30

समाकलन

पिछले पाठ में, आपने एक फलन के अवकलज की संकल्पना का अध्ययन किया। आपने विभिन्न स्थितियों में अवकलज के अनुप्रयोग भी सीखे।

अब इसका विपरीत प्रश्न लीजिए जहाँ मूल फलन ज्ञात करना है, जबकि इसका अवकलज (फलन के रूप में) दिया गया है। इस विपरीत प्रक्रिया को समाकलन का नाम दिया गया है। इस पाठ में हम समाकलन की संकल्पना इसकी विभिन्न विधियों तथा तकनीकों का अध्ययन करेगें।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- समाकलन को अवकलन की प्रतिलोम क्रिया बताना
- $x^n, \sin x, \cos x, \sec^2 x, \operatorname{cosec}^2 x, \sec x \tan x, \operatorname{cosec} x \cot x, \frac{1}{x}, e^x$ आदि सरल फलनों के समाकलन ज्ञात करना
- निम्नलिखित परिणामों के कथन देना :

  (i) $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

  (ii) $\int [\pm k f(x)]\, dx = \pm k \int f(x)\, dx$
- बीजीय, त्रिकोणमितीय, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय तथा चरघातांकीय (exponential) फलनों के समाकलन ज्ञात करना।
- प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन ज्ञात करना।
- निम्नलिखित प्रकार के समाकलों के मान ज्ञात करना :

$$\int \frac{dx}{x^2 \pm a^2}, \int \frac{dx}{a^2 - x^2}, \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}, \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \int \frac{(px + q)\, dx}{ax^2 + bx + c}, \int \frac{(px + q)\, dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

- परिणाम $\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ell n |f(x)| + C$ का व्युत्पन्न करना तथा इसका उपयोग करना।

- खंडशः समाकलन विधि को बताना तथा इसका उपयोग करना।
- निम्नलिखित प्रकार के समाकलों के मान ज्ञात करना :

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx,\ \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx,\ \int e^{ax} \sin bx\ dx,\ \int e^{ax} \cos bx\ dx,$$

$$\int (px + q)\sqrt{ax^2 + bx + c}\ dx,\ \int \sin^{-1} x\ dx,\ \int \cos^{-1} x\ dx,$$

$$\int \sin^n x \cos^m x\ dx,\ \int \frac{dx}{a + b\sin x},\ \int \frac{dx}{a + b\cos x}$$

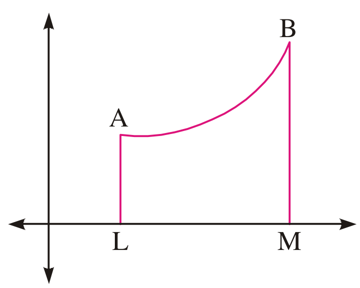
- परिणाम $\int e^x [f(x) + f'(x)]dx = e^x f(x) + c$ को व्युत्पन्न करना तथा इसका उपयोग करना
- आंशिक भिन्न के उपयोग से परिमेय व्यंजकों के समाकल ज्ञात करना।

पूर्व ज्ञान

- विभिन्न फलनों का अवकलन
- समतल ज्यामिति का मूल ज्ञान
- बीजीय व्यंजक का गुणनखण्डन
- प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों का ज्ञान

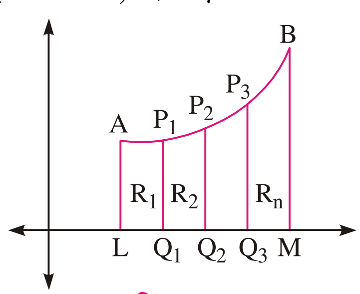
30.1 समाकलन

समाकलन का शाब्दिक अर्थ है संकलन। उदाहरणार्थ नीचे दिए गये चित्र में क्षेत्र ALBM के क्षेत्रफल ज्ञात करने के विषय पर विचार कीजिए (चित्र 30.1)

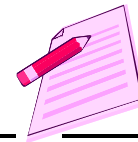


चित्र 30.1

इस क्षेत्रफल को ज्ञात करने के लिए एक प्रयोगात्मक विधि का प्रयोग किया जा सकता है, परन्तु वह विधि सदैव उपयुक्त नहीं कही जा सकती। इसलिए हम इस प्रकार की समस्याओं को हल करने के लिए समाकलन (अर्थात संकलन) की सहायता लेते हैं। इसके लिए हम उपरोक्त चित्र को छोटे-छोटे आयताकार क्षेत्रों में बांट लेते हैं। (चित्र 30.2) देखिए।



चित्र 30.2



इन आयताकार क्षेत्रों का क्षेत्रफल तब तक ज्ञात नहीं किया जा सकता जब तक कि उनकी चौड़ाई न्यूनतम (अर्थात $\rightarrow 0$) न हो जाए।

आर्किमिडीज ने 2000 वर्ष पूर्व इसी तकनीक का उपयोग क्षेत्रफल, आयतन, आदि ज्ञात करने में किया था। न्यूटन (1642-1727) तथा लिबनीज़ (1646-1716) के नाम प्रायः आधुनिक अवकल व समाकल गणित (कलन) के जन्मदाता के रूप में लिए जाते हैं।

फलनों के समाकलन के अध्ययन को समाकल गणित कहते हैं। इस विषय के अनेकों अनुप्रयोग ज्यामिति, यांत्रिकी, प्राकृतिक विज्ञान तथा अन्य विषयों में पाए जाते हैं।

इस पाठ में हम बहुपदीय त्रिकोणमितीय चरघातांकीय, लधुगणकीय तथा परिमेय फलनों का समाकल करना सीखेंगें जिसमें समाकलन की विभिन्न तकनीकों का उपयोग किया जाएगा।

30.2 समाकलन, अवकलन की विपरीत क्रिया के रूप में

निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार कीजिए :

(i) $\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2x$ (ii) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ (iii) $\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$

आइये अब उपर्युक्त उदाहरणों को एक अन्य रूप में लें।

(i) x^2 का अवकलन करने पर फलन $2x$ प्राप्त होता है।

$\Rightarrow x^2$ को $2x$ का प्रतिअवकलज कहते हैं।

(ii) $\sin x$ का अवकलन करने पर $\cos x$ प्राप्त होता है।

$\Rightarrow \sin x$ को $\cos x$ का प्रतिअवकलज कहते हैं।

(iii) इसी प्रकार e^x, फलन e^x का प्रतिअवकलज कहलाता है।

सामान्यतः प्रतिअवकलज धारणा को एक संक्रिया के रूप में व्यक्त किया जाता है। इस संक्रिया को समाकलन की संक्रिया कहते हैं।

हम लिखते हैं :

1. $2x$ का समाकलन x^2 है।
2. $\cos x$ का समाकलन $\sin x$ है।
3. e^x का समाकलन e^x है।

समाकलन संक्रिया को प्रतीक $\int$ के द्वारा निरूपित किया जाता है।

इस प्रकार :

1. $\int 2x\,dx = x^2$ 2. $\int \cos x\,dx = \sin x$ 3. $\int e^x\,dx = e^x$

याद रखिए कि x के सापेक्ष समाकलन संक्रिया के निरूपण में प्रतीक $\int$ के साथ प्रतीक dx भी लिखा जाता है। समाकलित किये जाने वाले फलन को $\int$ तथा dx के बीच में रखा जाता है।

परिभाषा : यदि $\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x)$ तो $f(x)$, $f'(x)$ का समाकल कहलाता है तथा हम इसे लिखते हैं :

$$\int f'(x)dx = f(x)$$

यहाँ समाकलित किये जाने वाला फलन $f'(x)$ **समाकल्य** कहलाता है।

समाकलन का स्थिरांक :

यदि $y = x^2$ तो $\frac{dy}{dx} = 2x$

$\therefore \quad \int 2x dx = x^2$

अब $\frac{d}{dx}\left(x^2 + 2\right)$ अथवा $\frac{d}{dx}\left(x^2 + c\right)$ जबकि c कोई वास्तविक स्थिरांक है, पर विचार कीजिए इनमें से प्रत्येक $2x$ के बराबर है। इसलिए हम देखते हैं कि $2x$ का समाकल अद्वितीय नहीं है। $\int 2x\, dx$ के विभिन्न मानों में स्थिरांक का अन्तर होता है। इस प्रकार $\int 2x\, dx = x^2 + c$ जहाँ c समाकलन का स्थिरांक कहलाता है।

इसी प्रकार $\int e^x\, dx = e^x + c$ तथा $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

सामान्यतः $\int f'(x)\, dx = f(x) + c$ स्थिरांक c का मान कोई भी हो सकता है।

हम देखते हैं कि:

एक समाकल का अवकलन समाकल्य के समान होता है।

टिप्पणी: $\int f(x)\, dx$, $\int f(y)\, dy$, $\int f(z)\, dz$ होते हैं परन्तु $\int f(z)\, dx$ नहीं होता।

30.3 सरल फलनों का समाकलन

	समाकल	जांच
1.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ जबकि n एक स्थिरांक है तथा $n \neq -1$	$\because \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + c\right) = x^n$
2.	$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$	$\because \frac{d}{dx}(-\cos x + c) = \sin x$
3.	$\int \cos x\, dx = \sin x + c$	$\because \frac{d}{dx}(\sin x + c) = \cos x$
4.	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$	$\because \frac{d}{dx}(\tan x + c) = \sec^2 x$
5.	$\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + c$	$\because \frac{d}{dx}(-\cot x + c) = \operatorname{cosec}^2 x$
6.	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$	$\because \frac{d}{dx}(\sec x + c) = \sec x \tan x$
7.	$\int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x + c$	$\because \frac{d}{dx}(-\operatorname{cosec} x + c) = \operatorname{cosec} x \cot x$
8.	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$	$\because \frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x + c\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

9. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}x + c$ $\qquad \because \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x + c\right) = \frac{1}{1+x^2}$

10. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \sec^{-1}x + c$ $\qquad \because \frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}x + c\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

11. $\int e^x dx = e^x + c$ $\qquad \because \frac{d}{dx}\left(e^x + c\right) = e^x$

12. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c$ $\qquad \because \frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log a} + c\right) = a^x$

13. $\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + c$ $\qquad \because \frac{d}{dx}\left(\log|x| + c\right) = \frac{1}{x}$ if $x > 0$

ध्यान दीजिए

1. x^n का समाकल ज्ञात करने के लिए x के घांताक में एक जोड़ो तथा परिणाम को नई घांताक से भाग करो और स्थिरांक c जमा करो।
2. $\int \frac{1}{f(x)}dx$ को प्रायः $\int \frac{dx}{f(x)}$ लिखा जाता है।

देखें आपने कितना सीखा 30.1

1. $\int x^{\frac{5}{2}}\,dx$ के कोई पांच विभिन्न मान लिखिए।
2. निम्नलिखित में से प्रत्येक का अनिश्चित समाकल लिखिए :

   (a) x^5 (b) $\cos x$ (c) 0
3. मान ज्ञात कीजिए :

   (a) $\int x^6 dx$ (b) $\int x^{-7}dx$ (c) $\int \frac{1}{x}dx$ (d) $\int 3^x (5)^{-x}\,dx$

   (e) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$ (f) $\int x^{-9}\,dx$ (g) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ (h) $\int \sqrt[9]{x^{-8}}\,dx$
4. मान ज्ञात कीजिए :

   (a) $\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta$ (b) $\int \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta$

   (c) $\int \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta}d\theta$ (d) $\int \frac{1}{\sin^2\theta}d\theta$

30.4 समाकलों के गुणधर्म

यदि किसी फलन को दो या दो से अधिक फलनों के योग के रूप में लिखा जा सके तो ऐसे फलन का समाकल इसके सभी घटकों के समाकलों का योग होता है।

जैसे यदि $f(x) = x^7 + x^3$ हो तो

$$\int f(x)\,dx = \int [x^7 + x^3]\,dx$$

$$= \int x^7 dx + \int x^3 dx$$

$$= \frac{x^8}{8} + \frac{x^4}{4} + c$$

इसलिए सामान्यत: दो फलनों के योग का समाकल उनके अलग-अलग समाकलों के योग के बराबर होता है।

अर्थात $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

इसी प्रकार यदि दिया गया फलन $f(x) = x^7 - x^2$ हो तो हम लिख सकते हैं कि

$$\int f(x)\,dx = \int \left(x^7 - x^2\right) dx = \int x^7 dx - \int x^2 dx = \frac{x^8}{8} - \frac{x^3}{3} + c$$

दो फलनों के अन्तर का समाकल उन दोनों के अलग-अलग समाकलों के अन्तर के बराबर होता है।

अर्थात $\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

यदि एक फलन f(x) किसी स्थिरांक (k) तथा किसी अन्य फलन $[g(x)]$ का गुणनफल है। अर्थात $f(x) = kg(x)$, तब हम $f(x)$ का समाकलन इस प्रकार करते हैं

$$\int f(x)\,dx = \int kg(x)\,dx = k\int g(x)\,dx$$

उदाहरण 30.1. मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\int 4^x dx$ (ii) $\int (2)^x (3)^{-x}\,dx$

हल : (i) $\int 4^x dx = \frac{4^x}{\log 4} + c$

(ii) $\int (2^x)(3^{-x})\,dx = \int \frac{2^x}{3^x}\,dx = \int \left(\frac{2}{3}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\log\left(\frac{2}{3}\right)} + c$

ध्यान दीजिए (ii) में यह कहना ठीक नहीं है कि

$$\int 2^x 3^{-x} dx = \int 2^x dx \int 3^{-x} dx$$

क्योंकि $\int 2^x dx \int 3^{-x} dx = \frac{2^x}{\log 2}\left(\frac{3^{-x}}{\log 3}\right) + c \neq \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\log\left(\frac{2}{3}\right)} + c$

दो फलनों के गुणन का समाकल सदैव उन फलनों के अलग-अलग समाकलों के गुणनफल के समान नहीं होता। हम फलनों के गुणनफल के समाकल पर अगले पाठ में विचार करेगें।

उदाहरण 30.2. मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\int \frac{dx}{\cos^n x}$, जबकि $n = 0$ और $n = 2$ (ii) $\int -\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta}\, d\theta$

हल : (i) जब $n = 0$, $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \frac{dx}{\cos^o x} = \int \frac{dx}{1} = \int dx$

अब $\int dx$ को $\int x^0 dx$ लिखा जा सकता है।

$$\therefore \quad \int dx = \int x^0 dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + c = x + c$$

जब $n = 2$,

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$$

(ii) $$\int -\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta}\, d\theta = \int \frac{-1}{\sin^2\theta}\, d\theta = -\int \operatorname{cosec}^2\theta\, d\theta = \cot\theta + c$$

उदाहरण 30.3. मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\int (\sin x + \cos x)\, dx$ (ii) $\int \frac{x^2+1}{x^3}\, dx$

(iii) $\int \frac{1-x}{\sqrt{x}}\, dx$ (iv) $\int \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$

हल : (i) $\int (\sin x + \cos x)\, dx = \int \sin x\, dx + \int \cos x\, dx = -\cos x + \sin x + c$

(ii) $$\int \frac{x^2+1}{x^3}\, dx = \int \left(\frac{x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{1}{x^3}\, dx$$

$$= \log|x| + \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = \log|x| - \frac{1}{2x^2} + c$$

(iii) $$\int \frac{1-x}{\sqrt{x}}\, dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x}{\sqrt{x}}\right) dx = \int \left(x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right) dx = 2\sqrt{x} - \frac{2}{3}x^{3/2} + c$$

(iv) $$\int \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \tan^{-1} x - \sin^{-1} x + c$$

उदाहरण 30.4. मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\int \sqrt{1 - \sin 2\theta}\, d\theta$ (ii) $\int \left(4e^x - \frac{3}{x\sqrt{x^2-1}}\right) dx$

(iii) $\int (\tan x + \cot x)^2\, dx$ (iv) $\int \left(\frac{x^6-1}{x^2-1}\right) dx$

हल : (i) $\sqrt{1-\sin 2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta}$

$$\left[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\right] = \sqrt{(\cos\theta - \sin\theta)^2} = \pm(\cos\theta - \sin\theta)$$

(चिन्ह का चयन θ के मान पर निर्भर करता है।)

(a) यदि $\sqrt{1-\sin 2\theta} = \cos\theta - \sin\theta$ तब $\int\sqrt{1-\sin 2\theta}\, d\theta = \int(\cos\theta - \sin\theta)\, d\theta$

$$= \int\cos\theta\, d\theta - \int\sin\theta\, d\theta = \sin\theta + \cos\theta + c$$

(b) यदि $\int\sqrt{1-\sin 2\theta}\, d\theta = \int(-\cos\theta + \sin\theta)\, d\theta$

$$= -\int\cos\theta\, d\theta + \int\sin\theta\, d\theta = -\sin\theta - \cos\theta + c$$

(ii) $\int\left(4e^x - \dfrac{3}{x\sqrt{x^2-1}}\right)dx = \int 4e^x dx - \int\dfrac{3}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$

$$= 4\int e^x dx - 3\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = 4e^x - 3\sec^{-1}x + c$$

(iii) $\int(\tan x + \cot x)^2\, dx = \int\left(\tan^2 x + \cot^2 x + 2\tan x\cot x\right)dx$

$$= \int\left(\tan^2 x + \cot^2 x + 2\right)dx = \int\left(\tan^2 x + 1 + \cot^2 x + 1\right)dx$$

$$= \int\left(\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x\right)dx = \int\sec^2 x\, dx + \int\operatorname{cosec}^2 x\, dx$$

$$= \tan x - \cot x + c$$

(iv) $\int\left(\dfrac{x^6-1}{x^2+1}\right)dx = \int\left(x^4 - x^2 + 1 - \dfrac{2}{x^2+1}\right)dx$ [dividing x^6-1 by x^2+1]

$$= \int x^4 dx - \int x^2 dx + \int dx - 2\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + x - 2\tan^{-1}x + c$$

उदाहरण 30.5. मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\int\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 dx$ (ii) $\int\left(\dfrac{4e^{5x} - 9e^{4x} - 3}{e^{3x}}\right)dx$

हल : (i) $\int\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 dx = \int\left(x^{3/2} + 3x\dfrac{1}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^{3/2}}\right)dx$

$$= \int x^{3/2}dx + 3\int\sqrt{x}\, dx + 3\int\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \int\frac{dx}{x^{3/2}}$$

$$= \frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + 3\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + 3\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} - \frac{2}{\sqrt{x}} + c$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} + c$$

(ii) $$\int\left(\frac{4e^{5x} - 9e^{4x} - 3}{e^{3x}}\right)dx = \int\frac{4e^{5x}}{e^{3x}}\,dx - \int\frac{9e^{4x}}{e^{3x}}\,dx - \int\frac{3dx}{e^{3x}}$$

$$= 4\int e^{2x}\,dx - 9\int e^{x}\,dx - 3\int e^{-3x}\,dx$$

$$= 2e^{2x} - 9e^{x} + e^{-3x} + c$$

देखें आपने कितना सीखा 30.2

1. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int\left(x + \frac{1}{2}\right)dx$ (b) $\int\frac{-x^2}{1+x^2}\,dx$ (c) $\int\left(10x^9 - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

(d) $\int\left(\frac{5+3x-6x^2-7x^4-8x^6}{x^6}\right)dx$ (e) $\int\frac{x^4}{1+x^2}\,dx$ (f) $\int\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

2. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int\frac{dx}{1+\cos 2x}$ (b) $\int\tan^2 x dx$ (c) $\int\frac{2\cos x}{\sin^2 x}dx$

(d) $\int\frac{dx}{1-\cos 2x}$ (e) $\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$ (f) $\int(\operatorname{cosec} x - \cot x)\operatorname{cosec} x\,dx$

3. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int\sqrt{1+\cos 2x}\,dx$ (b) $\int\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$ (c) $\int\frac{1}{1-\cos 2x}\,dx$

4. मान ज्ञात कीजिए :

$\int\sqrt{x+2}\,dx$

30.5 समाकलन की तकनीकें (Techniques of Integration)

30.5.1 प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन

इस विधि में हम $\int f(x)\,dx$ को किसी दूसरे चरांक में, रूपान्तर कर देते हैं जिससे कि परिणामी फलन पिछले अनुच्छेद में दी गई विधियों द्वारा समाकलित किया जा सके।

सबसे पहले हम $f(ax+b)$, $a \neq 0$ की तरह के फलनों का समाकल ज्ञात करेगें जबकि $f(x)$ एक मानक फलन है।

उदाहरण 30.6. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \sin(ax+b)\,dx$$

हल : $\int \sin(ax+b)\,dx$

मान लीजिए $ax+b=t$.

तब $a=\dfrac{dt}{dx}$ या $dx=\dfrac{dt}{a}$

$\therefore$ $\int \sin(ax+b)\,dx = \int \sin t\,\dfrac{dt}{a}$ (यहां समाकलन गुणक को dt लिखा जाएगा)

$$=\frac{1}{a}\int \sin t\,dt = \frac{1}{a}(-\cos t)+c = -\frac{\cos(ax+b)}{a}+c$$

उदाहरण 30.7. मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\int (ax+b)^n\,dx$, जबकि $n \neq -1$ (ii) $\int \dfrac{1}{(ax+b)}\,dx$

हल : (i) $\int (ax+b)^n\,dx$, जबकि $n \neq -1$

मान लीजिए $ax+b=t$ $\Rightarrow$ $a=\dfrac{dt}{dx}$ या $dx=\dfrac{dt}{a}$

$$\therefore \quad \int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a}\int t^n dt = \frac{1}{a}\cdot\frac{t^{n+1}}{(n+1)}+c$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+c \qquad \text{जबकि } n \neq -1$$

(ii) $\int \dfrac{1}{(ax+b)}\,dx$

मान लीजिए $ax+b=t$

$$\Rightarrow \qquad dx=\frac{1}{a}dt$$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{(ax+b)}\,dx = \int \frac{1}{a}\cdot\frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\log|t|+c = \frac{1}{a}\log|ax+b|+c$$

उदाहरण 30.8. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int e^{5x+7}dx$$

हल : $\int e^{5x+7}dx$

मान लीजिए $5x+7=t$

$$\Rightarrow \qquad dx = \frac{dt}{5}$$

$$\therefore \qquad \int e^{5x+7}dx = \frac{1}{5}\int e^t dt = \frac{1}{5}e^t + c = \frac{1}{5}e^{5x+7} + c$$

इसी प्रकार $\qquad \boldsymbol{\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c}$

ध्यान दीजिए:

$$\int (ax+b)^n\, dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\log|ax+b| + c$$

$$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$$

$$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$$

$$\int \sec^2(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + c$$

$$\int \operatorname{cosec}^2(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + c$$

$$\int \sec(ax+b)\tan(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sec(ax+b) + c$$

$$\int \operatorname{cosec}(ax+b)\cot(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\operatorname{cosec}(ax+b) + c$$

उदाहरण 30.9. मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\int \sin^2 x\, dx$ (ii) $\int \sin^3 x\, dx$ (iii) $\int \cos^3 x\, dx$ (iv) $\int \sin 3x \sin 2x\, dx$

हल : फलन को x के गुणज के साइन और कोसाइन के रूप में लिखने के लिए, यहां हम त्रिकोणमित्तीय सर्वसमिकाओं का उपयोग करते हैं।

(i) $$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx \qquad \left[\because \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\int 1dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + c = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

(ii) $$\int \sin^3 x\, dx = \int \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}dx \qquad \left[\because \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x\right]$$

$$= \frac{1}{4}\int (3\sin x - \sin 3x)\, dx = \frac{1}{4}\left[-3\cos x + \frac{\cos 3x}{3}\right] + c$$

टिप्पणी

(iii) $$\int \cos^3 x\, dx = \int \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}\, dx \quad \left[\because \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x\right]$$

$$= \frac{1}{4}\int (\cos 3x + 3\cos x)\, dx = \frac{1}{4}\left[\frac{\sin 3x}{3} + 3\sin x\right] + c$$

(iv) $$\int \sin 3x \sin 2x\, dx = \frac{1}{2}\int 2\sin 3x \sin 2x\, dx$$

$$[\because 2\sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos x - \cos 5x)\, dx = \frac{1}{2}\left[\sin x - \frac{\sin 5x}{5}\right] + c$$

देखें आपने कितना सीखा 30.3

1. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int \sin(4 - 5x)\, dx$ (b) $\int \sec^2(2 + 3x)\, dx$

(c) $\int \sec\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx$ (d) $\int \cos(4x + 5)\, dx$

(e) $\int \sec(3x + 5)\tan(3x + 5)\, dx$ (f) $\int \operatorname{cosec}(2 + 5x)\cot(2 + 5x)\, dx$

2. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int \frac{dx}{(3 - 4x)^4}$ (b) $\int (x + 1)^4\, dx$ (c) $\int (4 - 7x)^{10}\, dx$

(d) $\int (4x - 5)^3\, dx$ (e) $\int \frac{1}{3x - 5}\, dx$ (f) $\int \frac{1}{\sqrt{5 - 9x}}\, dx$

(g) $\int (2x + 1)^2\, dx$ (h) $\int \frac{1}{x + 1}\, dx$

3. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int e^{2x+1} dx$ (b) $\int e^{3-8x} dx$ (c) $\int \frac{1}{e^{(7+4x)}}\, dx$

4. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int \cos^2 x\, dx$ (b) $\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx$

(c) $\int \sin 4x \cos 3x\, dx$ (d) $\int \cos 4x \cos 2x\, dx$

30.5.2 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ की तरह के फलनों का समाकलन

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$ का मान ज्ञात करने के लिए हम $f(x) = t$ रख लेते हैं, तब $f'(x)\, dx = dt$

$$\therefore \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \int \frac{dt}{t}$$

$$= \log|t| + c = \log|f(x)| + c$$

ऐसा फलन जिसका अंश, हर का अवकल हो, उसका समाकल हर का लघुगुणक होता है।

उदाहरण 30.10. मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$ (ii) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}\left(3+\sqrt{x}\right)}$

हल : (i) यहां अंश $2x$ हर (x^2+1) का अवकल है

$\therefore$ उपरोक्त नियम का उपयोग करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \log\left|x^2+1\right| + c$$

(ii) $\left(3+\sqrt{x}\right)$ का अवकल $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ है

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}\left(3+\sqrt{x}\right)} = \log\left|3+\sqrt{x}\right| + c$$

उदाहरण 30.11. मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx$ (ii) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx$

हल : (i) $e^x - e^{-x}$ का अवकल $e^x + e^{-x}$ है

$$\therefore \qquad \int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx = \log\left|e^x-e^{-x}\right| + c$$

दूसरी विधि : माना $e^x - e^{-x} = t$. तब $\left(e^x+e^{-x}\right)dx = dt$

$$\therefore \qquad \int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + c = \log\left|e^x-e^{-x}\right| + c$$

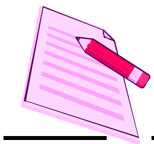
(ii) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx$

यहाँ $e^{2x}-1$(अंश), $e^{2x}+1$(हर) का अवकल नहीं है परन्तु यदि हम अंश और हर दोनों को e^{-x} से गुणा कर दें तो दिया गया फलन बन जाता है

$$\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$$

$$\therefore \qquad \int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

$$= \log\left|e^x+e^{-x}\right| + c \qquad (\because \text{ अंश } e^x - e^{-x} \text{ हर } e^x + e^{-x} \text{ का अवकल है})$$



टिप्पणी

देखें आपने कितना सीखा 30.4

1 मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int \frac{x}{3x^2 - 2} dx$ (b) $\int \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} dx$ (c) $\int \frac{2x+9}{x^2 + 9x + 30} dx$

(d) $\int \frac{x^2+1}{x^3 + 3x + 3} dx$ (e) $\int \frac{2x+1}{x^2 + x - 5} dx$ (f) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(5 + \sqrt{x}\right)}$

(g) $\int \frac{dx}{x\left(8 + \log x\right)}$

2. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int \frac{e^x}{2 + be^x} dx$ (b) $\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$

30.5.3 प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन के कुछ और उदाहरण

उदाहरण 30.12. मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\int \tan x \, dx$ (ii) $\int \sec x \, dx$

हलः (i) $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x} = -\int \frac{-\sin x \, dx}{\cos x}$

मान लीजिए $\cos x = t.$ तब $-\sin x \, dx = dt$

$$\therefore \quad \int \tan x \, dx = -\int \frac{dt}{t} = -\log|t| + c = -\log|\cos x| + c$$

$$= \log\left|\frac{1}{\cos x}\right| + c = \log|\sec x| + c$$

इसी प्रकार $\int \cot x \, dx = \log | \sin x | + c$

(ii) $\int \sec x \, dx$

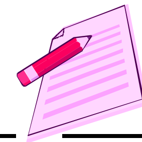
$\sec x$ का समाकलन ऐसे ही नहीं किया जा सकता क्योंकि $\sec x$ स्वयं किसी फलन का अवकल नहीं है। जबकि फलनों $\sec^2 x$ तथा $\sec x \tan x$ के लिए ऐसा नहीं है।

अब $\int \sec x \, dx$ को हम लिख सकते हैं

$$= \int \sec x \frac{(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)} dx = \int \frac{(\sec^2 x + \sec x \tan x)}{\sec x + \tan x} dx$$

मान लीजिए $\sec x + \tan x = t.$ तब $(\sec x \tan x + \sec^2 x)dx = dt$

$$\therefore \quad \int \sec x \, dx = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + c = \log|\sec x + \tan x| + c$$



टिप्पणी

उदाहरण 30.13. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx$$

हल : मान लीजिए $x = a \sin\theta \quad \Rightarrow \quad dx = a\cos\theta\, d\theta$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \int \frac{a\cos\theta}{a^2 - a^2\sin^2\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta} d\theta = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\cos\theta} d\theta = \frac{1}{a}\int \sec\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{a}\log\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + c = \frac{1}{a}\log\left|\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right| + c$$

$$= \frac{1}{a}\log\left|\frac{1+\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right| + c = \frac{1}{a}\log\left|\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right| + c$$

$$= \frac{1}{a}\log\left|\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}\right| + c = \frac{1}{a}\log\left|\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{2}}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$$

उदाहरण 30.14. मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$

हल : मान लीजिए कि $x = a\sec\theta \quad \Rightarrow dx = a\sec\theta\,\tan\theta\, d\theta$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{a^2\sec^2\theta - a^2}$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{\sec\theta\tan\theta}{\tan^2\theta} d\theta \qquad \left(\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1\right)$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{\sec\theta}{\tan\theta} d\theta = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sin\theta} d\theta = \frac{1}{a}\int \operatorname{cosec}\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{a}\log\left|\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta\right| + c = \frac{1}{a}\log\left|\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right| + c$$

$$= \frac{1}{a}\log\left|\frac{1-\frac{a}{x}}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}\right| + c = \frac{1}{a}\log\left|\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}}\right| + c$$

$$= \frac{1}{a}\log\left|\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}}\right| + c = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

उदाहरण 30.15. मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx$

हल: मान लीजिए कि $x = a \tan\theta \Rightarrow dx = a \sec^2\theta \, d\theta$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \int \frac{a \sec^2\theta}{a^2\left(1 + \tan^2\theta\right)} d\theta$$

$$= \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}\theta + c \qquad \left(\frac{x}{a} = \tan\theta \Rightarrow \tan^{-1}\frac{x}{a} = \theta\right)$$

$$= \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$$

उदाहरण 30.16 मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$

हल : मान लीजिए कि $x = a \sin\theta$

$$\Rightarrow \qquad dx = a \cos\theta \, d\theta$$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \frac{a \cos\theta}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2\theta}} d\theta$$

$$= \int \frac{a \cos\theta}{a \cos\theta} d\theta = \int d\theta$$

$$= \theta + c = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$$

उदाहरण 30.17. मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx$

हल : मान लीजिए कि $x = a \sec\theta \Rightarrow dx = a \sec\theta \tan\theta \, d\theta$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a \sec\theta \tan\theta}{a\sqrt{\sec^2\theta - 1}} d\theta$$

$$= \int \sec\theta d\theta = \log\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + c$$

$$= \log\left|\frac{x}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right| + c$$

$$= \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c$$

उदाहरण 30.18 मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx$

हल : मान लीजिए कि $x = a \tan\theta$

$$\Rightarrow \qquad dx = a \sec^2\theta \, d\theta$$

$$\therefore \qquad = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\, dx = \int \sec\theta \, d\theta \qquad \text{(जैसा कि उदाहरण 11.17 में)}$$

$$= \log\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + c = \log\left|\frac{1}{a}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{x}{a}\right| + c$$

$$= \log\left|\sqrt{a^2 + x^2} + x\right| + c$$

नोटः उदाहरण संख्या 11.12 से 11.18 के परिणामों को सूत्र के रूप में याद रखिए

उदाहरण 30.19. मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}\, dx$

हल : क्योंकि x^2 फलन $\left(x^4 + 1\right)$ का अवकल नहीं है इसलिए हम दिए गए समाकल को लिख सकते हैं

$$\int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}}\, dx$$

हम मान लेते हैं कि $\qquad x - \frac{1}{x} = t.$

$$\therefore \qquad \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = dt$$

तथा $\qquad x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = t^2 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$

$$\therefore \qquad \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}}\, dx = \int \frac{dt}{t^2 + 2} = \int \frac{dt}{(t)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{t}{\sqrt{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right) + c$$

उदाहरण 30.20. मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1}\, dx$

हल : $\qquad \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1}\, dx = \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}}\, dx$

मान लीजिए कि $\qquad x + \frac{1}{x} = t.$

तब $$\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx = dt$$

तथा $$x^2+2+\frac{1}{x^2} = t^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2+\frac{1}{x^2} = t^2-2$$

$$\therefore \quad \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{dt}{t^2-2} = \int \frac{dt}{(t)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + c = \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + c$$

उदाहरण 30.21. मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{x^2}{x^4+1}dx$

हल : हम दिए गए समाकल को हल करने के लिए, इसे उदाहरण 11.19 तथा उदाहरण 11.20 में दिये गये समाकल के रूप में परिवर्तित करेंगे।

$$\int \frac{x^2}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}\int\left[\frac{x^2+1}{x^4+1}+\frac{x^2-1}{x^4+1}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx + \frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx \qquad \text{उदाहरण 11.19 तथा 11.20 से}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|\right] + c$$

उदाहरण 30.22. मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{1}{x^4+1}dx$

हल : हम दिए गए समाकल को निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं

$$\frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)}{x^4+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx - \frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx \qquad \text{उदाहरण 11.21 से}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|\right] + c$$

उदाहरण 30.23. मान ज्ञात कीजिए : (a) $\int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx$ (b) $\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1} dx$

हल : (a) $$\int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx = \int \frac{1}{x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1} dx = \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \tan^{-1}\left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + c$$

(b) $$\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1} dx = \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} dx$$

मान लीजिए कि $x + \frac{1}{x} = t. \quad \Rightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = dt$

तथा $$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 1$$

$$\therefore \quad \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \log \left|\frac{t - 1}{t + 1}\right| + c = \frac{1}{2} \log \left|\frac{x + \frac{1}{x} - 1}{x + \frac{1}{x} + 1}\right| + c$$

उदाहरण 30.24. मान ज्ञात कीजिए : $\int \sqrt{\tan x}\, dx$

हल : मान लीजिए कि $\tan x = t^2 \quad \Rightarrow \quad \sec^2 x\, dx = 2t\, dt$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{2t}{\sec^2 x} dt = \frac{2t}{1 + t^4} dt$$

$$\therefore \quad \int \sqrt{\tan x}\, dx = \int t\left(\frac{2t}{1 + t^4}\right) dt = \int \frac{2t^2}{1 + t^4} dt$$

$$= \int \left(\frac{t^2 + 1}{t^4 + 1} + \frac{t^2 - 1}{t^4 + 1}\right) dt = \int \frac{t^2 + 1}{t^4 + 1} dt + \int \frac{t^2 - 1}{t^4 + 1} dt$$

इसके बाद उदाहरण 30.19 तथा 30.20 की भांति हल कीजिए।

उदाहरण 30.25. मान ज्ञात कीजिए : $\int \sqrt{\cot x}\, dx$

हल : मान लीजिए कि $\cot x = t^2 \quad \Rightarrow \quad -\text{cosec}^2 x\, dx = 2t\, dt$

$$\Rightarrow \qquad dx = \frac{-2t}{\operatorname{cosec}^2 x}\,dt = -\frac{2t}{t^4+1}\,dt$$

$$\therefore \qquad \int \sqrt{\cot x}\; dx = -\int t\left(\frac{2t}{t^4+1}\right)dt = -\int \frac{2t^2}{t^4+1}\,dt = -\int\left(\frac{t^2+1}{t^4+1} + \frac{t^2-1}{t^4+1}\right)dt$$

इसके बाद उदाहरण 30.19 तथा 30.20 की भांति हल कीजिए।

उदाहरण 30.26. मान ज्ञात कीजिए : $\int\left(\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}\right)dx$

हल : मान लीजिए कि $\sin x - \cos x = t \Rightarrow (\cos x + \sin x)\,dx = dt$

तथा $1 - 2\sin x\cos x = t^2 \Rightarrow 1 - t^2 = 2\sin x\cos x$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1-t^2}{2} = \sin x \cos x$$

अब? $\int\left(\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}\right)dx = \int\left(\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}} + \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}}\right)$

$$\therefore \qquad \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\cos x \sin x}}\,dx = \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{1-t^2}{2}}} = \sqrt{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= \sqrt{2}\sin^{-1}[\sin x - \cos x] + c$$

(उदाहरण 30.16 के परिणाम का उपयोग करने पर)

उदाहरण 30.27. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+3x-x^2}}$ (b) $\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-2x)}}$

हल : (a) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+3x-x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{8-(x^2-3x)}} = \int\frac{dx}{\sqrt{8-\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)+\frac{9}{4}}}$

$$= \int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{3}{2}\right)^2}} = \sin^{-1}\left[\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\frac{\sqrt{41}}{2}}\right] + c$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{41}}\right) + c$$

(b) $\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-2x)}} = \int\frac{dx}{\sqrt{x-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{x}{2}-x^2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{16} - \left[x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16}\right]}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{4}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^{-1}\left\{\frac{\left(x - \frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)}\right\} + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^{-1}(4x - 1) + c$$

देखें आपने कितना सीखा 30.5

1. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int \frac{x^2}{x^2 - 9} dx$ (b) $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$ (c) $\int \frac{x}{1 + x^4} dx$

(d) $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}}$ (e) $\int \frac{dx}{1 + 3\sin^2 x}$ (f) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$

(g) $\int \frac{dx}{3x^2 + 6x + 21}$ (h) $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}$ (i) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2 - 12}}$

(j) $\int \frac{d\theta}{\sin^4\theta + \cos^4\theta}$ (k) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$ (l) $\int \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}\, dx$

(m) $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$ (n) $\int \frac{3x^2}{\sqrt{9 - 16x^6}} dx$ (o) $\int \frac{(x + 1)}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$

(p) $\int \frac{dx}{\sqrt{9 + 4x^2}}$ (q) $\int \frac{\sin\theta}{\sqrt{4\cos^2\theta - 1}} d\theta$ (r) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x - 4}} dx$

(s) $\int \frac{1}{(x + 2)^2 + 1} dx$ (t) $\int \frac{1}{\sqrt{16x^2 + 25}} dx$

30.6 खंडश: समाकलन (Integration by Parts)

अवकलन में आपने सीखा है कि

$$\frac{d}{dx}(fg) = f\frac{d}{dx}(g) + g\frac{d}{dx}(f)$$

या
$$f\frac{d}{dx}(g) = \frac{d}{dx}(fg) - g\frac{d}{dx}(f) \qquad (1)$$

आप यह भी जानते हैं कि $\int \frac{d}{dx}(fg)\, dx = fg$

(1) का समाकलन करने पर हमें प्राप्त हुआ,

$$\int f \frac{d}{dx}(g)\,dx = \int \frac{d}{dx}(fg)\,dx - \int g \frac{d}{dx}(f)\,dx$$

$$= fg - \int g \frac{d}{dx}(f)\,dx \qquad (2)$$

यदि हम लें $\quad f = u(x);\ \frac{d}{dx}(g) = v(x),$

तब (2) बन जाता है, $\int u(x)\,v(x)\,dx$

$$= u(x)\cdot\int v(x)\,dx - \int\left[\frac{d}{dx}(u(x))\int v(x)\,dx\right]dx$$

= प्रथम फलन $\times$ दूसरे फलन का समाकल $-\int$[प्रथम फलन का अवकलन

$\times$ दूसरे फलन का समाकलन] dx

(A) (B)

यहां दो फलनों के गुणन में महत्वपूर्ण भाग है कि प्रथम और द्वितीय फलन का चुनाव कैसे किया जाए क्योंकि इनमें से कोई भी प्रथम अथवा द्वितीय फलन लिया जा सकता है।

इसके लिए उपरोक्त परिणाम का भाग B इसका सूचक होगा। प्रथम फलन ऐसा होना चाहिए कि आगे अवकलनों के उपरान्त या तो वह अगले पद लघुतर या स्थिर पद में परिवर्तित हो जाए।

$x \sin x,\ x\cos^2 x,\ x^2 e^x$ जैसे फलनों के समाकलनों में,

(i) बीजीय फलन को प्रथम फलन लिया जाना चाहिए।

(ii) यदि कोई बीजीय फलन नहीं है तो प्रथम फलन इस प्रकार लिया जाए कि उससे उपरोक्त की भांति 'B' में गुणनफल को सरल बनाया जा सके। प्रथम फलन का चुनाव करने के लिए वरीयता के नीचे दिए गए क्रम का उपयोग किया जा सकता है :

  (i) प्रतिलोम फलन

  (ii) लघुगणकीय फलन

  (iii) त्रिकोणमितीय फलन

  (iv) चरघांताकी फलन

निम्नलिखित उदाहरण प्रथम फलन के चुनाव की अवधारणा का अभ्यास करायेंगें।

		प्रथम फलन	दूसरा फलन
1.	$\int x\cos x\,dx$	x (क्योंकि यह बीजीय है)	$\cos x$
2.	$\int x^2 e^x dx$	x^2 (क्योंकि यह बीजीय है)	e^x
3.	$\int x^2 \log x\,dx$	$\log x$	x^2
4.	$\int \frac{\log x}{(1+x^2)}\,dx$	$\log x$	$\frac{1}{(1+x)^2}$
5.	$\int x\sin^{-1} x\,dx$	$\sin^{-1} x$	x

6.	$\int \log x \, dx$	$\log x$	1 (जब लघुगणकीय या प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन अकेले हों तो '1' को दूसरा फलन लिया जाता है।)
7.	$\sin^{-1} x \, dx$	$\sin^{-1} x$	1

उदाहरण 30.28. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int x^2 \sin x \, dx$$

हल : बीजीय फलन x^2 को प्रथम फलन तथा 'sin x' को दूसरा फलन लेने पर हमें प्राप्त हुआ

$$\int \underset{\mathrm{I}}{x^2} \underset{\mathrm{II}}{\sin x} \, dx = x^2 \int \sin x - \int \left[\frac{d}{dx}\left(x^2\right) \int \sin x \, dx \right] dx$$

$$= -x^2 \cos x - 2\int x(-\cos x) \, dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x \, dx \qquad (1)$$

तथा $\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + c \qquad (2)$

(2) का मान (1) में रखने पर हमें प्राप्त हुआ,

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2[x \sin x + \cos x] + c$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$$

उदाहरण 30.29. $\int x^2 \log x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए :

हल : वरीयता के क्रम के अनुसार हम log x को प्रथम फलन लेते हैं।

$$\therefore \quad \int \underset{\mathrm{I}}{\log x} \; \underset{\mathrm{II}}{x^2} \, dx = \frac{x^3}{3} \log x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} dx = \frac{x^3}{3} \log x - \int \frac{x^2}{3} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \log x - \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}\right) + c = \frac{x^3}{3} \log x - \frac{x^3}{9} + c$$

उदाहरण 30.30. $\int \sin^{-1} x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए :

हल : $$\int \sin^{-1} x \, dx = \int \sin^{-1} x \cdot 1 \cdot dx = x \sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

मान लीजिए कि $\quad 1 - x^2 = t$

$\Rightarrow \quad -2x \, dx = dt$

$$\Rightarrow \qquad x\,dx = \frac{-1}{2}\,dt$$

$$\therefore \qquad \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

$$\therefore \qquad \int \sin^{-1} x\,dx = x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c$$

देखें आपने कितना सीखा 30.6

मान ज्ञात कीजिए :

1. (a) $\int x \sin x\,dx$ (b) $\int \left(1+x^2\right)\cos 2x\,dx$ (c) $\int x\sin 2x\,dx$
2. (a) $\int x\tan^2 x\,dx$ (b) $\int x^2 \sin^2 x\,dx$
3. (a) $\int x^3 \log 2x\,dx$ (b) $\left(1-x^2\right)\log x\,dx$ (c) $\int (\log x)^2\,dx$
4. (a) $\int \frac{\log x}{x^n}\,dx$ (b) $\int \frac{\log(\log x)}{x}\,dx$
5. (a) $\int x^2 e^{3x}\,dx$ (b) $\int x\,e^{4x}\,dx$
6. $\int x(\log x)^2\,dx$
7. (a) $\int \sec^{-1} x\,dx$ (b) $\int x\cot^{-1} x\,dx$

30.7 $\int e^x[f(x)+f'(x)]\,dx$ के रूप के समाकल

$\int e^x[f(x)+f'(x)]\,dx$ में $f(x)$ का अवकलज $f'(x)$ है।

समाकलन के ऐसे प्रकारों में खंडशः विधि द्वारा समाकलन करने पर $e^x[f(x)]+c$ हल प्राप्त होता है।

उदाहरण के लिए $\int e^x[\tan x + \log\sec x]\,dx$ पर विचार कीजिए। (1)

मान लीजिए कि $\qquad f(x) = \log\sec x,$

तब $\qquad f'(x) = \dfrac{\sec x\tan x}{\sec x} = \tan x$

अतः (1) को पुनः इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$\int e^x[f'(x)+f(x)]\,dx = e^x[f(x)] + C = e^x\log\sec x + C$$

अन्यथा हम इसे निम्नलिखित प्रकार भी हल कर सकते हैं

$$\int e^x[\tan x + \log\sec x]\,dx = \underset{\text{I}}{\int e^x\tan x\,dx} + \underset{\text{II}}{\int e^x\log\sec x\,dx}$$

$$= e^x \log \sec x - \int e^x \log \sec x \, dx + \int e^x \log \sec x \, dx$$

$$= e^x \log \sec x + c$$

उदाहरण 30.31. निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$ (b) $\int e^x \left(\frac{1 + x \log x}{x} \right) dx$

(c) $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx$ (d) $\int e^x \left[\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \right] dx$

हल :

(a) $$\int e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int e^x \left[\frac{1}{x} + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} \right) \right] dx = e^x \left(\frac{1}{x} \right)$$

(b) $$\int e^x \left(\frac{1 + x \log x}{x} \right) dx = \int e^x \left(\frac{1}{x} + \log x \right) dx \int e^x \left(\log x + \frac{d}{dx}(\log x) \right) dx$$

$$= \int e^x (f(x) + f'(x)) \, dx = e^x \log x + C$$

(c) $$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx = \int \frac{x + 1 - 1}{(x+1)^2} e^x dx = \int e^x \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx$$

$$= \int e^x \left(\frac{1}{x+1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(x+1)} \right) \right) dx = e^x \left(\frac{1}{x+1} \right) + c$$

(d) $$\int e^x \left[\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \right] dx = \int e^x \left[\frac{1 + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \right] dx$$

$$= \int e^x \left[\frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2} \right] dx$$

$$= \int e^x \left[\tan \frac{x}{2} + \frac{d}{x}\left(\tan \frac{x}{2} \right) \right] dx = e^x \tan \frac{x}{2} + c$$

उदाहरण 30.32. निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int \sec^3 x \, dx$ (b) $\int e^x \sin x \, dx$

हल : (a) $\int \sec^3 x \, dx$

मान लीजिए कि $I = \int \sec x \cdot \sec^2 x \, dx$

$$= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \tan x \cdot \tan x \, dx$$

$\therefore$ $$I = \sec x \tan x - \int \left(\sec^3 x - \sec x \right) dx \qquad \left(\because \tan^2 x = \sec^2 x - 1 \right)$$

या $$I = \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx$$

या $$2I = \sec x \tan x + \int \sec x \ dx$$

या $$I = \sec x \tan x + \log|\sec x + \tan x| + c_1$$

या $$I = \frac{1}{2}[\sec x \tan x + \log|\sec x + \tan x|] + c$$

(b) $$\int e^x \sin x \ dx$$

मान लीजिए कि $I = \int e^x \sin x \ dx$

$$= e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x)\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \ dx$$

$$= -e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \int e^x \sin x \ dx\right)$$

$\therefore$ $$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$$

या $$2I = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

या $$I = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c$$

उदाहरण 30.33. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \ dx$$

हल : मान लीजिए कि $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} \ dx = \int \sqrt{a^2 - x^2}.1 \ dx$

1 को दूसरा फलन लेकर खंडश विधि द्वारा समाकलन करने पर

$$I = \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)x - \int \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}}(-2x) \cdot x \ dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \ dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{a^2 - \left(a^2 - x^2\right)}{\sqrt{a^2 - x^2}} \ dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \ dx - \int \sqrt{a^2 - x^2} \ dx$$

$\therefore$ $$I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - I$$

या $$2I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

या $$I = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right] + c$$

इसी प्रकार $$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c$$

$\therefore$ $$\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{a^2 + x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\log\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + c$$

नोटः उदाहरण संख्या 30.33 के परिणामों को सूत्र के रूप में याद रखिए।

उदाहरण 30.34. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int \sqrt{16x^2 + 25}\, dx$ (b) $\int \sqrt{16 - x^2}\, dx$ (c) $\int \sqrt{1 + x - 2x^2}\, dx$

हल :

(a) $$\int \sqrt{16x^2 + 25}\, dx = 4\int \sqrt{x^2 + \frac{25}{16}}\, dx = 4\int \sqrt{x^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2}\, dx$$

$\int \sqrt{\left(x^2 + a^2\right)}\, dx$ के सूत्र का उपयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\int \sqrt{16x^2 + 25}\, dx = \left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2 + \frac{25}{16}} + \frac{25}{32}\log\left|x + \sqrt{x^2 + \frac{25}{16}}\right|\right] + c$$

$$= \frac{x}{8}\sqrt{16x^2 + 25} + \frac{25}{8}\log\left|4x + \sqrt{16x^2 + 25}\right| + c$$

(b) $\int \sqrt{\left(a^2 - x^2\right)}\, dx$ के सूत्र का उपयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\int \sqrt{16 - x^2}\, dx = \int \sqrt{(4)^2 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{16 - x^2} + \frac{16}{2}\sin^{-1}\frac{x}{4} + c$$

(c) $$\int \sqrt{1 + x - 2x^2}\, dx = \sqrt{2}\int \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - x^2}\, dx$$

$$= \sqrt{2}\int \sqrt{\left[\frac{1}{2} - \left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{16}\right]}\, dx$$

$$= \sqrt{2}\int \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{4}\right)^2}\, dx$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{x - \frac{1}{4}}{2}\sqrt{\frac{9}{16} - \left(x - \frac{1}{4}\right)^2} + \frac{9}{16 \times 2}\sin^{-1}\frac{x - \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}\right] + c$$

देखें आपने कितना सीखा 30.7

मान ज्ञात कीजिए :

1. (a) $\int e^x \sec x\,[1+\tan x]\,dx$ (b) $\int e^x\,[\sec x + \log|\sec x + \tan x|]\,dx$

2. (a) $\int \frac{x-1}{x^2} e^x dx$ (b) $\int e^x \left(\sin^{-1} x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$

3. $\int e^x \frac{(x-1)}{(x+1)^3} dx$ 4. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$

5. $\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx$ 6. $\int e^x \sin 2x\, dx$

30.8 आंशिक भिन्नों का उपयोग करके समाकलन करना

अभी तक आप समाकलन की विभिन्न विधियां सीख चुके हैं।

परन्तु फिर भी $\frac{4x+5}{x^2+x-6}$ की तरह की स्थिति हो सकती है जबकि प्रतिस्थापन या खंडशः विधि अधिक सहायक नहीं है। ऐसी स्थिति में हम एक दूसरी तकनीक जिसे आंशिक भिन्नों के उपयोग से समाकलन की तकनीक कहा जाता है, की सहायता लेते हैं।

किसी भी उचित परिमेय भिन्न $\frac{p(x)}{q(x)}$ को ऐसी परिमेय भिन्नों के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जिनमें से प्रत्येक का हर $q(x)$ का एक सरल गुणनखंड हो। इस प्रकार की प्रत्येक भिन्न को आंशिक भिन्न कहते हैं तथा इस प्रक्रिया को वियोजन या दी गई भिन्न को आंशिक भिन्नों में विभक्त करना कहते हैं।

उदाहरण के लिए, $\frac{3}{x+2} + \frac{5}{x-1} = \frac{8x+7}{(x+2)(x-1)} = \frac{8x+7}{x^2+x-2}$

यहाँ $\frac{3}{x+2}$ तथा $\frac{5}{x-1}$, $\frac{8x+7}{x^2+x-2}$ की आंशिक भिन्न कहलाती हैं।

यदि $\frac{f(x)}{g(x)}$ एक उचित भिन्न है, तथा $g(x)$ का वास्तविक गुणनखंड़ों में विभक्त किया जा सकता है, तब

(a) प्रत्येक अनावर्ती रैखिक गुणनखंड $(ax+b)$ के संगत एक $\frac{A}{ax+b}$ के रूप वाली आंशिक भिन्न होती है।

(b) $(ax+b)^2$ के लिए दो आंशिक भिन्नों का योग लिया जाता है।

$$\frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2}$$

$(ax+b)^3$ के लिए तीन आंशिक भिन्न होती हैं।

$$\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{(ax+b)^2}+\frac{C}{(ax+b)^3} \text{ आदि}$$

(c) किसी अगुणनखंडीय द्विघात व्यंजक ax^2+bx+c के लिए एक आंशिक भिन्न $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ होती है।

इसलिए यदि किसी उचित भिन्न $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ में g (x) का वास्तविक गुणनखंडों में विभक्त किया जा सकता हो, तो $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है:

हर के गुणनखंड	संगत आंशिक भिन्न
$(ax+b)(x+d)$	$\dfrac{A}{ax+b}+\dfrac{B}{cx+d}$
$(ax+b)^2$	$\dfrac{A}{(ax+b)}+\dfrac{B}{(ax+b)^2}$
$(ax+b)^3$	$\dfrac{A}{ax+b}+\dfrac{B}{(ax+b)^2}+\dfrac{C}{(ax+b)^3}$
ax^2+bx+c	$\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
$\left(ax^2+bx+c\right)^2$	$\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\dfrac{Cx+D}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}$

जबकि A,B,C तथा D स्वेच्छ अचर है।

उदाहरण 30.35. $\displaystyle\int\frac{2x+5}{x^2-x-2}dx$ का मान ज्ञात कीजिए :

हल : $$\frac{2x+5}{x^2-x-2}=\frac{2x+5}{(x-2)(x+1)}$$

मान लीजिए कि $$\frac{2x+5}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1} \qquad (1)$$

हमें प्राप्त होता है :

$$2x+5=A(x+1)+B(x-2)$$

$x=2$ रखने पर हमें प्राप्त होता है : $9=3A$ या $A=3$

$x=-1$ रखने पर हमें प्राप्त होता है : $3=-3B$ या $B=-1$

इन मानों को (1) में रखने पर हमें मिलता है :

$$\frac{2x+5}{(x-2)(x+1)} = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{2x+5}{x^2-x-2}dx = \int \frac{3}{x-2}dx - \int \frac{1}{x+1}dx$$

$$= 3\log|x-2| - \log|x+1| + c$$

उदाहरण 30.36. $\int \frac{x^3+x+1}{x^2-1}dx$ का मान ज्ञात कीजिए :

हल : मान लीजिए कि $\quad I = \int \frac{x^3+x+1}{x^2-1}dx$

अब $\quad \frac{x^3+x+1}{x^2-1} = x + \frac{2x+1}{x^2-1} = x + \frac{2x+1}{(x+1)(x-1)}$

$$\therefore \qquad I = \int\left(x + \frac{2x+1}{(x+1)(x-1)}\right)dx \qquad (1)$$

मान लीजिए कि $\quad \frac{2x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \qquad (2)$

$$\Rightarrow \qquad 2x+1 = A(x-1) + B(x+1)$$

$x = 1$ रखने पर हमें प्राप्त होता है : $\quad B = \frac{3}{2}$

$x = -1$ रखने पर हमें प्राप्त होता है : $\quad A = \frac{1}{2}$

A और B के इन मानों को (2) में रखने पर तथा समाकलन करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\int \frac{2x+1}{\left(x^2-1\right)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{3}{2}\log|x-1| \qquad (3)$$

(1) और (3) से हमें प्राप्त होता है :

$$I = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{3}{2}\log|x-1| + C$$

उदाहरण 30.37. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{8}{(x+2)\left(x^2+4\right)}dx$$

हल : मान लीजिए कि $\frac{8}{(x+2)\left(x^2+4\right)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+4} \quad (\because x^2+4$ अवियोज्य है)

दोनों पक्षों को $(x+2)\left(x^2+4\right)$ से गुणा करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$8 = A\left(x^2+4\right)+\left(Bx+C\right)\left(x+2\right)$$

x की घातांको के संगत गुणाकों की दोनों पक्षों में तुलना करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\left.\begin{aligned} 0 &= A+B \\ 0 &= 2B+C \\ 8 &= 4A+2C \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad A=1,\ B=-1,\ C=2$$

$$\therefore \qquad \int \frac{8}{(x+2)\left(x^2+4\right)}dx = \int \frac{1}{x+2}dx - \int \frac{x-2}{x^2-4}dx$$

$$= \int \frac{1}{x+2}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}dx + 2\int \frac{dx}{x^4+4}$$

$$= \log|x+2| - \frac{1}{2}\log\left|x^2+4\right| + 2\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

$$= \log|x+2| - \frac{1}{2}\log\left|x^2+4\right| + \tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

उदाहरण 30.38. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{2\sin 2\theta - \cos\theta}{4-\cos^2\theta - 4\sin\theta}\,d\theta$$

हल : मान लीजिए कि $I = \int \frac{2\sin 2\theta - \cos\theta}{4-\cos^2\theta - 4\sin\theta}\,d\theta$

$$= \int \frac{(4\sin\theta - 1)\cos\theta d\theta}{3+\sin^2\theta - 4\sin\theta}$$

मान लीजिए कि $\sin\theta = t$, तब $\cos\theta\, d\theta = dt$

$$\therefore \qquad I = \int \frac{4t-1}{3+t^2-4t}dt$$

मान लीजिए कि $\quad \frac{4t-1}{3-t^2-4t} = \frac{A}{t-3}+\frac{B}{t-1}$

तब $\quad 4t-1 = A(t-1)+B(t-3)$

$t=1$ रखने पर $B = -\frac{3}{2}$

$t=3$ रखने पर $A = \frac{11}{2}$

$$\therefore \qquad I = \frac{11}{2}\int\left(\frac{1}{t-3}\right)dt - \frac{3}{2}\int\frac{dt}{t-1} = \frac{11}{2}\log|t-3| - \frac{3}{2}\log|t-1| + c$$

$$= \frac{11}{2}\log|\sin\theta - 3| - \frac{3}{2}\log|\sin\theta - 1| + c$$

देखें आपने कितना सीखा 30.8

निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

1. (a) $\int \sqrt{4x^2 - 5}\ dx$ (b) $\int \sqrt{x^2 + 3x}\ dx$ (c) $\sqrt{3 - 2x - 2x^2}\ dx$

2. (a) $\int \frac{x+1}{(x-2)(x-3)} dx$ (b) $\int \frac{x}{x^2 - 16} dx$

3. (a) $\int \frac{x^3}{x^2 - 4} dx$ (b) $\int \frac{2x^2 + x + 1}{(x-1)^2 (x+2)} dx$

4. $\int \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^3} dx$

5. (a) $\int \frac{\sin x}{\sin 4x} dx$ (b) $\int \frac{1 - \cos x}{\cos x (1 + \cos x)} dx$

आइये दोहराएँ

- समाकलन, अवकलन की प्रतिलोम क्रिया है
- अनिश्चित समाकलों के कुछ मानक रूप :

(a) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$

(b) $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$

(c) $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

(d) $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

(e) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

(f) $\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + c$

(g) $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$

(h) $\int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x + c$

(i) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$

(j) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$

(k) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$

(l) $\int e^{x}dx \qquad = e^{x} + c$

(m) $\int a^{x}dx \qquad = \dfrac{a^{x}}{\log a} + c\,(a > 0 \text{ and } a \neq 1)$

- **अनिश्चित समाकलों के गुणधर्म :**

(a) $\int [f(x) \pm g(x)]dx \qquad = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

(b) $\int kf(x)dx \qquad = k\int f(x)dx$

- (i) $\int (ax+b)^{n}\,dx \qquad = \dfrac{1}{a}\dfrac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c,\ (n \neq -1)$

(ii) $\int \dfrac{1}{ax+b}dx \qquad = \dfrac{1}{a}\log|ax+b| + c$

(iii) $\int \sin(ax+b)dx \qquad = \dfrac{-1}{a}\cos(ax+b) + c$

(iv) $\int \cos(ax+b)dx \qquad = \dfrac{1}{a}\sin(ax+b) + c$

(v) $\int \sec^{2}(ax+b)dx \qquad = \dfrac{1}{a}\tan(ax+b) + c$

(vi) $\int \operatorname{cosec}^{2}(ax+b)dx \qquad = -\dfrac{1}{a}\cot(ax+b) + c$

(vii) $\int \sec(ax+b)\tan(ax+b)dx \qquad = \dfrac{1}{a}\sec(ax+b) + c$

(viii) $\int \operatorname{cosec}(ax+b)\cot(ax+b)dx \qquad = -\dfrac{1}{a}\operatorname{cosec}(ax+b) + c$

(ix) $\int e^{ax+b}dx = \dfrac{1}{a}e^{ax+b} + c$

(x) $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx \qquad = \log|f(x)| + c$

- (i) $\int \tan x\,dx \qquad = -\log|\cos x| + c = \log|\sec x| + c$

(ii) $\int \cot x\,dx \qquad = \log|\sin x| + c$

(iii) $\int \sec x\,dx \qquad = \log|\sec x + \tan x| + c$

(iv) $\int \operatorname{cosec} x\,dx \qquad = \log|\operatorname{cosec} x - \cot x| + c$

- (i) $\int \dfrac{1}{a^{2}-x^{2}}dx = \dfrac{1}{2a}\log\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + c$ (ii) $\int \dfrac{1}{x^{2}-a^{2}}dx = \dfrac{1}{2a}\log\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + c$

(iii) $\int \dfrac{1}{x^{2}+a^{2}}dx = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a} + c$ (iv) $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}dx = \sin^{-1}\dfrac{x}{a} + c$

(v) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$

(vi) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$

- दो फलनों के गुणनफल का समाकल

  $=$ I फलन $\times$ II फलन का समाकल –

  $\int$[I फलन का अवकलन $\times$ II फलन का समाकल] dx

- $\int e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx = e^x f(x)+c$

- $\int\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]+c$

  $\int\sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$

  $\int\sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|+c$

- परिमेय भिन्न निम्नलिखित दो प्रकार की होती है:

  (i) उचित भिन्न जबकि अंश में चरांक की घातϕ हर में चरांक की घात से कम होती है।

  (ii) अनुचित भिन्न जबकि अंश में चरांक की घात $\geq$ हर में चरांक की घात के बराबर या उससे अधिक होती है।

- एक उचित भिन्न $\frac{f(x)}{g(x)}$ में यदि $g(x)$ को वास्तविक गुणनखंडों में विभक्त किया जा सकता हो, तो $\frac{f(x)}{g(x)}$ को निम्नलिखित रूप से लिखा जा सकता है:

हर के गुणनखंड	**संगत आंशिक भिन्न**
$(ax+b)(cx+d)$	$\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{cx+d}$
$(ax+b)^2$	$\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{(ax+b)^2}$
$(ax+b)^3$	$\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{(ax+b)^2}+\frac{C}{(ax+b)^3}$
ax^2+bx+c	$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
$\left(ax^2+bx+c\right)^2$	$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{Cx+D}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}$

जबकि A, B, C, D स्वेच्छ अचर हैं।

सहायक वेबसाइट

- *http://www.bbc.co.uk/education/asguru/maths/12methods/04integration/index.shtml*
- *http://en.wiktionary.org/wiki/integration*
- *http://www.sosmath.com/calculus/integration/byparts/byparts....*

आइए अभ्यास करें

निम्नलिखित फलनों के x के सापेक्ष समाकलन कीजिए :

1. $\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$

2. $\sqrt{1+\sin 2x}$

3. $\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}$

4. $(\tan x-\cot x)^2$

5. $\dfrac{4}{1+x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

6. $\dfrac{2\sin^2 x}{1+\cos 2x}$

7. $\dfrac{2\cos^2 x}{1-\cos 2x}$

8. $\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2$

9. $\left(\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}\right)^2$

10. $\cos(7x-\pi)$

11. $\sin(3x+4)$

12. $\sec^2(2x+b)$

13. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x-\cos x}$

14. $\displaystyle\int\frac{1}{\left(1+x^2\right)\tan^{-1}x}dx$

15. $\displaystyle\int\frac{\operatorname{cosec} x}{\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)}dx$

16. $\displaystyle\int\frac{\cot x}{3+4\log\sin x}dx$

17. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin 2x\log\tan x}$

18. $\displaystyle\int\frac{e^x+1}{e^x-1}dx$

19. $\displaystyle\int\sec^4 x\tan x\,dx$

20. $\displaystyle\int e^x\sin e^x dx$

21. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+3}}$

22. $\displaystyle\int\frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x}}dx$

23. $\displaystyle\int\sqrt{25-9x^2}\,dx$

24. $\displaystyle\int\sqrt{2ax-x^2}\,dx$

25. $\int \sqrt{3x^2+4}\,dx$

26. $\int \sqrt{1+9x^2}\,dx$

27. $\int \dfrac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

28. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x+4\cos^2 x}$

29. $\int \dfrac{dx}{2+\cos x}$

30. $\int \dfrac{dx}{x^2-6x+13}$

31. $\int \dfrac{dx}{1+3\sin^2 x}$

32. $\int \dfrac{x^2}{x^2-a^2}dx$

33. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{9+x^4}}$

34. $\int \dfrac{\sin x}{\sin 3x}dx$

35. $\int \dfrac{dx}{1-4\cos^2 x}$

36. $\int \sec^2(ax+b)\,dx$

37. $\int \dfrac{dx}{x(2+\log x)}$

38. $\int \dfrac{x^5}{1+x^6}dx$

39. $\int \dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

40. $\int \dfrac{\cot x}{\log \sin x}dx$

41. $\int \dfrac{\sec^2 x}{a+b\tan x}dx$

42. $\int \dfrac{\sin x}{1+\cos x}dx$

43. $\int \cos^2 x\,dx$

44. $\int \sin^3 x\,dx$

45. $\int \sin 5x \sin 3x\,dx$

46. $\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx$

47. $\int \sin^4 x\,dx$

48. $\int \dfrac{1}{1+\sin x}dx$

49. $\int \tan^3 x\,dx$

50. $\int \dfrac{\cos x-\sin x}{1+\sin 2x}dx$

51. $\int \dfrac{\operatorname{cosec}^2 x}{1+\cot x}dx$

52. $\int \dfrac{1+x+\cos 2x}{x^2+\sin 2x+2x}dx$

53. $\int \dfrac{\sec\theta \operatorname{cosec}\theta\,d\theta}{\log \tan\theta}$

54. $\int \dfrac{\cot\theta\,d\theta}{\log \sin\theta}$

55. $\int \dfrac{dx}{1+4x^2}$

56. $\int \dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}d\theta$

57. $\int \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}dx$

58. $\int \dfrac{\sin x \cos x\,dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$

59. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$

60. $\int e^x \left(\cos^{-1} x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$

61. $\int e^x \left(\frac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x} \right) dx$

62. $\int \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\, dx$

63. $\int \cos \left[2 \cot^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) \right] dx$

64. $\int \frac{\sin^{-1} x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx$

65. $\int \sqrt{x} \log x \; dx$

66. $\int e^x (1+x) \log \left(xe^x \right) dx$

67. $\int \frac{\log x}{(1+x)^2} dx$

68. $\int e^x \sin^2 x \; dx$

69. $\int \cos(\log x)\, dx$

70. $\int \log(x+1)\, dx$

71. $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^2 (x+3)} dx$

72. $\int \frac{\sin\theta \cos\theta}{\cos^2\theta - \cos\theta - 2} d\theta$

73. $\int \frac{dx}{x\left(x^5+1\right)}$

74. $\int \frac{x^2+1}{\left(x^2+2\right)\left(2x^2+1\right)} dx$

75. $\int \frac{\log x}{x(1+\log x)(2+\log x)} dx$

76. $\int \frac{dx}{1-e^x}$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 30.1

1. $\frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + 1, \; \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + 2, \; \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + 3, \; \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + 4, \; \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + 5$

2. (a) $\frac{x^6}{6} + c$ (b) $\sin x + c$ (c) 0

3. (a) $\frac{x^7}{7} + c$ (b) $\frac{1}{6x^6} + c$ (c) $\log|x| + c$

(d) $\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x}{\log\left(\frac{3}{5}\right)} + c$ (e) $\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + c$ (f) $\frac{-1}{8x^8} + c$

(g) $2\sqrt{x} + c$ (h) $9x^{\frac{1}{9}} + c$

4. (a) $-\operatorname{cosec}\theta + c$ (b) $\sec\theta + c$
(c) $\tan\theta + c$ (d) $-\cot\theta + c$

देखें आपने कितना सीखा 30.2

1. (a) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x + c$ (b) $-x + \tan^{-1}x + c$
(c) $x^{10} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{x} + c$ (d) $-\frac{1}{x^5} - \frac{3}{4x^4} + \frac{2}{3x^3} + \frac{7}{x} - 8x + c$
(e) $\frac{x^3}{3} - x - \tan^{-1}x + c$ (f) $\frac{x^2}{2} + 4x + 4\log x + c$

2. (a) $\frac{1}{2}\tan x + c$ (b) $\tan x - x + c$
(c) $-2\operatorname{cosec} x + c$ (d) $-\frac{1}{2}\cot x + c$
(e) $-\sec x + c$ (f) $-\cot x + \operatorname{cosec} x + c$

3. (a) $\sqrt{2}\sin x + c$ (b) $-\sqrt{2}\cos x + c$
(c) $-\frac{1}{2}\cot x + c$

4. (a) $\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + c$

देखें आपने कितना सीखा 30.3

1. (a) $\frac{1}{5}\cos(4-5x) + c$ (b) $\frac{1}{3}\tan(2+3x) + c$
(c) $\log\left|\sec\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| + c$
(d) $\frac{1}{4}\sin(4x+5) + c$
(e) $\frac{1}{3}\sec(3x+5) + c$ (f) $-\frac{1}{5}\operatorname{cosec}(3+5x) + c$

2. (a) $\frac{1}{12(3-4x)^3} + c$ (b) $\frac{1}{5}(x+1)^5 + c$
(c) $-\frac{1}{77}(4-7x)^{11} + c$ (d) $\frac{1}{16}(4x-5)^4 + c$
(e) $\frac{1}{3}\log|3x-5| + c$ (f) $-\frac{2}{9}\sqrt{5-9x} + c$

(g) $\frac{1}{6}(2x+1)^3 + c$ (h) $\log|x+1| + c$

3. (a) $\frac{1}{2}e^{2x+1} + c$ (b) $-\frac{1}{8}e^{3-8x} + c$

(c) $-\frac{1}{4e^{(7+4x)}} + c$

4. (a) $\frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + c$ (b) $\frac{1}{32}\left(-\frac{3}{2}\cos 2x + \frac{1}{6}\cos 6x\right) + c$

(c) $\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 7x}{7} - \cos x\right] + c$ (d) $\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 2x}{2}\right] + c$

देखें आपने कितना सीखा 30.4

1. (a) $\frac{1}{6}\log\left|3x^2 - 2\right| + c$ (b) $\log\left|x^2 + x + 1\right| + c$

(c) $\log\left|x^2 + 9x + 30\right| + c$ (d) $\frac{1}{3}\log\left|x^3 + 3x + 3\right| + c$

(e) $\log\left|x^2 + x - 5\right| + c$ (f) $2\log\left|5 + \sqrt{x}\right| + c$

(g) $\log|8 + \log x| + c$

2. (a) $\frac{1}{b}\log\left|a + be^x\right| + c$ (b) $\tan^{-1}\left(e^x\right) + c$

देखें आपने कितना सीखा 30.5

1. (a) $x + \frac{3}{2}\log\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + c$ (b) $\tan^{-1}\left(e^x\right) + c$

(c) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(x^2\right) + c$ (d) $\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3x}{4}\right) + c$

(e) $\frac{1}{2}\tan^{-1}(2\tan x) + c$ (f) $\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$

(g) $\frac{1}{3\sqrt{6}}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{6}}\right) + c$ (h) $\sin^{-1}\left(\frac{x+2}{3}\right) + c$

(i) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\sec^{-1}\frac{x}{2} + c$ (j) $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan^2\theta - 1}{\sqrt{2}\tan\theta}\right) + c$

(k) $\log\left|e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}\right| + c$ (l) $\sin^{-1}x - \sqrt{1 - x^2} + c$

(m) $\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + c$ (n) $\frac{1}{4}\sin^{-1}\left(\frac{4}{3}x^3\right) + c$

(o) $\sqrt{x^2+1}+\log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+c$ (p) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{2x+\sqrt{9+4x^2}}{2}\right|+c$

(q) $-\frac{1}{2}\log\left|2\cos\theta+\sqrt{4\cos^2\theta-1}\right|+c$

(r) $\log\left|\tan x+\sqrt{\tan^2 x-4}\right|+c$

(s) $\tan^{-1}\left(\frac{x+2}{1}\right)+c$ (t) $\frac{1}{4}\log\left|x+\sqrt{x^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2}\right|+c$

देखें आपने कितना सीखा 30.6

1. (a) $-x\cos x+\sin x+c$

   (b) $\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)\sin 2x+\frac{x\cos 2x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+c$

   (c) $\frac{-x\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2}+c$

2. (a) $x\tan x-\log|\sec x|-x+c$

   (b) $\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2\sin 2x-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+c$

3. (a) $\frac{x^4\log 2x}{4}-\frac{x^4}{16}+c$ (b) $\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\log x-x+\frac{x^3}{9}+c$

   (c) $x(\log x)^2-2x\log x+2x+c$

4. (a) $\frac{x^{1-n}}{1-n}\log x-\frac{x^{1-n}}{(1-n)^2}+c$ (b) $\log x.\left[\log(\log x)-1\right]+c$

5. (a) $e^{3x}\left[\frac{x^2}{3}-\frac{2x}{9}+\frac{2}{27}\right]+c$ (b) $x\frac{e^{4x}}{4}-\frac{e^{4x}}{16}+c$

6. $\frac{x^2}{2}\left[(\log x)^2-\log x+\frac{1}{2}\right]+c$

7. (a) $x\sec^{-1}x-\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$

   (b) $\frac{x^2}{2}\cot^{-1}x+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cot^{-1}x+c$

देखें आपने कितना सीखा 30.7

1. (a) $e^x \sec x + c$ (b) $e^x \log|\sec x + \tan x| + c$

2. (a) $\frac{1}{x}e^x + c$ (b) $e^x \sin^{-1} x + c$

3. $\frac{e^x}{(1+x)^2} + c$ 4. $\frac{e^x}{1+x} + c$

5. $x \tan \frac{x}{2} + c$ 6. $\frac{1}{5}e^x(\sin 2x - 2\cos 2x) + c$

देखें आपने कितना सीखा 30.8

1. (a) $x\sqrt{x^2 - \frac{5}{4}} - \frac{5}{4}\log\left|x + \sqrt{x^2 - \frac{5}{4}}\right| + c$

   (b) $\frac{(2x+3)}{4}\sqrt{x^2+3x} - \frac{9}{8}\log\left|\left(x+\frac{3}{2}\right) + \sqrt{x^2+3x}\right| + c$

   (c) $\frac{1}{4}(2x+1)\sqrt{3-2x-2x^2} + \frac{7}{4\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) + c$

2. (a) $4\log|x-3| - 3\log|x-2| + c$

   (b) $\frac{1}{2}\log|x-4| + \log|x+4| + c$

3. (a) $\frac{x^2}{2} - 2[\log|x-2| + \log|x+2|] + c$

   (b) $\frac{11}{9}\log|x-1| + \frac{7}{9}\log(x+2) - \frac{4}{3(x-1)} + c$

4. $\log|x-1| - \frac{3}{(x-1)} - \frac{3}{2(x-1)^2} + c$

5. (a) $\frac{1}{8}\log|1-\sin x| - \frac{1}{8}|1+\sin x|$

   $-\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left|1-\sqrt{2}\sin x\right| + \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left|1+\sqrt{2}\sin x\right| + c$

   (b) $\log|\sec x + \tan x| - 2\tan\frac{x}{2} + c$

आइए अभ्यास करें

1. $\sec x - \operatorname{cosec} x + c$ 2. $\sin x - \cos x + c$

3. $-\cot x - \tan x + c$ 4. $\tan x - \cot x - 4x + c$

5. $4\tan^{-1}x - \sin^{-1}x + c$

6. $\tan x - x + c$

7. $-\cot x - x + c$

8. $x - \cos x + c$

9. $x + \cos x + c$

10. $\dfrac{\sin(7x-\pi)}{7} + c$

11. $\dfrac{-\cos(3x+4)}{3} + c$

12. $\dfrac{\tan(2x+b)}{2} + c$

13. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\operatorname{cosec}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) - \cot\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right| + c$

14. $\log\left|\tan^{-1}x\right| + c$

15. $\log\left|\log\tan\dfrac{x}{2}\right| + c$

16. $\dfrac{1}{4}\log\left|3+4\log\sin x\right| + c$

17. $\dfrac{1}{2}\log\left|\log\tan x\right| + c$

18. $2\log\left|e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{-x}{2}}\right| + c$

19. $\dfrac{1}{4}\sec^4 x + c$

20. $-\cos e^x + c$

21. $\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{2} + c$

22. $2\sqrt{\tan x} + c$

23. $\dfrac{1}{6}x\sqrt{(25-9x^2)} + \dfrac{25}{6}\sin^{-1}\left(\dfrac{3}{5}x\right) + c$

24. $\dfrac{1}{2}(x-a)\sqrt{2ax-x^2} + \dfrac{1}{2}a^2\sin^{-1}\left(\dfrac{x-a}{a}\right) + c$

25. $\dfrac{x\sqrt{3x^2+4}}{2} + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\log\left|\dfrac{\sqrt{3}x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right| + c$

26. $\dfrac{x\sqrt{9x^2+1}}{2} + \dfrac{1}{6}\log\left|3x+\sqrt{1+9x^2}\right| + c$

27. $\left[\dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} + \dfrac{1}{2}a^2\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|\right] + c$

28. $\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{\tan x}{2}\right) + c$

29. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left[\dfrac{\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right] + c$

30. $\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{x-3}{2}\right) + c$

31. $\dfrac{1}{2}\tan^{-1}(2\tan x) + c$

32. $x+\frac{a}{2}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$

33. $\frac{1}{12}\log\left|\frac{\sqrt{9+x^4}-3}{\sqrt{9+x^4}+3}\right|+c$

34. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\left|\frac{\sqrt{3}+\tan x}{\sqrt{3}-\tan x}\right|+c$

35. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{\tan x-\sqrt{2}}{\tan x+\sqrt{2}}\right|+c$

36. $\frac{1}{a}\tan(ax+b)+c$

37. $\log|(2+\log x)|+c$

38. $\frac{1}{6}\log(1+x^6)+c$

39. $\log|\sin x+\cos x|+c$

40. $\log|\log(\sin x)|+C$

41. $\frac{1}{b}\log|a+b\tan x|+c$

42. $-\log|1+\cos x|+c$

43. $\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2}+\frac{1}{2}x+c$

44. $-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+c$

45. $\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sin 8x}{8}+c$

46. $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{\sin^5 x}{5}+c$

47. $\frac{1}{32}[12x-8\sin 2x+\sin 4x]+c$

48. $\tan x-\sec x+c$

49. $\frac{\tan^2 x}{2}+\log|\cos x|+c$

50. $\frac{-1}{\cos x+\sin x}+c$

51. $\log\left|\frac{1}{1+\cot x}\right|+c$

52. $\frac{1}{2}\log|x^2+\sin 2x+2x|+c$

53. $\log|\tan\theta|+c$

54. $\log|\log\sin\theta|+c$

55. $\frac{1}{2}\tan^{-1}2x$

56. $\log|\cos\theta+\sin\theta|+c$

57. $e^{-\frac{1}{x}}+c$

58. $\frac{1}{2(a^2-b^2)}\log|a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x|+c$

59. $\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\sec\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|+c$

60. $e^x\cos^{-1}x+c$

61. $e^x\sec x+c$

62. $\frac{1}{4}x^2+c$

63. $-\frac{1}{2}x^2+c$

64. $\dfrac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{2}\log\left|1-x^2\right|+c$ 65. $\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\log x-\dfrac{2}{3}\right)+c$

66. $xe^x\left[\log\left(xe^x\right)-1\right]+c$ 67. $-\dfrac{1}{1+x}\log|x|+\log|x|-\log|x+1|+c$

68. $\dfrac{1}{2}e^x-\dfrac{e^x}{10}(2\sin 2x+\cos 2x)+c$ 69. $\dfrac{x}{2}\left[\cos(\log x)+\sin(\log x)\right]+c$

70. $x\log|x+1|-x+\log|x+1|+c$

71. $\dfrac{3}{8}\log|x-1|-\dfrac{1}{2(x-1)}+\dfrac{5}{8}\log|x+3|+c$

72. $-\dfrac{2}{3}\log|\cos\theta-2|-\dfrac{1}{3}\log|\cos\theta+1|+c$ 73. $\dfrac{1}{5}\log\left|\dfrac{x^5}{x^5+1}\right|+c$

74. $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)+\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x\right)\right]+c$ 75. $\log\left|\dfrac{(2+\log x)^2}{1+\log x}\right|+c$

76. $\log\left|\dfrac{e^x}{1-e^x}\right|+c$