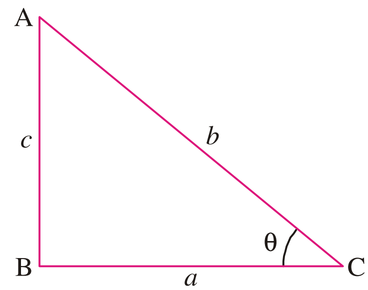
3

त्रिकोणमितीय फलन- I

आप पिछली कक्षाओं में, त्रिकोणमितीय अनुपातों के बारे में पढ़ चुके हैं। याद कीजिए कि हमने एक समकोण त्रिभुज की भुजाओं के अनुपातों को निम्न प्रकार से परिभाषित किया था :

$\sin\theta = \frac{c}{b}, \cos\theta = \frac{a}{b}, \tan\theta = \frac{c}{a}$ और $\operatorname{cosec}\theta = \frac{b}{c}, \sec\theta = \frac{b}{a}, \cot\theta = \frac{a}{c}$



चित्र 3.1

हमने इन त्रिकोणमितीय अनुपातों के बीच में सम्बन्धों को भी स्थापित किया था, जैसे:

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta, \operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

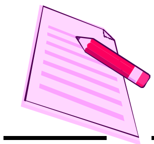
अभी तक प्राप्त जानकारी को हम फलनों के रूप में भी बताने का प्रयास करेंगे।

इस पाठ में हम त्रिकोणमितीय विज्ञान को फलनात्मक उपगमन (Functional Approach) का उपयोग करते हुए विकसित करेंगे। हम इकाई वृत्त का उपयोग करते हुए, त्रिकोणमितीय फलनों की अवधारणा को विकसित करेंगे। हम कोण की रेडियन माप का वर्णन करेंगे और त्रिकोणमितीय फलनों को परिभाषित करेंगे। जैसे: $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \operatorname{cosec} x, y = a\sin x, y = b\cos x$ इत्यादि, जहाँ x और y वास्तविक संख्याएँ हैं। हम $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, \quad y = \cot x, y = \sec x, y = \operatorname{cosec} x,$ $y = a\sin x, y = a\cos x$ इत्यादि जैसे फलनों का आलेख भी खीचेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- धनात्मक तथा ऋणात्मक कोणों को परिभाषित करना
- डिग्री और रेडियन को एक कोण की माप के रूप में परिभाषित करना
- एक कोण की माप को डिग्री से रेडियन में तथा रेडियन से डिग्री में बदलना
- सूत्र $\ell = r\theta$ को बताना, जबकि r तथा θ के सामान्य अर्थ हैं
- सम्बन्ध $\ell = r\theta$ का उपयोग करते हुए, प्रश्नों को हल करना
- एक वास्तविक संख्या के त्रिकोणमितीय फलन को परिभाषित करना
- त्रिकोणमितीय फलनों के आलेखों को खींचना और
- त्रिकोणमितीय फलनों के आलेखों से निष्कर्ष निकालना



पूर्व ज्ञान

- एक कोण की परिभाषा
- सरल कोण, समकोण और संपूर्ण कोण की अवधारणाएँ
- वृत्त और उससे सम्बन्धित अवधारणायें
- विशेष गुणनफलः $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$, $(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$
- पाइथागोरस प्रमेय और पाइथागोरीय संख्याओं का ज्ञान

3.1 एक कोण की वृत्तीय माप

एक कोण दो किरणों का सम्मिलन है जिनका प्रारम्भिक बिन्दु उभयनिष्ठ होता है। कोण किरण के प्रारम्भिक बिन्दु के गिर्द घूमने से भी बनता है। ऋणात्मक या धनात्मक कोणों का बनना किरण के दक्षिणावर्त या वामावर्त घुमाव पर निर्भर करता है।

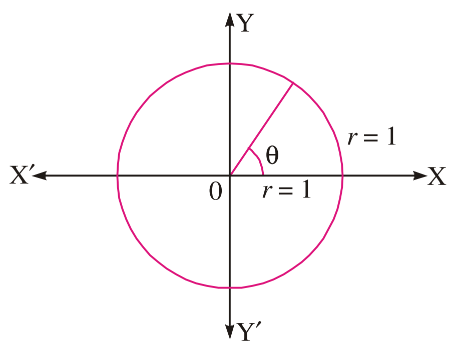
3.1.1 इकाई वृत्त

ऐसा देखा जा सकता है कि जब एक रेखाखण्ड प्रारम्भिक बिन्दु के गिर्द एक चक्र पूरा करता है, तो उसका अन्त बिन्दु एक वृत्त बनाता है। यदि इस रेखाखंड की लम्बाई एक इकाई हो, तो वृत्त के अध र्व्यास की लम्बाई भी एक इकाई होगी और वृत्त एक इकाई वृत्त कहलाएगा।

3.1.2 रेडियन

अंश या डिग्री माप के अतिरिक्त रेडियन, कोण माप का दूसरा मात्रक है। रेडियन वृत्त के केन्द्र पर बने कोण को मापने की इकाई है, जब यह कोण वृत्त के केन्द्र पर अर्धव्यास (r) के तुल्य चाप से बना हो।

जब एक इकाई चाप द्वारा इकाई वृत्त के केन्द्र पर एक कोण बनाया जाता है, तो उसकी माप एक रेडियन होती है।



चित्र 3.2

टिप्पणी: रेडियन एक अचर माप का कोण होता है अर्थात् एक वृत्त का चाप, जिसकी लम्बाई वृत्त की त्रिज्या के बराबर हो, के द्वारा केन्द्र पर बनाए गए कोण की माप हमेशा समान होती है, चाहे वृत्त की त्रिज्या जो भी हो।

3.1.3 अंश (डिग्री) और रेडियन कोणों में सम्बंध

यदि इकाई चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बने कोण की माप 1 रेडियन है, तो वृत्त की परिधि 2π द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बने कोण की माप 2π रेडियन है। $(\because r = 1)$

$\therefore$ 2π रेडियन $= 360^\circ \Rightarrow \pi$ रेडियन $= 180^\circ$

$\frac{\pi}{2}$ रेडियन $= 90° \Rightarrow \frac{\pi}{4}$ रेडियन $= 45°$

और 1 रेडियन $= \left(\frac{360}{2\pi}\right)^{\circ} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$ या $1° = \frac{2\pi}{360}$ रेडियन $= \frac{\pi}{180}$ रेडियन

उदाहरण 3.1. बदलिए :

(i) 90° को रेडियन में (ii) 15° को रेडियन में

(iii) $\frac{\pi}{6}$ रेडियन को अंश में (iv) $\frac{\pi}{10}$ रेडियन को अंश में

हल : (i) $1° = \frac{2\pi}{360}$ रेडियन $\Rightarrow 90° = \frac{2\pi}{360} \times 90$ रेडियन या $90° = \frac{\pi}{2}$ रेडियन

(ii) $15° = \frac{2\pi}{360} \times 15$ रेडियन या $15° = \frac{\pi}{12}$ रेडियन

(iii) 1 रेडियन $= \left(\frac{360}{2\pi}\right)^{\circ} \Rightarrow \frac{\pi}{6}$ रेडियन $= \left(\frac{360}{2\pi} \times \frac{\pi}{6}\right)^{\circ} \Rightarrow \frac{\pi}{6}$ रेडियन $= 30°$

(iv) $\frac{\pi}{10}$ रेडियन $= \left(\frac{360}{2\pi} \times \frac{\pi}{10}\right)^{\circ}$ या $\frac{\pi}{10}$ रेडियन $= 18°$

देखें आपने कितना सीखा 3.1

1. निम्नलिखित कोणों (अंश में) को रेडियन में बदलिये :

   (i) 60° (ii) 15° (iii) 75° (iv) 105° (v) 270°

2. निम्नलिखित कोणों को अंश (डिग्री) में बदलिये :

   (i) $\frac{\pi}{4}$ (ii) $\frac{\pi}{12}$ (iii) $\frac{\pi}{20}$ (iv) $\frac{\pi}{60}$ (v) $\frac{2\pi}{3}$

3. एक त्रिभुज के कोण $45°, 65°$ और $70°$ है। इन कोणों को रेडियन में व्यक्त कीजिए।

4. एक चतुर्भुज के तीन कोण $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ और $\frac{2\pi}{3}$ हैं। चतुर्भुज के चौथे कोण को रेडियन में ज्ञात कीजिए।

5. $\frac{\pi}{6}$ का पूरक कोण रेडियन में ज्ञात कीजिए।

3.1.4 चाप की लम्बाई और वृत्त की त्रिज्या के बीच सम्बंध

एक त्रिज्या कोण (एक रेडियन का कोण) केन्द्र पर उस चाप द्वारा बनाया जाता है, जिसकी लम्बाई वृत्त की त्रिज्या के बराबर हो। दो रेडियन का कोण केन्द्र पर उस चाप द्वारा बनाया जाता है जिसकी लम्बाई त्रिज्या से दुगुनी हो, यदि चाप की माप त्रिज्या की 2½ गुनी हो, तो कोण की माप 2½ रेडियन होगी। उपरोक्त सभी कुछ को हम इस सारणी से पढ़ सकते हैं:

चाप की लम्बाई (l)	वृत्त (त्रिज्या $= r$) के केन्द्र पर बना कोण θ (रेडियन में)
r	1
2r	2
(2½)r	2½
4r	4

इसलिए, $\theta = \frac{\ell}{r}$ या $\ell = r\theta$ जबकि r = त्रिज्या,

$\theta =$ केन्द्र पर बना कोण (रेडियन में) और ℓ = चाप की लम्बाई

अतः, हम कह सकते है कि **केन्द्र पर बना कोण, चाप की लम्बाई और वृत्त की त्रिज्या के अनुपात के बराबर होता है।**

टिप्पणी: उपरोक्त संबन्ध पर पहुँचने के लिए हमने कोण के रेडियन माप का उपयोग किया है न कि अंश माप का। इस प्रकार, संबंध $\theta = \frac{\ell}{r}$ केवल तभी मान्य है, जब कोण को रेडियन में मापा गया हो।

उदाहरण 3.2. 10 सेमी लम्बाई वाले चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बनाये गये कोण की माप रेडियन में ज्ञात कीजिए, जबकि वृत्त की त्रिज्या 35 सेमी है।

हल : $\ell = 10$ सेमी० और $r = 35$ सेमी

$$\theta = \frac{\ell}{r} \text{ रेडियन या } \theta = \frac{10}{35} \text{ रेडियन या } \theta = \frac{2}{7} \text{ रेडियन}$$

उदाहरण 3.3. एक वृत्तीय पटरी पर एक रेल सड़क वक्र बनाना है। इस वृत्तीय पटरी का अर्धव्यास क्या होगा, यदि रेल सड़क वक्र 500 मी की दूरी में 45° का कोण घूमता है ?

हल : कोण θ डिग्री में दिया हुआ है। सूत्र $\ell = r\theta$ का उपयोग करने के लिए, पहले कोण θ को रेडियन में बदलना होगा।

$$\theta = 45° = 45 \times \frac{\pi}{180} \text{ रेडियन } = \frac{\pi}{4} \text{ रेडियन} \qquad ....(1)$$

अब $\ell = 500$ मी ....(2)

$$\ell = r\ \theta \Rightarrow r = \frac{\ell}{\theta} \qquad \therefore\ r = \frac{500}{\frac{\pi}{4}} \text{ [(1) और (2) के प्रयोग से]}$$

$$= 500 \times \frac{4}{\pi} \text{ मी } = 2000 \times 0.32 \text{ मी } \left(\frac{1}{\pi} = 0.32\right) = 640 \text{ मी}$$

उदाहरण 3.4. एक रेलगाड़ी एक वृत्तीय पटरी पर 60 किमी प्रति घंटा की चाल से चल रही है। यदि वृत्तीय पटरी की त्रिज्या $\frac{5}{6}$ किमी है, तो वह 15 सेकंड में कितने रेडियन का कोण घूम जायेगी।

हल : रेलगाड़ी की चाल 60 किमी प्रति घंटा है। 15 सेकंड में यह गाड़ी $\frac{60\times15}{60\times60}=\frac{1}{4}$ किमी चलेगी।

$\therefore \quad \ell=\frac{1}{4}$ किमी और $r=\frac{5}{6}$ किमी $\qquad \therefore\ \theta=\frac{\ell}{r}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}}$ रेडियन $=\frac{3}{10}$ रेडियन

देखें आपने कितना सीखा 3.2

1. निम्नलिखित कोणों को रेडियन में बदलिये :

   (a) 30° (b) 60° (c) 150°

2. निम्नलिखित कोणों को अंशों (डिग्री) में बदलिये :

   (a) $\frac{\pi}{5}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{\pi}{9}$

3. यदि वृत्त की त्रिज्या 15 सेमी हो, तो 2.5 सेमी लम्बाई की माप के चाप द्वारा केन्द्र पर बनाये गए कोण की माप अंशों और रेडियनों में ज्ञात कीजिए।

4. एक रेलगाड़ी एक वृत्तीय पटरी पर 20 किमी प्रति घंटा की चाल से चल रही है। यदि वृत्तीय पटरी की त्रिज्या $\frac{1}{12}$ किमी हो, तो गाड़ी 3 सेकंड में कितने रेडियन का कोण घूम जाएगी ?

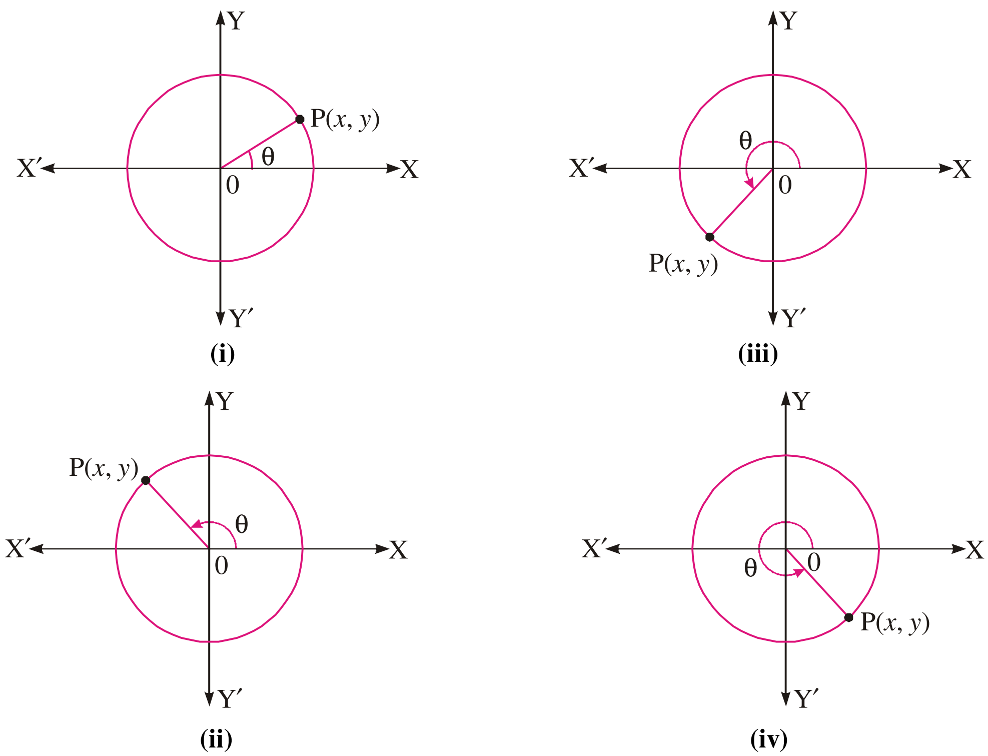
5. एक वृत्तीय पटरी पर एक रेल सड़क वक्र बनाना है। इस वृत्तीय पटरी की त्रिज्या क्या होगी, यदि रेल सड़क वक्र 100 मीटर की दूरी में 60° का कोण घूमता है ?

6. निम्न सारणी को *l*, r और 'θ' के लिए पूरा कीजिए जहाँ ये सामान्य अर्थ में लिए गए हैं।

	l	*r*	*θ*
(a)	1.25 मी	....	135°
(b)	30 सेमी	....	$\frac{\pi}{4}$
(c)	0.5 सेमी	2.5 मी	....
(d)	....	6 मी	120°
(e)	....	150 सेमी	$\frac{\pi}{15}$
(f)	150 सेमी	40 मी	....
(g)	....	12 मी	$\frac{\pi}{6}$
(h)	1.5 मी	0.75 मी	....
(i)	25 मी	....	75°

3.2 त्रिकोणमितीय फलन

इकाई वृत्त की रचना करते समय हमें पता चलता है कि '0' और 2π के बीच की प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए संख्याओं x और y के एक क्रमित युग्म का अस्तित्व होता है। यह क्रमित युग्म (x, y) बिन्दु 'P' के निर्देशांकों को निरूपित करता है।



चित्र 3.3

यदि हम इकाई वृत्त पर $\theta = 0^\circ$ पर विचार करें तो हमें एक बिन्दु प्राप्त होगा जिसके निर्देशांक $(1, 0)$ होंगे।

यदि $\theta = \frac{\pi}{2}$ हो, तो इकाई वृत्त पर संगत बिन्दु के निर्देशांक $(0, 1)$ होंगे।

ऊपर दी गई आकृतियों से हमें पता चलता है कि बिन्दु की स्थिति चाहे कुछ भी हो, प्रत्येक वास्तविक संख्या θ के लिए एक अद्वितीय क्रमित युग्म (x, y) होता है। x और y का मान ऋणात्मक या धनात्मक होता है, तथा यह इस बात पर निर्भर करता है कि बिन्दु किस चतुर्थांश में है।

एक इकाई वृत्त में किसी बिन्दु $P(x, y)$ के लिए त्रिकोणमितीय फलन निम्न प्रकार से परिभाषित किए जा सकते हैं :

$$\sin\theta = y,\ \cos\theta = x,\ \tan\theta = \frac{y}{x} \text{ (जबकि } x \neq 0)$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} \text{ (जबकि } y \neq 0),\ \sec\theta = \frac{1}{x} \text{ (जबकि } x \neq 0),\ \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{y} \text{ (जबकि } y \neq 0)$$

माना कि बिन्दु 'P' अपनी मूल स्थिति से वामावर्त दिशा में गति करता है। तब चारों चतुर्थांशों में बिन्दु 'P' की विभिन्न स्थितियों के लिए, विभिन्न कोण 'θ' बनेंगे। ऊपर की गई चर्चा को हम निम्न प्रकार से भी बता सकते हैं। 'θ' के मान पर निर्भर करते हुए,

I चतुर्थांश में, x और y धनात्मक होंगे।

II चतुर्थांश में, x ऋणात्मक तथा y धनात्मक होगा।

III चतुर्थांश में, x और y ऋणात्मक होंगे।

IV चतुर्थांश में, x धनात्मक तथा y ऋणात्मक होगा।

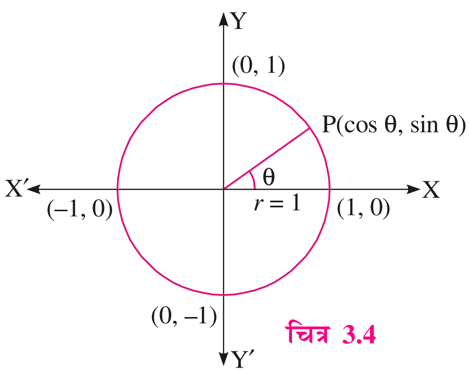
या इस प्रकार लिख सकते हैं :

I चतुर्थांश	II चतुर्थांश	III चतुर्थांश	IV चतुर्थांश
सभी धनात्मक	sine धनात्मक	tan धनात्मक	cos धनात्मक
	cosec धनात्मक	cot धनात्मक	sec धनात्मक

किस चतुर्थांश में क्या धनात्मक होगा, इसे याद रखने के लिए निम्न को देखिए :

	सभी	sin	tan	cos
चतुर्थांश	I	II	III	IV

यदि एक इकाई वृत्त में एक बिन्दु 'P' के निर्देशांक (x, y) हैं और इस बिन्दु की स्थिति से वास्तविक संख्या 'θ' बनती हो, तब $\sin\theta = y$ और $\cos\theta = x$ होगा। इसका अर्थ है कि बिन्दु के निर्देशांक $(\cos\theta, \sin\theta)$ भी लिखे जा सकते हैं।



चित्र 3.4

आकृति 3.4 में, आप देखेंगे कि जब बिंदु 'P' इकाई वृत्त पर गति करता है, तो x का मान '–1' और '+1' के बीच में स्थित होता है साथ ही 'y' की स्थिति में भी ऐसी ही होती है।

इस प्रकार, इकाई वृत्त पर, प्रत्येक 'P' के लिए $-1 \le x \le 1$ और $-1 \le y \le 1$ इससे हम निष्कर्ष निकालते हैं कि 'θ' के प्रत्येक मान के लिए, $-1 \le \cos\theta \le 1$ और $-1 \le \sin\theta \le 1$

अर्थात् $\cos\theta$ और $\sin\theta$ के मान कभी भी '1' से अधिक नहीं हो सकते हैं, तथा –1 से कम नहीं हो सकते।

उदाहरण 3.5. निम्नलिखित फलनों के चिह्न ज्ञात कीजिये :

(i) $\sin\frac{7\pi}{18}$ (ii) $\cos\frac{4\pi}{9}$ (iii) $\tan\frac{5\pi}{9}$

हल : (i) क्योंकि $\frac{7\pi}{18}$ प्रथम चतुर्थांश में स्थित है, इसलिए $\sin\frac{7\pi}{18}$ का चिह्न धनात्मक होगा।

(ii) क्योंकि $\frac{4\pi}{9}$ प्रथम चतुर्थांश में स्थित है, इसलिए $\cos\frac{4\pi}{9}$ का चिह्न धनात्मक होगा।

(iii) क्योंकि $\frac{5\pi}{9}$ द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है, इसलिए $\tan\frac{5\pi}{9}$ का चिह्न ऋणात्मक होगा।

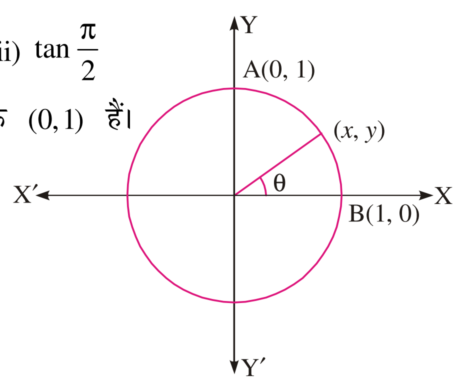
उदाहरण 3.6. मान ज्ञात कीजिए : (i) $\sin\frac{\pi}{2}$ (ii) $\cos 0$ (iii) $\tan\frac{\pi}{2}$

हल : चित्र 3.5 में, हम देखते हैं कि बिन्दु 'A' के निर्देशांक $(0, 1)$ हैं।

$\therefore$ $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, क्योंकि $\sin\theta = y$ है।

(ii) बिन्दु 'B' के निर्देशांक $(1, 0)$ हैं।

$\therefore$ $\cos 0 = 1$, क्योंकि $\cos\theta = x$ है।



चित्र 3.5

मॉड्यूल - I

समुच्चय, संबंध एवं फलन

टिप्पणी

(iii) $\tan\frac{\pi}{2} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0}$, जो परिभाषित नहीं है।

अतः, $\tan\frac{\pi}{2}$ परिभाषित नहीं है।

उदाहरण 3.7. $\cos\theta$ के अधिकतम और न्यूनतम मान लिखिए।

हल : हम जानते हैं कि $-1 \le \cos\theta \le 1$ होता है

$\therefore$ $\cos\theta$ का अधिकतम मान '1' है और न्यूनतम मान '–1' है।

देखें आपने कितना सीखा 3.3

1. निम्नलिखित के चिह्न ज्ञात कीजिये :

(i) $\cos\frac{2\pi}{3}$ (ii) $\tan\frac{5\pi}{6}$ (iii) $\sec\frac{2\pi}{3}$ (iv) $\sec\frac{35\pi}{18}$

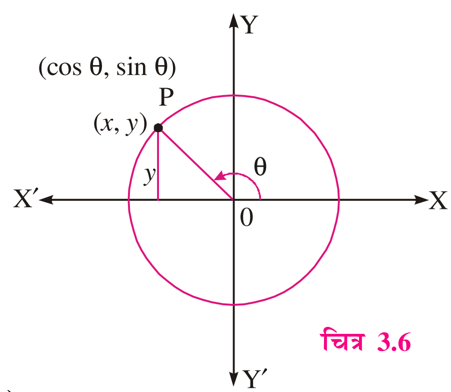
(v) $\tan\frac{25\pi}{18}$ (vi) $\cot\frac{3\pi}{4}$ (vii) $\operatorname{cosec}\frac{8\pi}{3}$ (viii) $\cot\frac{7\pi}{8}$

2. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिये :

(i) $\cos\frac{\pi}{2}$ (ii) $\sin 0$ (iii) $\cos\frac{2\pi}{3}$ (iv) $\tan\frac{3\pi}{4}$

(v) $\sec 0$ (vi) $\tan\frac{\pi}{2}$ (vii) $\tan\frac{3\pi}{2}$ (viii) $\cos 2\pi$

3.2.1 त्रिकोणमितीय फलनों में सम्बन्ध



चित्र 3.6

परिभाषा के अनुसार, $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$

क्योंकि $\tan\theta = \frac{y}{x}$, $(x \ne 0)$ है, इसलिए

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \theta \ne \frac{n\pi}{2},\ n \in z$$

और $$\cot\theta = \frac{x}{y},\ (y \ne 0)$$

अर्थात् $$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta} \qquad (\theta \ne n\pi)$$

इसी प्रकार, $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ $\left(\theta \ne \dfrac{n\pi}{2}\right)$ और $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ $(\theta \ne n\pi)$

पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग कर के, हमें प्राप्त होता है : $x^2 + y^2 = 1$

अर्थात् $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$ या $\mathbf{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$

टिप्पणी: $(\cos\theta)^2$ को $\cos^2\theta$ और $(\sin\theta)^2$ को $\sin^2\theta$ लिखा जाता है।

पुनः $x^2 + y^2 = 1$ या $1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$, $x \neq 0$ के लिए या, $1 + (\tan\theta)^2 = (\sec\theta)^2$

अर्थात् $\mathbf{\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta}$

इसी प्रकार, $\mathbf{\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta}$

उदाहरण 3.8. सिद्ध कीजिये कि $\sin^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta$

हल : बायाँ पक्ष $= \sin^4\theta + \cos^4\theta = \sin^4\theta + \cos^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta - 2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta \quad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

= दायाँ पक्ष

उदाहरण 3.9. सिद्ध कीजिये कि $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$

हल : बायाँ पक्ष $= \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}} = \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}} = \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}$

$= \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sec\theta - \tan\theta =$ दायाँ पक्ष

उदाहरण 3.10. यदि $\sin\theta = \frac{21}{29}$ हो, तो सिद्ध कीजिये कि $\sec\theta + \tan\theta = -2\frac{1}{2}$ है, जबकि 'θ' द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है।

हल : $\sin\theta = \frac{21}{29}$ हम जानते हैं कि $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\Rightarrow \quad \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{441}{841} = \frac{400}{841} = \left(\frac{20}{29}\right)^2$

$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{-20}{29}$ ($\cos\theta$ ऋणात्मक होगा, क्योंकि 'θ' द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है)

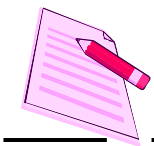
$\therefore \quad \tan\theta = -\frac{21}{20}$ (tan ऋणात्मक होगा, क्योंकि 'θ' द्वितीय चतुर्थांथ में स्थित है)

$\therefore \quad \sec\theta + \tan\theta = \frac{-29}{20} + \frac{-21}{20} = \frac{-29-21}{20} = -\frac{5}{2} = -2\frac{1}{2} =$ दायाँ पक्ष

देखें आपने कितना सीखा 3.4

1. सिद्ध कीजिये कि $\sin^4\theta - \cos^4\theta = \sin^2\theta - \cos^2\theta$

2. यदि $\tan\theta = \frac{1}{2}$ हो, तो शेष 5 त्रिकोणमितीय फलनों के मान ज्ञात कीजिये। यदि 'θ' प्रथम चतुर्थांश में स्थित हैं।



टिप्पणी

3. यदि $\operatorname{cosec}\theta = \frac{b}{a}$ हो, तो शेष 5 त्रिकोणमितीय फलनों के मान ज्ञात कीजिये, जबकि θ पहले चतुर्थांश में स्थित है।

4. सिद्ध कीजिये कि $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

5. यदि $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = 1.5$ हो, तो सिद्ध कीजिये कि $\cos\theta = \frac{5}{13}$

6. यदि $\tan\theta + \sec\theta = m$ हो, तो $\cos\theta$ का मान ज्ञात कीजिये।

7. सिद्ध कीजिये कि $(\tan A + 2)(2\tan A + 1) = 5\tan A + 2\sec^2 A$

8. सिद्ध कीजिये कि $\sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$

9. सिद्ध कीजिये कि $\frac{\cos\theta}{1-\tan\theta} + \frac{\sin\theta}{1-\cot\theta} = \cos\theta + \sin\theta$

10. सिद्ध कीजिये कि $\frac{\tan\theta}{1+\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \cot\theta + \operatorname{cosec}\theta \cdot \sec\theta$

11. यदि $\sec x = \frac{13}{5}$ तथा x चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित है, तो शेष पाँच त्रिकोणमितीय फलनों के मान ज्ञात कीजिए।

3.3 कुछ विशिष्ट वास्तविक संख्याओं के त्रिकोणमितीय फलन

$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ और $\frac{\pi}{2}$ के त्रिकोणमितीय फलनों के मान नीचे तालिका में दिए गए हैं :

वास्तविक संख्याएँ → θ / फलन ↓	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	परिभाषित नहीं है

इस तालिका को याद रखने के लिए, sin फलन को निम्न प्रतिरूप में याद रख सकते हैं :

$$\sqrt{\frac{0}{4}}, \sqrt{\frac{1}{4}}, \sqrt{\frac{2}{4}}, \sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt{\frac{4}{4}}$$

इनको सरल करने पर, तालिका में दिए गए मान प्राप्त होंगे। cosines कोसाइनों के मान इसके उलटे क्रम में होते हैं।

उदाहरण 3.11. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$ (b) $4\tan^2\frac{\pi}{4}-\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{6}-\cos^2\frac{\pi}{3}$

हल : (a) $\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

(b) $4\tan^2\frac{\pi}{4}-\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{6}-\cos^2\frac{\pi}{3}=4(1)^2-(2)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=4-4-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$

उदाहरण 3.12. यदि $A=\frac{\pi}{3}$ और $B=\frac{\pi}{6}$ हो, तो सत्यापित कीजिये कि

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

हल : बायाँ पक्ष $=\cos(A+B)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$

दायाँ पक्ष $=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}=0$

$\therefore$ बायाँ पक्ष $= 0 =$ दायाँ पक्ष

अतः $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

देखें आपने कितना सीखा 3.5

1. मान ज्ञात कीजिये :

   (i) $\sin^2\frac{\pi}{6}+\tan^2\frac{\pi}{4}+\tan^2\frac{\pi}{3}$ (ii) $\sin^2\frac{\pi}{3}+\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{6}+\sec^2\frac{\pi}{4}-\cos^2\frac{\pi}{3}$

   (iii) $\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}$ (iv) $4\cot^2\frac{\pi}{3}+\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{4}+\sec^2\frac{\pi}{3}\tan^2\frac{\pi}{4}$

   (v) $\left(\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{4}$

2. दर्शाइए कि : $\left(1+\tan\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{3}\right)+\left(\tan\frac{\pi}{6}-\tan\frac{\pi}{3}\right)=\sec^2\frac{\pi}{6}\sec^2\frac{\pi}{3}$

3. यदि $A=\frac{\pi}{3}$ और $B=\frac{\pi}{6}$ हो, तो सत्यापित कीजिये :

   (i) $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$ (ii) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

4. यदि $\theta=\frac{\pi}{4}$ हो, तो निम्नलिखित को सत्यापित कीजिये : (i) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

   (ii) $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$

5. यदि $A = \frac{\pi}{6}$ हो, तो सत्यापित कीजिये :

(i) $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ (ii) $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$ (iii) $\sin 2A = 2\sin A \cos A$

3.4 त्रिकोणमितीय फलनों के आलेख

किसी दिए गए फलन को शीघ्रता से समझने में चित्र या आलेखीय निरूपण सीखने वाले व देखने वाले के मस्तिष्क पर एक अमिट छाप बना देते हैं। फलन के आलेख के महत्वपूर्ण होने का कारण है कि इससे फलन के बहुत से गुण सुविधाजनक रूप में प्रस्तुत किये जा सकते हैं। आलेख को देखकर हम फलन के बहुत से गुणों की जाँच कर सकते है, जैसे–

(i) आवर्तिता (ii) अन्तराल जिसमें फलन वर्धमान (increasing) या ह्रासमान (decreasing) है।

(iii) अक्षों के परित सममिति (iv) आलेख के दिए गए अन्तराल में अधिकतम व न्यूनतम बिन्दु

यह आलेख के वक्रों के द्वारा परिबद्ध भागों के क्षेत्रफलों को आसानी से ज्ञात करने में भी सहायता करता है।

3.4.1 $\sin\theta$ का आलेख, जबकि 'θ' का मान सतत 0 से 2π तक परिवर्तित (विचरित) होता है।

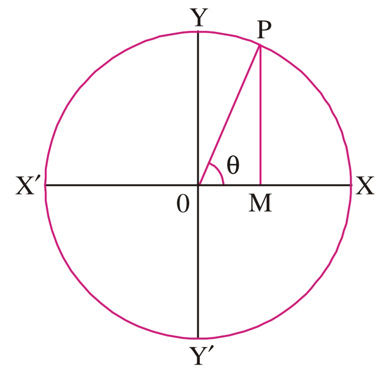
माना $X'OX$ और $Y'OY$ निर्देशांक अक्ष हैं।

केन्द्र 'O' और त्रिज्या (अर्द्धव्यास) OP = इकाई लेकर एक वृत्त खींचिए।

माना OP, OX से आरम्भ करके वामावर्त दिशा में गतिमान है तथा x-अक्ष के साथ 'θ' कोण बनाती है, अर्थात् $\angle XOP = \theta$।

$PM \perp X'OX$ खींचिए। तब $\sin\theta = MP$ होगा, क्योंकि $OP = 1$।

$\therefore$ $\sin\theta$ और MP के विचरण एक समान हैं।



चित्र 3.7

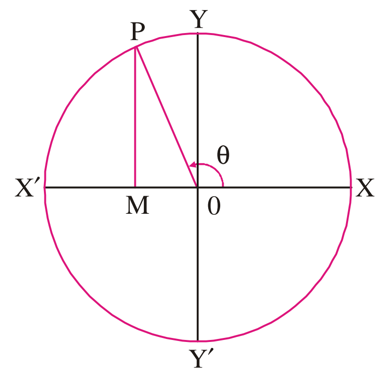
I चतुर्थांश

जब 'θ', 0 से $\frac{\pi}{2}$ तक सतत् बढ़ता है, तब MP धनात्मक है और यह 0 से 1 तक बढ़ता है।

$\therefore$ $\sin\theta$ धनात्मक है।

II चतुर्थांश $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

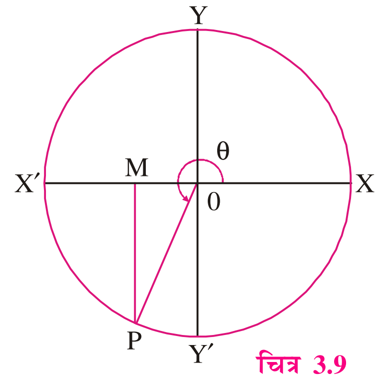
इस अन्तराल में, θ दूसरे चतुर्थांश में होता है। इसलिए बिन्दु 'P' भी केवल दूसरे चतुर्थांश में आता है। यहाँ भी $PM = y$ धनात्मक है, परन्तु जैसे-जैसे 'θ', $\frac{\pi}{2}$ से π तक विचरण करता है इसका मान '1' से '0' तक कम होता जाता है । अत: इस अन्तराल में $\sin\theta$ धनात्मक होता है।



चित्र 3.8

III चतुर्थांश $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

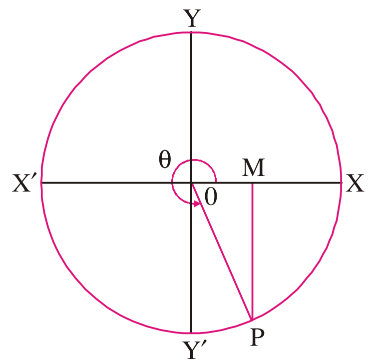
इस अन्तराल में, 'θ' तीसरे चतुर्थांश में होता है। अतः बिन्दु 'P' केवल तीसरे चतुर्थांश में ही रहता है। इसलिए $PM = y$ ऋणात्मक है और जैसे-जैसे 'θ' का मान π से $\frac{3\pi}{2}$ तक विचरण करता है इसका मान '0' से –1 तक घटता जाता है। इस अन्तराल में $\sin\theta$ का मान '0' से – 1 तक घटता जाता है। अतः, इस अन्तराल में $\sin\theta$ ऋणात्मक होता है।



चित्र 3.9

IV चतुर्थांश $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

इस अन्तराल में, θ चौथे चतुर्थांश में होता है। इसलिए, बिन्दु P केवल इस चौथे चतुर्थांश में ही रहता है। यहाँ भी $PM = y$ ऋणात्मक है, परन्तु जैसे-जैसे 'θ' का मान $\frac{3\pi}{2}$ से 2π तक विचरण करता है –1 से 0 तक बढ़ता है । अतः, इस अन्तराल में $\sin\theta$ ऋणात्मक होता है।

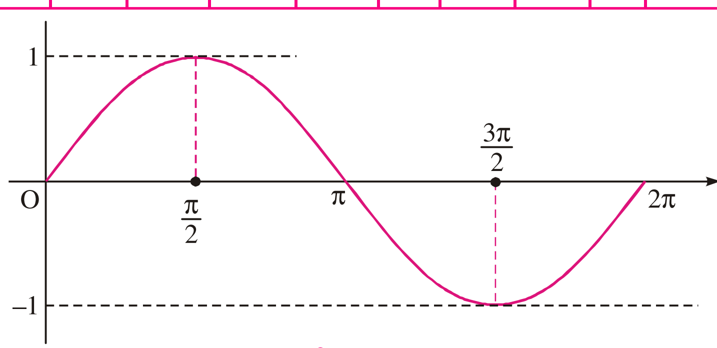


चित्र 3.10

3.4.2 sin θ का आलेख जब θ का मान '0' से 2π तक विचरण करता है।

माना $X'OX$ तथा $Y'OY$ इस संदर्भ में दो निर्देशांक अक्ष हैं। θ के मानों को x-अक्ष के अनुदिश तथा $\sin\theta$ के मानों को y-अक्ष के अनुदिश मापा जायेगा। ($\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ और $\frac{\sqrt{3}}{2}$ के लगभग मान क्रमशः 1.41, .707 और .87 हैं।)

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\theta$	0	.5	.87	1	.87	.5	0	–.5	–.87	–1	–.87	–.5	0



चित्र 3.11

कुछ प्रेक्षण:

(i) $\sin\theta$ का अधिकतम मान 1 है।

(ii) $\sin\theta$ का न्यूनतम मान – 1 है।

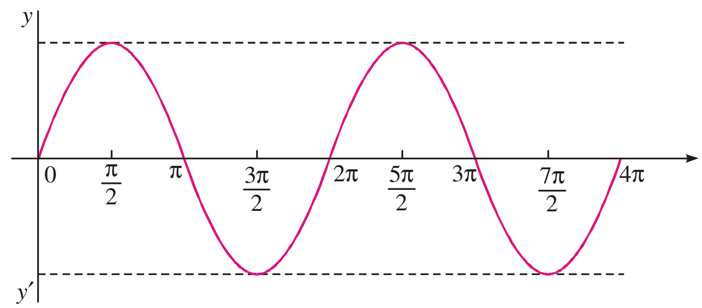
(iii) यह सभी स्थान पर सतत (continuous) है।

(iv) यह 0 से $\frac{\pi}{2}$ तक तथा $\frac{3\pi}{2}$ से 2π तक वर्धमान है तथा $\frac{\pi}{2}$ से $\frac{3\pi}{2}$ तक ह्रासमान है।

चित्र 3.11 के आलेख की सहायता से हम सदैव $y = \sin\theta$ का एक अन्य आलेख अन्तराल $[2\pi, 4\pi]$ में खींच सकते हैं (देखिये चित्र 3.12)।

आप क्या देखते हैं?

$y = \sin\theta$ का आलेख अन्तराल $[2\pi, 4\pi]$ में वही है, जो $\sin\theta$ का आलेख 0 से 2π के अन्तराल में है। अत: इस आलेख को गुण $\sin(2\pi + \theta) = \sin\theta$ का उपयोग करके खींचा जा सकता है। जब 'θ' के मान में '2π' की वृद्धि की जाती है, तब $\sin\theta$ के मानों की पुनरावृति होती है। यही $\sin\theta$ की आवर्तित (Periodicity) कहलाता है।



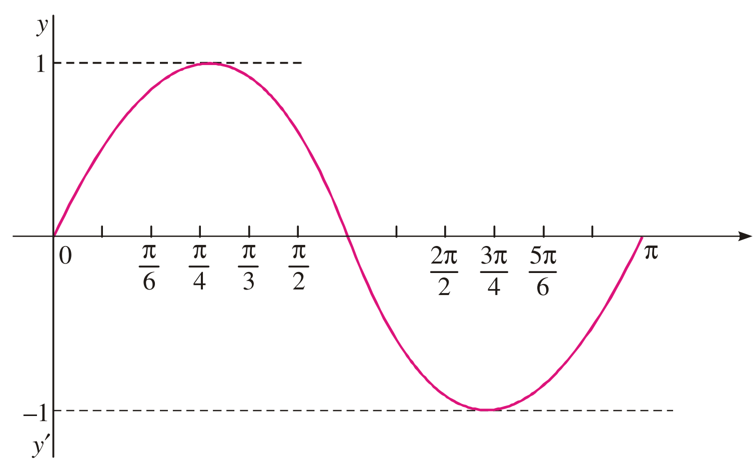
चित्र 3.12

हम इस आवर्तिता (Periodicity) के बारे में पूरी चर्चा इस पाठ में बाद में करेंगे।

उदाहरण 3.13. $y = \sin 2\theta$ का आलेख खींचिए।

हल :

θ :	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
2θ :	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$\sin 2\theta$:	0	.87	1	.87	0	–.87	–1	–.87	0



चित्र 3.13

यह आलेख उसी प्रकार का है, जैसा $y = \sin\theta$ $0 \le \theta \le 2\pi$, का था।

कुछ प्रेक्षण:

1. $\sin\theta$ के अन्य आलेखों, जैसे $a\sin\theta$, $3\sin 2\theta$, को भी इसी विधि द्वारा खींचा जा सकता है।

2. $\sin\theta$ के आलेख, अन्य अन्तरालों जैसे $[4\pi, 6\pi]$, $[-2\pi, 0]$, $[-4\pi, -2\pi]$ में भी आसानी से खींचे जा सकते हैं। यह सम्बद्ध कोणों के गुणों जैसे $\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$, $\sin(\theta - 2\pi) = \sin\theta$, आदि का उपयोग करके किया जा सकता है। अर्थात् 'θ' के मानों में जब 2π की वृद्धि या कमी की जाती है, तो $\sin\theta$ की पुनरावृति होती है।

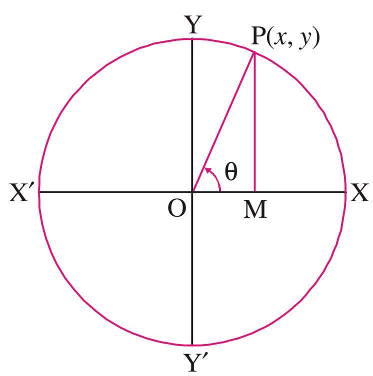
देखें आपने कितना सीखा 3.6

1. अंतराल $[0, 2\pi]$ में $\sin\theta$ के अधिकतम और न्यूनतम मान क्या है ?
2. अंतराल $[0, 2\pi]$ में $\sin\theta$ के आलेख में सममिति को स्पष्ट कीजिए।
3. $y = 2\sin\theta$ का अन्तराल $[0, \pi]$ में आलेख खींचिए।
4. अंतराल $[\pi, 2\pi]$ में θ के किस मान के लिए $\sin\theta$ का मान

   (a) $-\dfrac{1}{2}$ होगा ? (b) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ होगा ?
5. अन्तराल $[-\pi, \pi]$ में $y = \sin x$ का आलेख खींचिए।

3.4.3 $\cos\theta$ का आलेख, जब θ का मान 0 से 2π तक विचरण करता है।

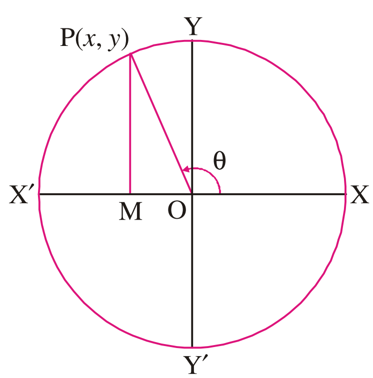
$\sin\theta$ की तरह हम $\cos\theta$ के मानों में परिवर्तन पर भी चर्चा करेंगे, जब θ के मान अन्तरालों $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ और $\left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ में हैं।



चित्र 3.14

I चतुर्थांश : अन्तराल $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ में, बिन्दु P प्रथम चतुर्थांश में आता है। इसलिए $OM = x$ धनात्मक है, परन्तु जैसे-जैसे θ का मान 0 से $\dfrac{\pi}{2}$ तक बढ़ता है, x का मान 1 से 0 तक घटता है। इस प्रकार, इस अन्तराल में $\cos\theta$, 1 से 0 तक घटता है (चित्र 3.14)।

$\therefore$ $\cos\theta$ इस चतुर्थांश में धनात्मक है।



चित्र 3.15

II चतुर्थांश : अन्तराल $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ में, बिन्दु P दूसरे चतुर्थांश में आता है। इसलिए बिन्दु M, x-अक्ष के ऋणात्मक भाग में स्थित है। अत: इस स्थिति में, $OM = x$ ऋणात्मक है और 0 से -1 तक कम होता है, जैसे-जैसे θ, $\dfrac{\pi}{2}$ से π तक बढ़ता है।

अत: इस अन्तराल में $\cos\theta$ का मान 0 से -1 तक घटता है।

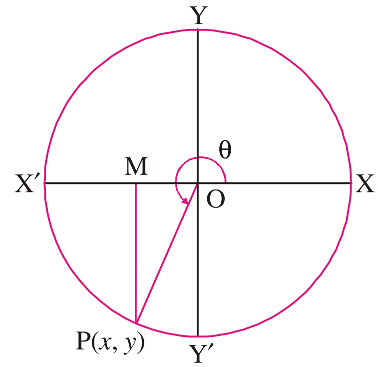
$\therefore$ $\cos\theta$ ऋणात्मक है।

मॉड्यूल - I
समुच्चय, संबंध एवं फलन

टिप्पणी

III चतुर्थांश : अन्तराल $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ में, बिन्दु P तीसरे चतुर्थांश में आता है, इसलिए $OM = x$ ऋणात्मक रहता है, क्योंकि यह x-अक्ष की ऋणात्मक दिशा की ओर है। इसलिए $OM = x$ ऋणात्मक है, परन्तु -1 से 0 तक बढ़ता है, जैसे-जैसे θ का मान π से $\frac{3\pi}{2}$ तक बढ़ता है। इसलिए इस अन्तराल में $\cos\theta$, -1 से 0 तक बढ़ता है।

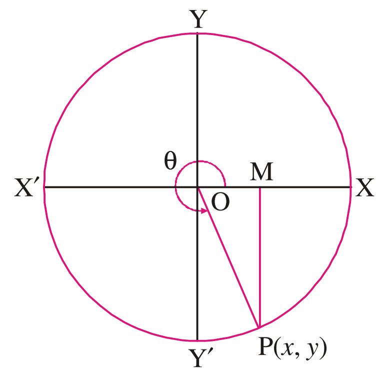
$\therefore$ $\cos\theta$ ऋणात्मक है।



चित्र 3.16

IV चतुर्थांश : अन्तराल $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ में, बिन्दु P चौथे चतुर्थांश में आता है और M, x-अक्ष की धनात्मक दिशा की ओर चलता है। इसलिए $OM = x$ धनात्मक है। जैसे-जैसे θ का मान $\frac{3\pi}{2}$ से 2π तक बढ़ता है, यह 0 से 1 तक बढ़ता है। इस प्रकार, इस अन्तराल में $\cos\theta$, 0 से 1 तक बढ़ता है।

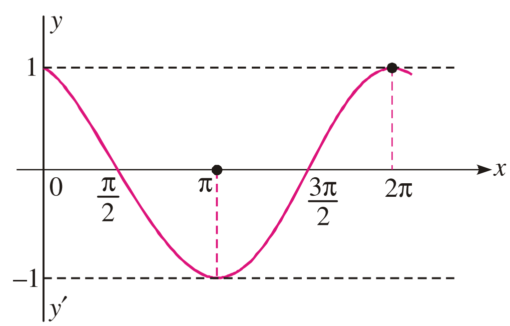
$\therefore$ $\cos\theta$ धनात्मक है।



चित्र 3.17

आइए हम θ के कुछ उपर्युक्त मानों के लिए कोसाइनों के मानों की सारणी बनाएँ।

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos\theta$	1	.87	.5	0	-0.5	$-.87$	-1	$-.87$	$-.5$	0	0.5	.87	1



चित्र 3.18

जबकि X'OX और Y'OY दोनो अक्ष हैं। θ के मान x-अक्ष के अनुदिश मापे जाते हैं तथा $\cos\theta$ के मान y-अक्ष के अनुदिश मापे जाते हैं।

कुछ प्रेक्षण:

(i) $\cos\theta$ का अधिकतम मान = 1

(ii) $\cos\theta$ का न्यूनतम मान = – 1

(iii) यह प्रत्येक स्थान पर सतत् है।

(iv) $\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$. तथा $\cos(\theta - 2\pi) = \cos\theta$

इसलिए $\cos\theta$ के मान की पुनरावृत्ति होती है, जब θ में 2π की वृद्धि होती है या कमी की जाती है। यह $\cos\theta$ की आवर्तिता कहलाती है, जिसके बारे में हम इस पाठ में बाद में चर्चा करेंगे।

(v) अन्तराल $[2\pi, 4\pi], [4\pi, 6\pi], [-2\pi, 0]$ में $\cos\theta$ का आलेख उसी प्रकार का होगा, जैसे अन्तराल $[0, 2\pi]$ में होता है।

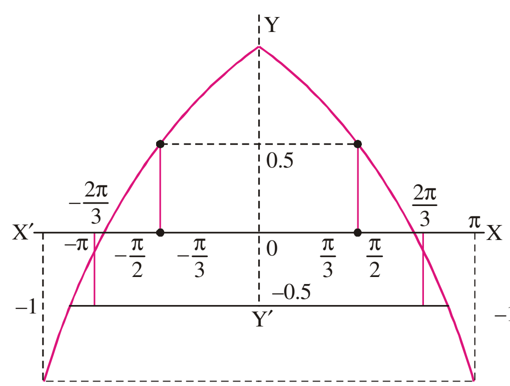
उदाहरण 3.14. $\cos\theta$ का आलेख खींचिए, जब θ, $-\pi$ से π तक विचरण करता है। आलेख से θ के मान पढ़िये जब $\cos\theta = \pm 0.5$ हों।

हलः

θ :	$-\pi$	$\frac{-5\pi}{6}$	$\frac{-2\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos\theta$:	–1.0	–0.87	–0.5	0	.50	.87	1.0	0.87	0.5	0	–0.5	–0.87	–1

$\cos\theta = 0.5$, जब $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}$

$\cos\theta = -0.5$, जब $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3}$

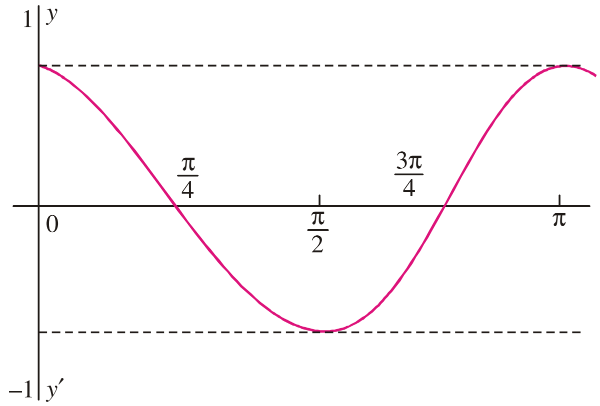


चित्र 3.19

उदाहरण 3.15. अन्तराल 0 से π तक में $\cos 2\theta$ का आलेख खीचिएँ।

हल :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
2θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$\cos 2\theta$	1	0.5	0	–0.5	–1	–0.5	0	0.5	1



चित्र 3.20

देखें आपने कितना सीखा 3.7

1. (a) $y = \cos\theta$ का आलेख खींचिए, जब θ , $-\frac{\pi}{4}$ से $\frac{\pi}{4}$ तक विचरण करता है।

   (b) $y = 3\cos\theta$ का आलेख खीचिए, जब $\theta, 0$ से 2π तक विचरण करता है।

   (c) $y = \cos 3\theta$ का $-\pi$ से π तक आलेख खींचिए तथा इस आलेख से θ के उन मानों को पढ़िए जब $\cos\theta = 0.87$ और $\cos\theta = -0.87$ है।

   (d) क्या $y = \cos\theta$ का आलेख अंतराल $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ में x अक्ष के ऊपर या नीचे स्थित है?

   (e) $y = \cos\theta$ का आलेख अन्तराल $[2\pi, 4\pi]$ में खींचिए।

3.4.4 tan θ का आलेख, जब θ का मान 0 से 2π तक विचरण करता है।

I चतुर्थांश में : $\tan\theta$ को $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ के रूप में लिखा जा सकता है।

$\tan\theta$ का व्यवहार $\sin\theta$ और $\frac{1}{\cos\theta}$ पर निर्भर करता है।

I चतुर्थांश में, $\sin\theta$ का मान 0 से 1 तक बढ़ता है और $\cos\theta$ का मान 1 से 0 तक कम होता है।

परन्तु $\frac{1}{\cos\theta}$ का मान 1 से अपरिमित रूप तक बढ़ता है (इसे 1 से ∞ तक बढ़ता है, लिखा जा सकता है) $\therefore \tan\theta > 0$ $\quad\therefore$ $\tan\theta$ का मान 0 से ∞ तक बढ़ता है [$\tan\theta$ की सारणी व आलेख देखिए]

II चतुर्थांश में : $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\sin\theta$ का मान 1 से 0 तक घटता है।

$\cos\theta$ का मान 0 से – 1 तक घटता है।, $\tan\theta$ ऋणात्मक है और इसका मान $-\infty$ से 0 तक बढ़ता है।

III चतुर्थांश में: $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\sin\theta$ का मान 0 से –1 तक घटता है।

$\cos\theta$ का मान – 1 से 0 तक बढ़ता है।

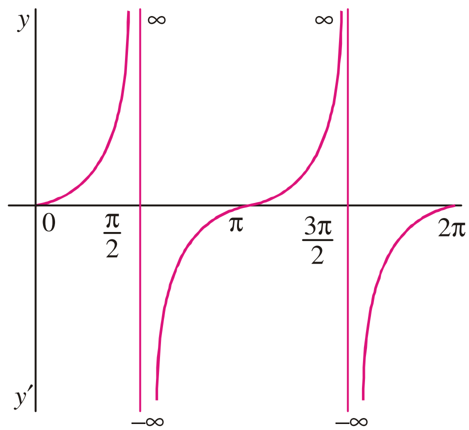
$\therefore$ $\tan\theta$ धनात्मक है और 0 से ∞ तक बढ़ता है।

IV चतुर्थांश में: $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\sin\theta$ का मान -1 से 0 तक बढ़ता है।

$\cos\theta$ का मान 0 से 1 तक बढ़ता है। $\therefore$ $\tan\theta$ ऋणात्मक है और $-\infty$ से 0 तक बढ़ता है।

tan θ का आलेख

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}-0°$	$\frac{\pi}{2}+0°$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}-0°$	$\frac{3\pi}{2}+0°$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
tan θ	0	.58	1.73	$+\infty$	-1.73	-.58	0	.58	1.73	$+\infty$	$-\infty$	-1.73	-.58	0	0



चित्र 3.21

प्रेक्षण:

(i) $\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$ इसलिए $\tan\theta$ के पूर्ण आलेख में उपरोक्त आलेख दायीं तथा बायीं दोनो ओर अपरिमित रूप से आवर्तित होता है।

(ii) क्योंकि $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ है इसलिए यदि $(\theta, \tan\theta)$ आलेख पर कोई एक बिन्दु है, तो $(-\theta, -\tan\theta)$ भी आलेख पर एक बिन्दु होगा।

(iii) उपरोक्त परिणामों से यह कहा जा सकता है कि $y = \tan\theta$ का आलेख सम्मुख चतुर्थांशों में सममित होता है।

(iv) $\tan\theta$ का कोई भी संख्यात्मक मान, धनात्मक या ऋणात्मक, हो सकता है।

(v) $\tan\theta$ का आलेख असतत है। यह बिन्दुओं $\theta = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ पर विच्छेदित है।

(vi) जब θ इन मानों के बराबर होता है, तब $\tan\theta$ का मान आकस्मिक रूप से $+\infty$ से $-\infty$ बदल जाता है।

3.4.5 cot θ का आलेख, जब θ का मान 0 से 2π तक विचरण करता है।

$\cot\theta$ का व्यवहार $\cos\theta$ और $\dfrac{1}{\sin\theta}$ के व्यवहार पर निर्भर करता है, क्योंकि $\cot\theta = \cos\theta \times \dfrac{1}{\sin\theta}$ है। हम प्रत्येक चतुर्थांश में इसकी चर्चा करेंगे।

I चतुर्थांश : $\cot\theta = \cos\theta \times \dfrac{1}{\sin\theta}$, $\cos\theta$ का मान 1 से 0 तक घटता है।, $\sin\theta$ का मान 0 से 1 तक बढ़ता है।

$\therefore$ $\cot\theta$ का मान भी $+\infty$ से 0 तक घटता है, परन्तु $\cot\theta > 0$ होता है।

II चतुर्थांश : $\cot\theta = \cos\theta \times \dfrac{1}{\sin\theta}$, $\cos\theta$ का मान 0 से -1 तक घटता है, $\sin\theta$ का मान 1 से 0 तक घटता है।

$\Rightarrow$ $\cot\theta < 0$ या $\cot\theta$ का मान 0 से $-\infty$ तक घटता है।

III चतुर्थांश : $\cos\theta$ का मान -1 से 0 तक बढ़ता है, $\sin\theta$ का मान 0 से -1 तक घटता है।

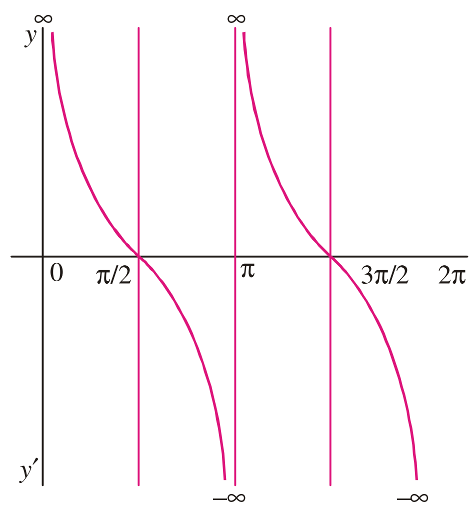
$\therefore$ $\cot\theta$ का मान $+\infty$ से 0 तक घटता है।

IV चतुर्थांश: $\cot\theta = \cos\theta \times \dfrac{1}{\sin\theta}$, $\cos\theta$ का मान 0 से 1 तक बढ़ता है, $\sin\theta$ का मान -1 से 0 तक बढ़ता है।

$\therefore$ $\cot\theta < 0$ अर्थात् $\cot\theta$ का मान 0 से $-\infty$ तक घटता है।

$\cot\theta$ **का आलेख :**

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi-0$	$\pi+0$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cot\theta$	∞	1.73	.58	0	-.58	-1.73	$-\infty$	$+\infty$	1.73	.58	0	-.58	-1.73	$-\infty$



चित्र 3.22

प्रेक्षणः

(i) क्योंकि $\cot(\pi+\theta) = \cot\theta$, इसलिए $\cot\theta$ के पूर्ण आलेख में, $\theta = 0$ से $\theta = \pi$ या $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ से $\dfrac{3\pi}{2}$ तक का भाग सम्मिलत होता है।

(ii) $\cot\theta$ का संख्यात्मक मान धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है।

(iii) $\cot\theta$ का आलेख असतत है। यह $\theta = 0, \pi, 2\pi$ पर विच्छेदित है।

(iii) जैसे θ के मान 0, π और 2π होते हैं, वैसे ही $\cot\theta$ आकस्मिक रूप से $-\infty$ से $+\infty$ में परिवर्तित हो जाता है।

देखें आपने कितना सीखा 3.8

1. (a) $\tan\theta$ का अधिकतम मान क्या है ?

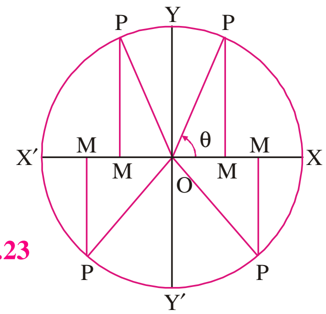
   (b) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ पर $\tan\theta$ के मान में आप क्या परिवर्तन देखते हैं ?

   (c) $-\pi$ से π तक $y = \tan\theta$ का आलेख खींचिए। अपने आलेख से θ का वह मान ज्ञात कीजिए, जिसके लिए $\tan\theta = 1.7$।

2. (a) $\cot\theta$ का अधिकतम मान क्या है ?

   (b) $\cot\theta$ के आलेख से θ का मान ज्ञात कीजिए जब $\cot\theta = -1$।

3.4.6 θ के विभिन्न मानों के लिए sec θ के मान ज्ञात कर आलेख खींचना, जब θ का मान 0 से 2π तक विचरण करता है।

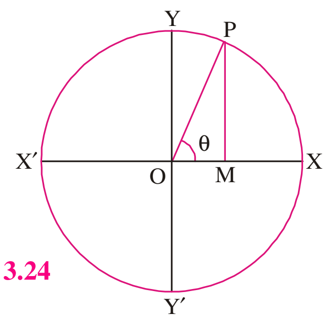


चित्र 3.23

माना $X'OX$ और $Y'OY$ निर्देशांक अक्ष हैं। O को केन्द्र लेकर इकाई त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। माना P वृत्त पर एक बिन्दु है। OP को मिलाइए और $PM \perp X'OX$ खींचिए।

$$\sec\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{1}{OM}$$

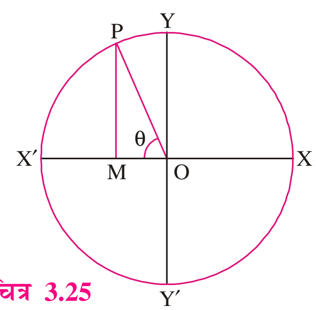
$\therefore$ $\sec\theta$ के मान OM पर निर्भर करेंगे।



चित्र 3.24

I चतुर्थांश: $\sec\theta$ धनात्मक है, क्योंकि OM धनात्मक है। साथ ही $\sec\theta = 1$ और $\sec\frac{\pi}{2} \to \infty$ है, जब हम $\frac{\pi}{2}$ की ओर दायीं ओर से अग्रसर होते हैं।

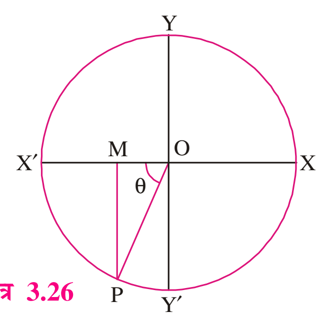
$\therefore$ $\sec\theta$ का मान 1 से ∞ तक बढ़ता है, जैसे-जैसे θ का मान 0 से $\frac{\pi}{2}$ तक बढ़ता है।



चित्र 3.25

II चतुर्थांश: $\sec\theta$ ऋणात्मक है, क्योंकि OM ऋणात्मक है। $\sec\frac{\pi}{2} \to -\infty$, जब हम $\frac{\pi}{2}$ की ओर बायीं ओर से अग्रसर होते हैं। साथ ही $\sec\pi = -1$ है।

$\therefore$ जब θ का मान $\frac{\pi}{2}$ से π तक विचरण करता है, $\sec\theta$ का मान $-\infty$ से -1 तक बदलता है। ऐसा देखा गया है कि जब θ, $\frac{\pi}{2}$ से होकर गुजर जाता है, $\sec\theta$ का मान $+\infty$ से $-\infty$ में बदल जाता है।



चित्र 3.26

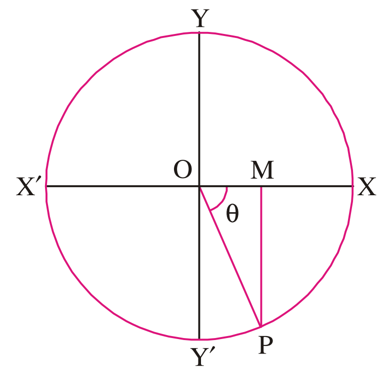
III चतुर्थांश : $\sec\theta$ ऋणात्मक है, क्योंकि OM ऋणात्मक है।

$\sec\pi = -1$ और $\sec\frac{3\pi}{2} \to -\infty$ है। जब कोण वामावर्त दिशा में $\frac{3\pi}{2}$ की ओर अग्रसर होता है। $\sec\theta$ का मान -1 से $-\infty$ तक

घटता जाता है, जैसे-जैसे θ का मान π से, $\frac{3\pi}{2}$ तक विचरण करता है।

IV चतुर्थांश: $\sec\theta$ धनात्मक है, क्योंकि OM धनात्मक है।

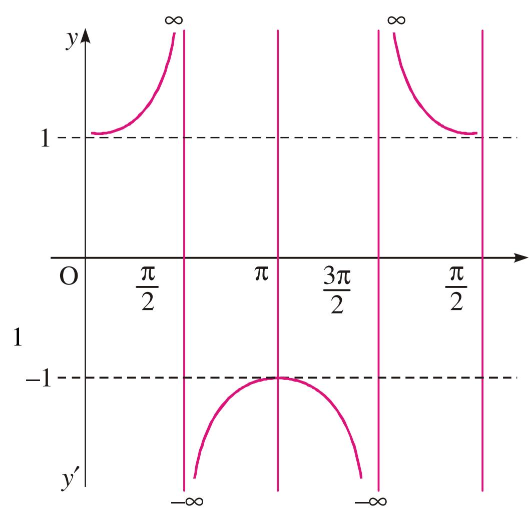
जब θ का मान $\frac{3\pi}{2}$ से कुछ ही बड़ा होता है, तो $\sec\theta$ धनात्मक तथा बहुत बड़ा होता है। साथ ही $\sec 2\pi = 1$ है, अतः $\sec\theta$ का मान ∞ से 1 तक घटता जाता है, जब θ, $\frac{3\pi}{2}$ से 2π तक विचरण करता है। यह देखा जा सकता है कि जब θ, $\frac{3\pi}{2}$ से होकर जाता है, तो $\sec\theta$ का मान $-\infty$ से $+\infty$ बदल जाता है



चित्र 3.27

$\sec\theta$ का आलेख, जब θ का मान 0 से 2π तक विचरण करता है।

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}-0$	$\frac{\pi}{2}+0$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}-0$	$\frac{3\pi}{2}+0$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
cot θ	1	1.15	2	$+\infty$	$-\infty$	-2	-1.15	-1	-1.15	-2	$-\infty$	$+\infty$	2	1.15	



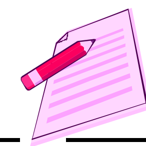
चित्र 3.28

प्रेक्षण:

(a) $\sec\theta$ का संख्यात्मक मान '1' से कम नहीं हो सकता है।

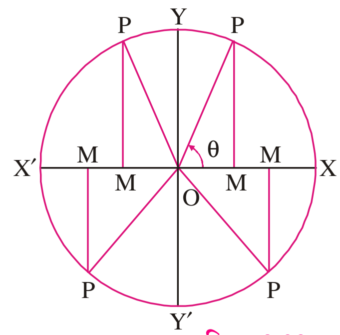
(b) $\sec\theta$ का आलेख असतत है। यह $\frac{\pi}{2}$ तथा $\frac{3\pi}{2}$ पर असतत (विच्छेदित) है।

(e) जब θ, $\frac{\pi}{2}$ और $\frac{3\pi}{2}$ से होकर जाता है, तो $\sec\theta$ आकस्मिक रूप से $+\infty$ से $-\infty$ और $-\infty$ से $+\infty$ में परिवर्तित हो जाता है।



3.4.7 cosec θ का आलेख, जब θ का मान 0 से 2π तक विचरण करता है

माना कि $X'OX$ और $Y'OY$ निदेशांक अक्ष हैं। O केन्द्र मान कर इकाई त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। माना P वृत पर कोई एक बिन्दु है। OP को मिलाइए और $PM \perp X'OX$ खींचिए।



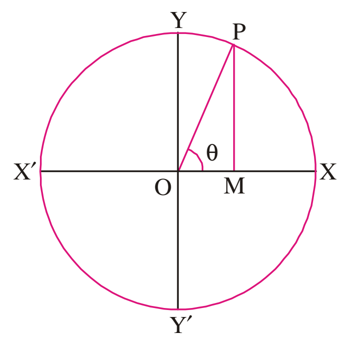
चित्र 3.29

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{MP} = \frac{1}{MP}$$

$\therefore$ $\operatorname{cosec}\theta$ का मान MP पर निर्भर करेगा।

I चतुर्थांश : cosec θ धनात्मक है, क्योंकि MP धनात्मक है।

$\frac{\pi}{2} = 1$ है। जब θ बहुत छोटा होता है, तो MP भी बहुत छोटा होता है और इसीलिए cosec θ का मान बहुत बड़ा होता है।



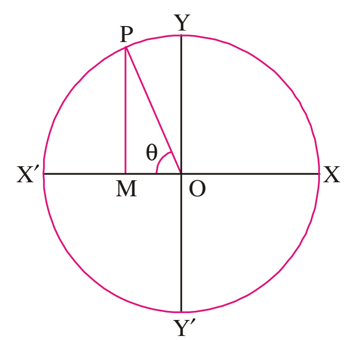
चित्र 3.30

$\therefore$ जैसे-जैसे θ ,0 से $\frac{\pi}{2}$ तक विचरण करता है, वैसे-वैसे cosec θ का मान ∞ से 1 तक घटता जाता है।

II चतुर्थांश : PM धनात्मक है। इसलिए cosec θ धनात्मक है।

$\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2} = 1$ और $\operatorname{cosec}\pi \to \infty$ है, जब घूमने वाली रेखा वामावर्त दिशा में, घूमते हुए π की ओर अग्रसर होती है।

$\therefore$ जब θ ,$\frac{\pi}{2}$ से π तक विचरण करता है, तब cosec θ का मान 1 से ∞ तक बढ़ता है।



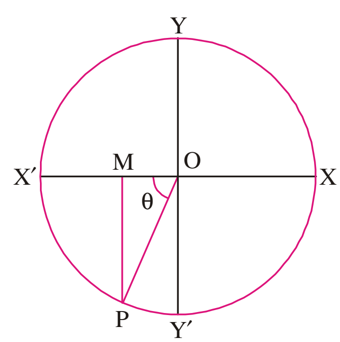
चित्र 3.31

III चतुर्थांश : PM ऋणात्मक है।

$\therefore$ cosec θ ऋणात्मक है। जब 'θ ' का मान π से कुछ बड़ा होता है, तब cosec θ बहुत बड़ा और ऋणात्मक होता है।

साथ ही $\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{2} = -1$ है।

$\therefore$ जैसे-जैसे θ का मान π से $\frac{3\pi}{2}$ तक विचरण करता है, वैसे-वैसे cosec θ का मान $-\infty$ से -1 तक बदलता है। ध्यान दीजिए कि जब θ , π से होकर जाता है, तो cosec θ का मान $+\infty$ से $-\infty$ में बदल जाता है।



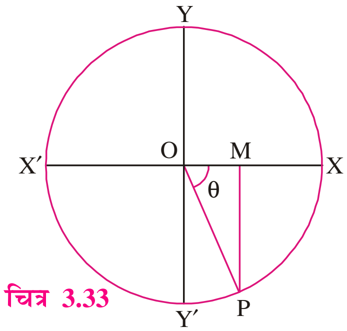
चित्र 3.32

IV चतुर्थांश : PM ऋणात्मक है।

$\therefore$ cosec θ ऋणात्मक है। साथ ही, cosec $\theta = -\infty$,

जब θ , 2π की ओर अग्रसर होता है।

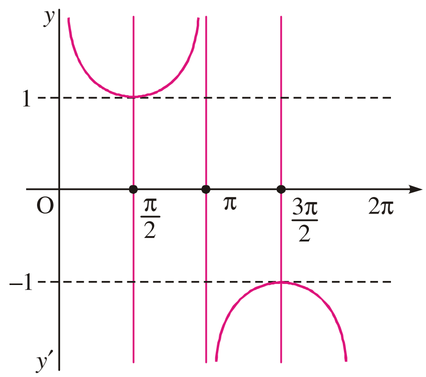
जब θ , $\frac{3\pi}{2}$ से 2π तक विचरण करता है, तब cosec θ का मान -1 से $-\infty$ तक बदलता है।



चित्र 3.33

cosec θ का आलेख :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi-0$	$\pi+0$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
cosec θ	∞	2	1.15	1	1.15	2	$+\infty$	$-\infty$	-2	-1.15	-1	-1.15	-2	$-\infty$



चित्र 3.34

प्रेक्षण:

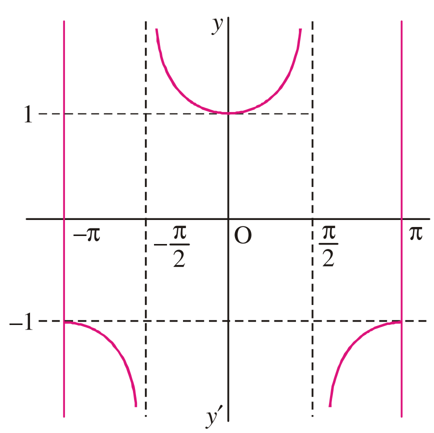
(a) cosec θ का संख्यात्मक मान 1 से कम नहीं हो सकता।

(b) cosec θ का आलेख असतत् है और यह आलेख $\theta = 0, \pi, 2\pi$ पर विच्छेदित है।

(c) जब θ, π से होकर जाता है, तब cosec θ का मान $+\infty$ से $-\infty$ में बदलता है साथ ही 0 और 2π पर यह मान क्रमशः $+\infty$ और $-\infty$ हैं।

उदाहरण 3.16. जब θ, $-\pi$ से π के बीच होता है, तो sec θ के मानों में होने वाले परिवर्तनों का अनुरेखण कीजिए।

हल :



चित्र 3.35

देखें आपने कितना सीखा 3.9

1. (a) जब θ के मान -2π से 2π के बीच में हैं, तो sec θ के मानों में परिवर्तनों का अनुरेखण कीजिएं और इन्हीं सीमाओं के बीच में आलेख भी खींचिए।

   (b) -2π से 2π के बीच में θ के मानों के लिए cosec θ का आलेख खींचिए।

3.5 त्रिकोणमितीय फलनों की आवर्तिता

आप अपने दैनिक जीवन में एक नियमित अन्तराल के बाद घटनाओं की पुनरावर्ती देखते हैं। उदाहरणार्थ, सप्ताह के दिन नियमित रूप से 7 दिन के बाद दोबारा आते हैं और वर्ष में प्रत्येक मास 12 महीने के बाद दोबारा आता है। एक गतिमान पहिए पर, एक कण की स्थिति भी इसी प्रकार का उदाहरण है। नियमित अन्तरालों के बाद घटनाओं की पुनरावर्ती हाने के गुण को **आवर्तिता (Periodicity)** कहते हैं।

परिभाषा : एक फलन f(x) आवर्ती कहलाता है, यदि इसका मान चरांक (चर) के मान में किसी स्थिरांक (अचर) की वृद्धि करने पर भी बदलता नहीं है,

अर्थात् यदि सभी x के लिए $f(x+p)=f(x)$ हो।

यदि p इस प्रकार का सबसे छोटा धनात्मक स्थिरांक है, तो यह फलन f(x) का आवर्तकाल कहलाता है।

यदि f(x) एक आवर्ती फलन है,जिसका आवर्तकाल p है, तब $\dfrac{1}{f(x)}$ भी आवर्तकाल p वाला, एक आवर्ती फलन होता है।

3.5.1 त्रिकोणमितीय फलनों के आवर्तकाल

(i) $\sin x=\sin(x+2n\pi)\,;\, n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ .....$

(ii) $\cos x=\cos(x+2n\pi)\,;\, n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ .....$

साथ ही, 0 से 2π के बीच में ऐसा कोई 'P' नहीं है, जिसके लिए

$\sin x=\sin(x+p)$, $\cos x=\cos(x+p)$, सभी x के लिए।

$\therefore$ 2π ही वह न्यूनतम धनात्मक मान है, जिसके लिए

$\sin(x+2\pi)=\sin x$ तथा $\cos(x+2\pi)=\cos x$ है।

$\Rightarrow$ sin x तथा cos x में से प्रत्येक का आर्वतकाल 2π है।

(iii) cosec x का आवर्तकाल भी 2π है, क्योंकि $\text{cosec } x=\dfrac{1}{\sin x}$ है।

(iv) sec x का आवर्तकाल भी 2π है, क्योंकि $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ है।

(v) $\tan(x+\pi)=\tan x$

माना कि $p(0<p<\pi)$, tan x का आवर्तकाल है। तब $\tan(x+p)=\tan x$, सभी x के लिए।
x के स्थान पर 0 रखने पर, $\tan p=0$ है। अर्थात् $p=0$ या π है।

$\Rightarrow$ tan x का आवर्तकाल π है।

$\therefore$ p का ऐसा कोई मान 0 और π के बीच में नहीं हो सकता, जिसके लिए $\tan x = \tan(x+p)$ हो।

$\therefore$ $\tan x$ का आवर्तकाल π है।

(vi) क्योंकि $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$ है, इसलिए $\cot x$ का आवर्तकाल भी π है।

उदाहरण 3.17. निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए :

(a) $y = 3\sin 2x$ (b) $y = \cos\dfrac{x}{2}$ (c) $y = \tan\dfrac{x}{4}$

हल : (a) आवर्तकाल $\dfrac{2\pi}{2}$, अर्थात् π।

(b) $y = \cos\dfrac{1}{2}x$ है, इसलिए आवर्तकाल $= \dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$।

(c) $y = \tan\dfrac{x}{4}$ का आवर्तकाल $= \dfrac{\pi}{\frac{1}{4}} = 4\pi$।

देखें आपने कितना सीखा 3.10

1. निम्नलिखित फलनों के आवर्तकाल ज्ञात कीजिए :

(a) $y = 2\sin 3x$ (b) $y = 3\cos 2x$

(c) $y = \tan 3x$ (d) $y = \sin^2 2x$

आइए दोहराएँ

- कोण किरण के घूमने से जनित होता है।
- ऋणात्मक या धनात्मक कोणों का बनना किरण के दक्षिणावर्त या वामावर्त घुमाव पर निर्भर करता है।
- अंश (या डिग्री) कोण को मापने की एक इकाई है और एक पूरा चक्र $360°$ का कोण बनाता है।
- एक कोण को रेडियन में भी मापा जा सकता है। $360°$ के तुल्य 2π रेडियन होगा।
- यदि लम्बाई l के चाप द्वारा त्रिज्या r वाले वृत्त के केन्द्र पर θ रेडियन का कोण बनता है, तब $l = r\theta$।
- यदि एक इकाई वृत्त के एक बिन्दु P के निर्देशांक (x,y) हों, तो छः त्रिकोणमितीय फलन इस प्रकार से परिभाषित किए जा सकते हैं : $\sin\theta = y$, $\cos\theta = x$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$, $\cot\theta = \dfrac{x}{y}$, $\sec\theta = \dfrac{1}{x}$ और $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{y}$।

  बिन्दु P के निर्देशांकों (x,y) को $(\cos\theta, \sin\theta)$ के रूप में भी लिखा जा सकता है।

यहाँ θ वह कोण है, जो बिन्दु P को केन्द्र से मिलाने वाली रेखा x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ बनाती है।

- जब θ के मान $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ हैं, तब त्रिकोणमितीय फलनों $\sin\theta$ व $\cos\theta$ के मान निम्न तालिका द्वारा प्रदर्शित किये जाते हैं :

वास्तविक संख्याएँ θ / फलन	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

- $\sin\theta$ और $\cos\theta$ के आलेख सभी स्थानों पर सतत होते हैं।

— $\sin\theta$ और $\cos\theta$ दोनों का अधिकतम मान 1 है।

— $\sin\theta$ और $\cos\theta$ दोनों का न्यूनतम मान -1 है।

— इन फलनों का आवर्तकाल 2π है।

- $\tan\theta$ और $\cot\theta$ का $-\infty$ और $+\infty$ के मध्य कोई भी मान हो सकता है।

— फलन $\tan\theta$ अन्तराल $(0, 2\pi)$ में, $\frac{\pi}{2}$ तथा $\frac{3\pi}{2}$ पर असतत (विच्छेदित) है।

— इसका आवर्तकाल π है।

— $0, \pi, 2\pi$ पर $\cot\theta$ का आलेख असतत (विच्छेदित) है। इसका आवर्तकाल π है।

- $\sec\theta$ का संख्यात्मक मान '1' से कम नहीं हो सकता है।

(i) इसका आलेख $\frac{\pi}{2}$ और $\frac{3\pi}{2}$ पर विच्छेदित होता है। 2π के बाद इसकी पुनरावर्ती होती है।

(ii) $\operatorname{cosec}\theta$ का कोई मान -1 और $+1$ के बीच में नहीं हो सकता। यह $0, \pi\ 2\pi$ पर असतत (विच्छेदित) है। 2π के बाद इसकी पुनरावर्ती होती है।

सहायक वेबसाइट

- *http://en.wikipedia.org/wiki/Trigonometric_functions*
- *http://mathworld.wolfram.com/ Trigonometric_functions.html*

आइए अभ्यास करें

1. एक रेलगाड़ी एक वृत्तीय पटरी, जिसकी त्रिज्या 2500 मी है, पर 75 कि.मी/घंटा की गति से चल रही है।एक मिनट में वह कितने रेडियन का कोण घूम जाएगी ?

2. एक चाप की लम्बाई वृत्त की त्रिज्या की 0.357 गुनी है। इस चाप द्वारा केन्द्र पर कितने अंश का कोण बनेगा ?

3. एक घड़ी की मिनट की सुई 30 सेमी लम्बी है। सुई के सिरे द्वारा 15 मिनट में तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

4. सिद्ध कीजिए :

(a) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$ (b) $\dfrac{1}{\sec\theta + \tan\theta} = \sec\theta - \tan\theta$

(c) $\dfrac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta} - \dfrac{\cot\theta}{1+\cot^2\theta} = 2\sin\theta\cos\theta$ (d) $\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = (\tan\theta + \sec\theta)^2$

(e) $\sin^8\theta - \cos^8\theta = (\sin^2\theta - \cos^2\theta)(1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta)$

(f) $\sqrt{\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta} = \tan\theta + \cot\theta$

5. यदि $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ हो, तो सत्यापित कीजिए कि : $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

6. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\sin\dfrac{25\pi}{6}$ (b) $\sin\dfrac{21\pi}{4}$ (c) $\tan\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ (d) $\sin\dfrac{17}{4}\pi$ (e) $\cos\dfrac{19}{3}\pi$

7. $x = -\dfrac{\pi}{2}$ से $x = \dfrac{3\pi}{2}$ तक $\cos x$ का आलेख खींचिए।

8. x के एक आवर्ती फलन की परिभाषा लिखिए और आलेख द्वारा दिखाइए कि $\tan x$ का आवर्तकाल π है, अर्थात् $x=\pi$ से 2π तक इसके आलेख का भाग $x=0$ से π तक के आलेख के भाग की पुनरावृत्ति है।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 3.1

1. (i) $\dfrac{\pi}{3}$ (ii) $\dfrac{\pi}{12}$ (iii) $\dfrac{5\pi}{12}$ (iv) $\dfrac{7\pi}{12}$ (v) $\dfrac{3\pi}{2}$

2. (i) 45° (ii) 15° (iii) 9° (iv) 3° (v) 120°

3. $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{13\pi}{36}, \dfrac{14\pi}{36}$ 4. $\dfrac{5\pi}{6}$ 5. $\dfrac{\pi}{3}$

देखें आपने कितना सीखा 3.2

1. (a) $\dfrac{\pi}{6}$ (b) $\dfrac{\pi}{3}$ (c) $\dfrac{5\pi}{6}$

2. (a) 36° (b) 30° (c) 20°

3. $\dfrac{1}{6}$ रेडियन; 9.55° 4. $\dfrac{1}{5}$ रेडियन 5. 95.54 मी

6. (a) 0.53 मी (b) 38.22 सेमी (c) 0.002 रेडियन
   (d) 12.56 मी (e) 31.4 सेमी (f) 3.75 रेडियन
   (g) 6.28 मी (h) 2 रेडियन (i) 19.11 मी

देखें आपने कितना सीखा 3.3

1. (i) ऋणात्मक (ii) ऋणात्मक (iii) ऋणात्मक (iv) धनात्मक
   (v) धनात्मक (vi) ऋणात्मक (vii) धनात्मक (viii) ऋणात्मक

2. (i) शून्य (ii) शून्य (iii) $-\frac{1}{2}$ (iv) -1
   (v) 1 (vi) परिभाषित नहीं है (vii) परिभाषित नहीं है (viii) 1

देखें आपने कितना सीखा 3.4

2. $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cot\theta = 2$, $\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{5}$, $\sec\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

3. $\sin\theta = \frac{a}{b}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$, $\sec\theta = \frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}$,
   $\tan\theta = \frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}$, $\cot\theta = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}$ 6. $\frac{2m}{1+m^2}$

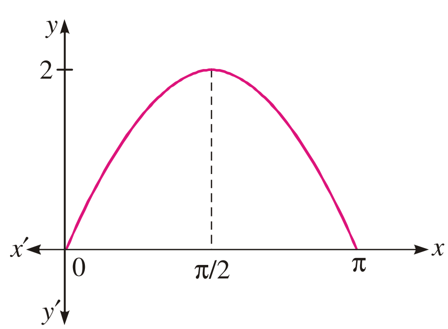
11. $\cos x = \frac{5}{13}, \sin x = -\frac{12}{13}, \operatorname{cosec} x = \frac{-13}{12}, \tan x = \frac{-12}{5}, \cot x = \frac{-5}{12}$

देखें आपने कितना सीखा 3.5

1. (i) $4\frac{1}{4}$ (ii) $6\frac{1}{2}$ (iii) -1 (iv) $\frac{22}{3}$ (v) शून्य

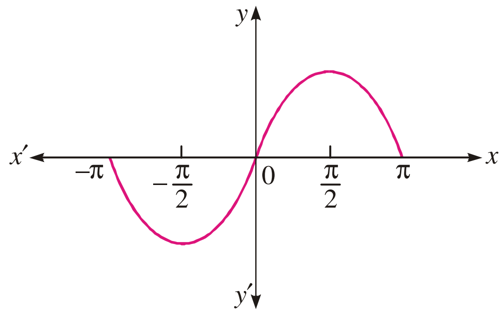
देखें आपने कितना सीखा 3.6

1. 1, -1 3. $y = 2\sin\theta$ का आलेख, $[0, \pi]$



चित्र 3.36

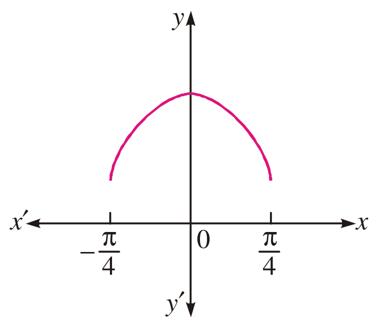
4. (a) $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ (b) $\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ 5. $y = \sin x$, $-\pi$ से π तक



चित्र 3.37

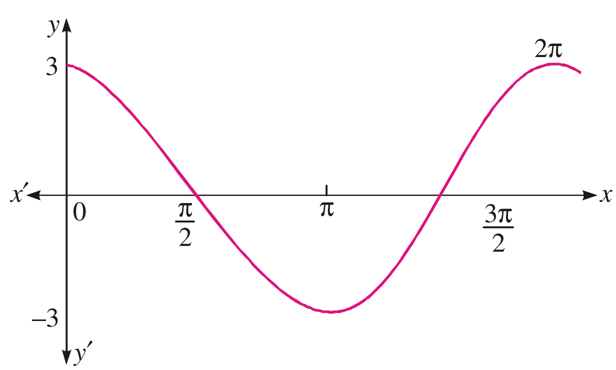
देखें आपने कितना सीखा 3.7

1. (a) $y = \cos\theta, -\frac{\pi}{4}$ से $\frac{\pi}{4}$ तक



चित्र 3.38

(b) $y = 3\cos\theta$; 0 से 2π तक



चित्र 3.39

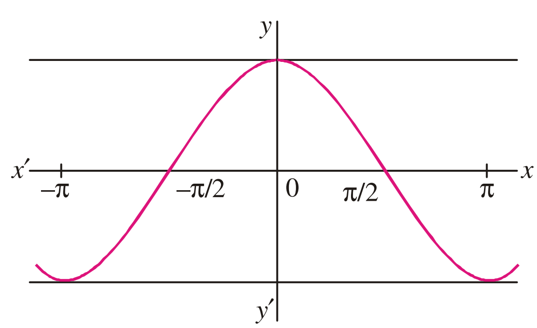
(c) $y = \cos 3\theta, -\pi$ से π तक

$\cos\theta = 0.87$

$$\theta = \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$$

$\cos\theta = -0.87$

$$\theta = \frac{5\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$$

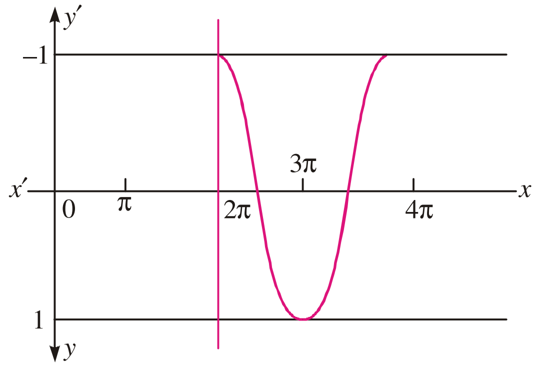


चित्र 3.40

(d) अन्तराल $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ में, $y = \cos\theta$ का आलेख x-अक्ष से नीचे स्थित है।

(e) $y = \cos\theta$,

θ, 2π से 4π के बीच में स्थित है।



चित्र 3.41

देखें आपने कितना सीखा 3.8

1. (a) अपरिमित (b) बिन्दुओं $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ पर आलेख विच्छेदित है।

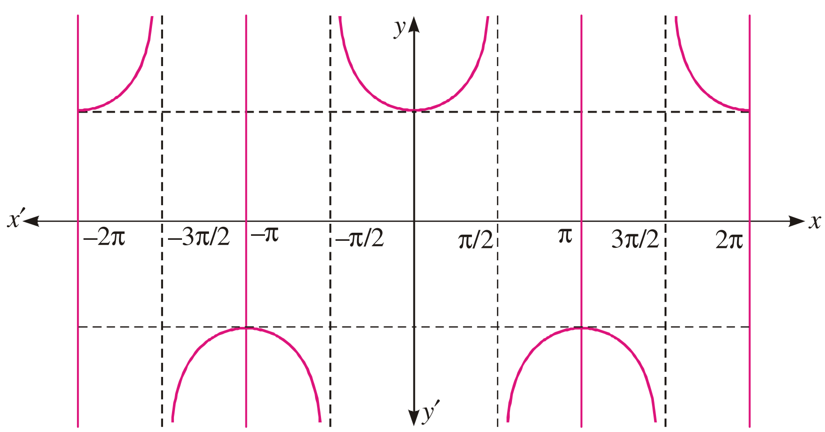
(e) $y = \tan 2\theta, -\pi$ से π तक

$\theta = \frac{\pi}{3}$ पर, $\tan\theta = 1.7$ है।

2. (a) अपरिमित (b) $\cot\theta = -1$, जब $\theta = \frac{3\pi}{4}$ है।

देखें आपने कितना सीखा 3.9

1. (a) $y = \sec\theta$



चित्र 3.42

अन्तराल $[0, 2\pi]$ में, $\sec 2\theta$ की असंतता के बिन्दु $\frac{\pi}{4}$ तथा $\frac{3\pi}{4}$ हैं।

(b) 0 से -2π तक आलेख का अनुरेखण करने में, $\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$ का प्रयोग कीजिए।

देखें आपने कितना सीखा 3.10

1. (a) आवर्तकाल है : $\frac{2\pi}{3}$ (b) आवर्तकाल है : $\frac{2\pi}{2} = \pi$ (c) y का आवर्तकाल है : $\frac{\pi}{3}$

(d) $y = \sin^2 2x = \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x$; y का आवर्तकाल है : $\frac{2\pi}{4}$ अर्थात् $\frac{\pi}{2}$

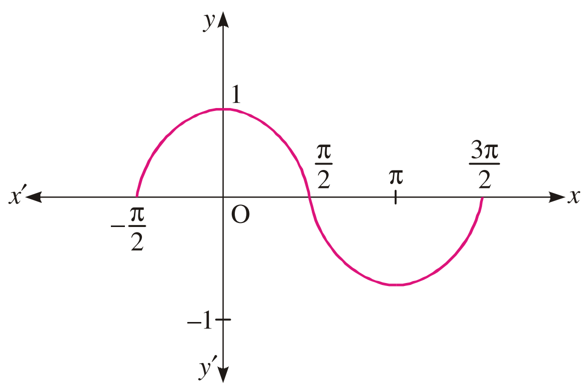
(e) $y = 3\cot\left(\frac{x+1}{3}\right)$, y का आवर्तकाल है : $\frac{\pi}{\frac{1}{3}} = 3\pi$

आइए अभ्यास करें

1. $\frac{1}{2}$ रेडियन 2. $20.45°$ 3. 15 सेमी

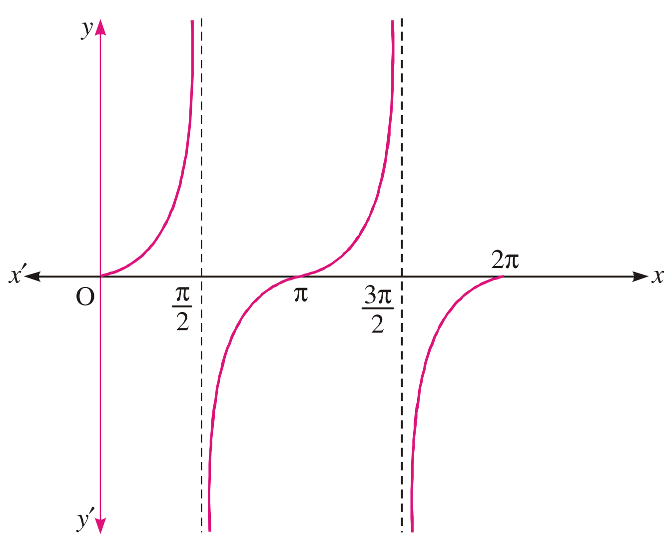
6. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) -1 (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (e) $\frac{1}{2}$

7.



चित्र 3.43

8.



$y = \sec\theta$

चित्र 3.44