+5x-3)^{-5}$ (j) $1+\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$

2. (a) $\frac{-5(1+x^2)}{(1+2x-x^2)^2}$ (b) $\frac{x}{2a}$

देखें आपने कितना सीखा 26.7

1. (a) $6x$ (b) $12x^2+18x+18$ (c) $\frac{4}{(x+1)^3}$ (d) $\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$

आइए अभ्यास करें

1. (a) 2 t (b) 6 सेकेण्ड

2 $-8t, -\frac{8}{3}$ 3. $0, \frac{-1}{2}$ 4. $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

5. (a) a (b) 4x (c) $3x^2+6x$ (d) $2(x-1)$

6. (a) $4px^3+2qx+7$ (b) $3x^2-6x+5$

(c) $1-\frac{1}{x^2}$ (d) $\frac{2x}{a-2}$

7. (a) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (b) $3\sqrt{x}+\frac{25}{2}x\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

8. (a) $\dfrac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$ (b) $\dfrac{-6}{(x-1)^3}-\dfrac{30}{x^4}$

(c) $\dfrac{-4x^3}{(1+x^4)^2}$ (d) $\dfrac{3}{2}\sqrt{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^{3/2}}$

(e) $3+\dfrac{5}{x^2}$ (f) $\dfrac{1}{4\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

(g) $3x^2-2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}$

9. (a) $1-\dfrac{1}{x^2}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}\cdot(1-x)^{\frac{3}{2}}}$ (c) $\dfrac{4x^3+6x}{3(x^4+3x^2)^{\frac{2}{3}}}$

10. (a) $-\dfrac{1}{4(x+1)^{\frac{3}{2}}}$ (b) $\dfrac{2+x-x^2}{4(x-1)^{\frac{1}{2}}}$