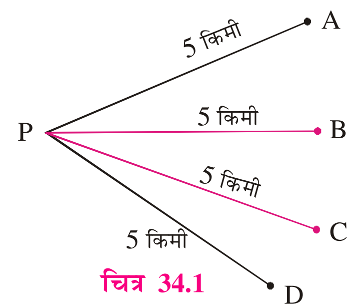
34

सदिश

हम दैनिक जीवन की स्थितिओं में भौतिक राशियों जैसे दूरी, चाल, तापमान, आयतन इत्यादि का प्रयोग करते हैं। यह मात्राएँ स्थिति के परिवर्तन, स्थिति के परिवर्तन की दर, वस्तु या एक विशेष स्थान का तापमान तथा एक विशेष स्थान में घेरे हुए अंतरिक्ष का वर्णन करने के लिए पर्याप्त हैं। हमें ऐसी भौतिक राशियाँ– जैसे विस्थापन, वेग, त्वरण, संवेग इत्यादि भी देखने को मिलती हैं, जोकि भिन्न प्रकार की हैं।

आइए निम्न स्थिति का अवलोकन करें। मान लीजिए एक निश्चित बिन्दु P से चार बिन्दु A,B,C और D समान दूरी (माना प्रत्येक 5 किमी) पर हैं। यदि आपको निश्चित बिन्दु P से 5 किमी चलने के लिए कहा जाए, तो आप A,B,C या D में से किसी एक बिन्दु पर पहुँच सकते हैं। अत: आरम्भिक बिन्दु और दूरी, गन्तव्य स्थान का वर्णन करने के लिए पर्याप्त नहीं हैं। निश्चित बिन्दु से अन्तय: बिन्दु का विचार दिशा की आवश्यकता दर्शाता है।



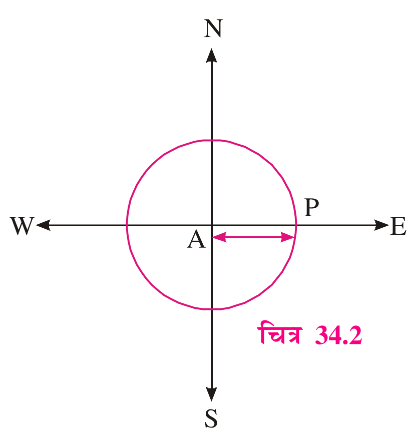
चित्र 34.1

एक गतिशील गेंद का उदाहरण लें। यदि हम किसी समय पर गेंद की स्थिति के बारे में सूचना देना चाहें, तो हमें किन मूलभूत बातों की आवश्यकता होगी जिससे हम यह पूर्वानुमान कर सकें ?

मान लीजिए आरम्भ में गेंद एक विशेष बिन्दु A पर है। यदि यह पता हो कि गेंद सरल रेखा में 5 सेमी/सेकिन्ड की चाल से चल रही है, तो क्या हम 3 सेकिन्ड के बाद गेंद की स्थिति को बता सकेंगे? स्पष्टतया नहीं। शायद हम यह कह दें कि गेंद बिन्दु A से 15 सेमी की दूरी पर होगी तथा इसलिए यह केन्द्र A तथा 15 सेमी त्रिज्या के वृत्त पर किसी बिन्दु पर होगी।

अत: केवल चाल और समय का ज्ञान गेंद की स्थिति का वर्णन करने के लिए पर्याप्त नहीं है। जबकि यदि हम यह जानते हैं कि गेंद A के पूर्व की दिशा में 5 सेमी/सेकिन्ड की चाल से चलती है तो हम इस स्थिति में होंगे कि यह बता सकें कि 3 सेकेन्ड के बाद गेंद 15 सेमी दूर एक बिन्दु P पर A के पूर्व की दिशा में होगी।

अत: एक गेंद के t(3) सेकिन्ड में विस्थापन के अध्ययन के लिए हमें गति का परिमाण (अर्थात् 5 सेमी/सेकिन्ड) तथा इस की दिशा (A के पूर्व) की आवश्यकता होगी। इस पाठ में, हम ऐसी राशियों के विषय में चर्चा करेंगे जिनका केवल परिमाण होता है– इन्हें अदिश कहा जाता है तथा ऐसी राशियों के विषय में भी पढ़ेंगे जिनका परिमाण और दिशा दोनों होते है– इन्हें सदिश कहते हैं। सदिशों को हम दिष्ट रेखाखण्डों द्वारा दर्शायेंगे तथा उनके परिणाम और दिशाएँ निर्धारित करेंगे। हम विभिन्न प्रकार के सदिशों का अध्ययन करेंगे और उन पर कुछ संक्रियाएँ करेंगे तथा उनके गुणों का अध्ययन करेंगे। हम अपने आपको



चित्र 34.2

एक बिन्दु के, किसी मूलबिन्दु के सापेक्ष, स्थिति सदिश के बारे में अवगत करवायेंगे। हम दो विमाओं या तीन विमाओं में, दो या तीन युग्मत: लम्बिक दिशाओं का प्रयोग करते हुए, एक सदिश के घटक ज्ञात करेंगे। हम विभाजन सूत्र की भी उत्पत्ति करेंगे तथा इसे समस्याओं में प्रयोग करेंगे। हम दो सदिशों के अदिश और सदिश गुणनफलों को भी परिभाषित करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाएंगे :

- दिशा के ज्ञान की आवश्यकता स्पष्ट करना
- अदिश और सदिश को परिभाषित करना
- अदिशों और सदिशों में भेद करना
- सदिशों को दिष्ट रेखाखण्डों के रूप में निरूपित करना
- सदिश का परिमाण और दिशा ज्ञात करना
- भिन्न भिन्न प्रकार के सदिशों का वर्गीकरण करना, रिक्त तथा एकक (मात्रक) सदिश
- दो सदिशों की समानता परिभाषित करना
- एक बिन्दु के स्थिति सदिश को परिभाषित करना
- सदिशों का जोडना और घटाना
- एक सदिश की एक अदिश से गुणा करना
- सदिशों पर विभिन्न संक्रियाओं के गुणों के कथन देना और उनका प्रयोग करना
- त्रिविमीय आकाश को समझना
- एक सदिश को दो या तीन लम्बिक अक्षों के अनुदिश वियोजित करना
- विभाजन सूत्र की उत्पत्ति करना तथा इसका प्रयोग करना
- दो सदिशों के अदिश (डाट) गुणनफल,
  तथा सदिश (क्रास) गुणनफल को परिभाषित करना
- सदिश के दिक-कोसाइन एवं दिक अनुपात को परिभाषित करना एवं समझना
- सदिशों के त्रिक गुणनफल को परिभाषित करना।
- सदिशों के अदिश त्रिक गुणनफल को समझना और इसके प्रयोग से समान्तर षटफलक का आयतन ज्ञात करना।
- चार बिन्दुओं के समतलीय होने की समझ।

पूर्व ज्ञान

- समतल ज्यामिति और निर्देशांक ज्यामिति का ज्ञान
- त्रिकोणमिति का ज्ञान

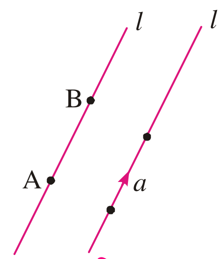
34.1 अदिश तथा सदिश

एक भौतिक राशि जिसे केवल संख्या द्वारा व्यक्त किया जा सकता हो, अदिश कहलाती है। दूसरे शब्दों में वह राशि जिसका केवल परिमाण होता है अदिश कहलाती है। समय, द्रव्यमान, लम्बाई, चाल, तापमान, आयतन, ताप की मात्रा, किया गया कार्य आदि सभी राशियाँ **अदिश** हैं।

भौतिक राशियाँ जो परिमाण तथा दिशा रखती हों, सदिश कहलाती हैं। विस्थापन, वेग, त्वरण, बल, भार इत्यादि **सदिशों** के उदाहरण हैं।

34.2 सदिश एक दिष्ट रेखाखण्ड के रूप में

आप याद कीजिए कि एक रेखाखण्ड एक दी गई रेखा का एक भाग होता है, जिसके दो अंत्य: बिन्दु होते हैं। कोई एक रेखा l लीजिए (जो कि आधार कहलाता है)। l का वह भाग जिस के अन्त: बिन्दु A और B हैं, एक रेखाखण्ड कहलाता है। रेखाखण्ड AB, A से B की दिशा में $\overrightarrow{AB}$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है तथा एक दिष्ट रेखाखण्ड कहलाता है। बिन्दुओं A और B को सदिश $\overrightarrow{AB}$ के क्रमश: आदि तथा अन्त: बिन्दु कहते हैं।



चित्र 34.3

लम्बाई AB, सदिश $\overrightarrow{AB}$ का परिमाण या मापांक कहलाती है तथा इसे $|\overrightarrow{AB}|$ द्वारा दर्शाते हैं। दूसरे शब्दों में, लम्बाई $AB = |\overrightarrow{AB}|$ है।

अदिशों को प्राय: a,b,c इत्यादि द्वारा प्रकट करते हैं, जबकि सदिशों को प्राय: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ इत्यादि द्वारा दर्शाते हैं। सदिश $\vec{a}$ के परिमाण $|\vec{a}|$ को प्राय: प्रतीक 'a' द्वारा दिखाते हैं।

34.3 सदिशों का वर्गीकरण

34.3.1 शून्य सदिश (रिक्त सदिश)

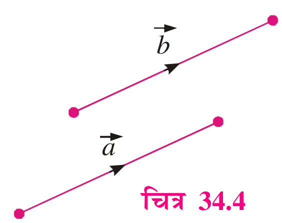
एक सदिश जिसका परिमाण शून्य हो, शून्य सदिश कहलाता है। शून्य सदिश की कोई निश्चित दिशा नहीं होती। सदिश $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}$ शून्य सदिश हैं। शून्य सदिश को प्रतीक $\vec{0}$ द्वारा भी प्रकट करते हैं, जिससे इसमें तथा अदिश 0 में अन्तर स्पष्ट हो सके।

34.3.2 एकक सदिश

एक सदिश जिसका परिमाण एक इकाई हो, एकक सदिश कहलाता है। अत: एकक सदिश $\vec{a}$ के लिए, $|\vec{a}| = 1$ होता है। एकक सदिश को प्राय: $\hat{a}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। अत:, $\vec{a} = |\vec{a}|\,\hat{a}$ है।

34.3.3 समान सदिश

दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समान सदिश कहलाते हैं यदि उन के परिणाम समान हों अर्थात $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ तथा एक ही दिशा में हों जैसा कि चित्र 34.4 में दिखाया गया है।



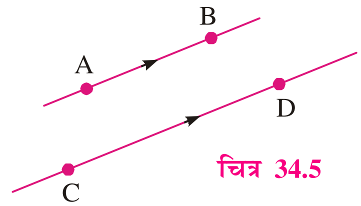
चित्र 34.4

संकेत रूप में इसे $\vec{a} = \vec{b}$ द्वारा दर्शाया जाता है।

टिप्पणी: दो सदिश तब भी समान हो सकते हैं, यदि उनके आधार की रेखाएँ भिन्न हों परन्तु समान्तर हों।

34.3.4 समदिश सदिश

सदिश समदिश कहलाते हैं, यदि उनकी दिशाएँ एक ही हों, उन का परिमाण चाहे कुछ भी हो। चित्र 34.5 में, सदिश $\overrightarrow{AB}$ और सदिश $\overrightarrow{CD}$ समदिश हैं यद्यपि उन के परिमाण समान नहीं हैं।

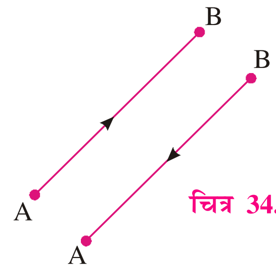


चित्र 34.5

34.3.5 सदिश का ऋण

सदिश $\overrightarrow{BA}$ सदिश $\overrightarrow{AB}$ का ऋण कहलाता है, जब उनके परिमाण तो समान हों परन्तु दिशाएँ विपरीत हों। चित्र 34.6

अर्थात्, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

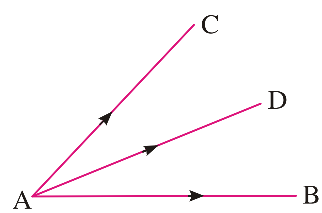


चित्र 34.6

34.3.6 सह-आदि सदिश

दो या अधिक सदिश **सह-आदि सदिश** कहलाते हैं, यदि उनका आदि बिन्दु एक ही हो।

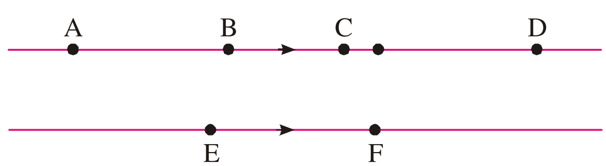
संलग्न चित्र 34.7 में, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ और $\overrightarrow{AC}$ एक ही बिन्दु A वाले सह-आदि सदिश हैं।



चित्र 34.7

34.3.7 संरेख सदिश

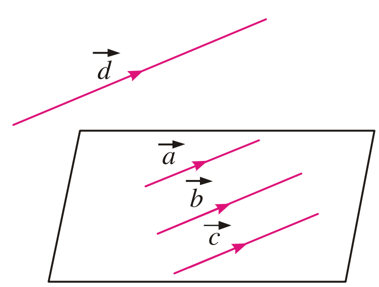
सदिश संरेख होते हैं, यदि वह एक ही रेखा के समान्तर हों, चाहे उनके परिमाण कुछ भी हों। संलग्न चित्र 34.8 में, सदिश $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ और $\overrightarrow{EF}$ संरेख सदिश हैं। सदिश $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{DC}$ भी संरेख हैं।



चित्र 34.8

34.3.8 समतलीय सदिश

वे सदिश समतलीय सदिश कहलाते हैं, जो एक ही तल के समान्तर होते हैं। संलग्न चित्र 34.9 में, सदिश $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ और $\vec{d}$ समतलीय हैं। यहाँ पर $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ तो एक ही तल में हैं जबकि सदिश $\vec{d}$, सदिशों $\vec{a}$, $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के तल के समान्तर तल में स्थित है।



चित्र 34.9

टिप्पणी: (i) एक शून्य सदिश को किसी भी सदिश के संरेख बनाया जा सकता है।

(ii) कोई दो सदिश सदा समतलीय होते हैं।

उदाहरण 34.1. निम्न में से कौन-कौन अदिश हैं तथा कौन-कौन सदिश हैं? कारण दीजिए।

(a) द्रव्यमान (b) भार (c) संवेग

(d) तापमान (e) बल (f) घनत्व

हल : (a), (d) और (f) अदिश हैं, क्योंकि इनके केवल परिमाण हैं।

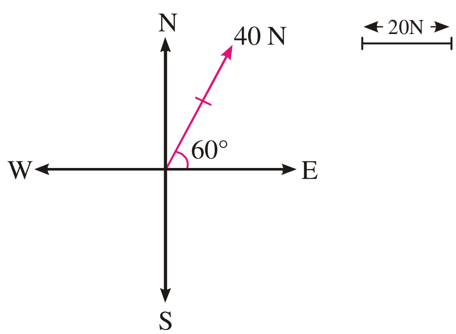
(b), (c) और (e) सदिश हैं, क्योंकि इनके परिमाण और दिशा दोनों हैं।

उदाहरण 34.2. आलेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए :

(a) 40N का एक बल, जिसकी दिशा पूर्व के उत्तर में 60° है।

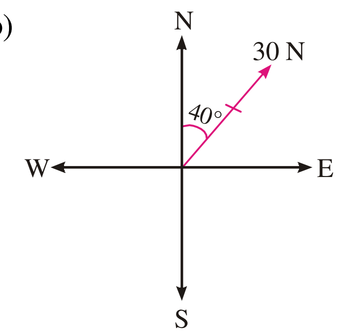
(b) 30N का एक बल, जिसकी दिशा उत्तर के पूर्व में 40° है।

हल : (a)



चित्र 34.10

(b)



चित्र 34.11

देखें आपने कितना सीखा 34.1

1. निम्न में से कौन सी राशि अदिश है?

   (a) विस्थापन (b) वेग (c) बल (d) लम्बाई

2. निम्न में से कौन सी राशि सदिश है?

   (a) द्रव्यमान (b) बल (c) समय (d) तापांश

3. आपको एक 5 सेमी का विस्थापन सदिश दिया गया है, जो पूर्व की ओर है। चित्र द्वारा संगत ऋण सदिश दिखाइये।

4. समदिश सदिशों तथा समान सदिशों में अन्तर बताइये।

5. आलेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए:

   (a) 60 न्यूटन का एक बल जिसकी दिशा उत्तर के पश्चिम में 60° है।

   (b) 100 न्यूटन का एक बल जिसकी दिशा पश्चिम के उत्तर में 45° है।

34.4 सदिशों का योग

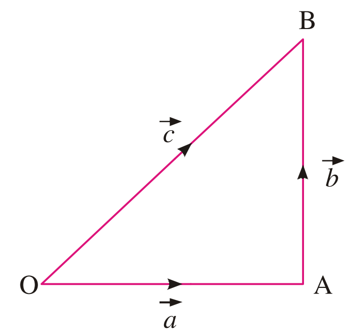
आपने चार मूल सक्रियाएँ सीखी हैं। ये हैं – संख्याओं में (योग), व्यवकलन, गुणा और भाग। सदिशों का योग (व्यवकलन), संख्याओं के योग (व्यवकलन) से भिन्न है।

वास्तव में, दो सदिशों के परिणामी सदिश की एक संकल्पना है (ये दो वेग या दो बल भी हो सकते हैं)। हम इनको निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट करेंगे :

आइये हम एक नाविक का उदाहरण लेते हैं, जो अपनी नाव में नदी पार करना चाहता है तथा आरम्भिक स्थान के ठीक सामने एक स्थान पर पहुंचना चाहता है। यदि वह किनारे की लाम्बिक दिशा में चलना शुरू करता है, तो पानी का वेग उसे उसके ऐच्छिक स्थान से भिन्न स्थान पर ले जाता है। यह उदाहरण दो वेगों के प्रभाव से तीसरे वेग की उत्पत्ति होना दर्शाता है, जिसे परिणामी वेग कहते हैं।

अत: दो सदिश, जिनके परिमाण 3 और 4 हैं, योग करने पर संभव है कि 7 परिमाण का एक सदिश न दें। यह सदिशों की दिशाओं अर्थात् उनके बीच के कोण पर निर्भर करेगा। सदिशों में योग की संक्रिया सदिशों के योग के त्रिभुज नियम के अनुसार होती है।

34.4.1 सदिशों के योग का त्रिभुज नियम



चित्र 34.12

एक सदिश जिसका प्रभाव दो सदिशों के परिणामी या संयुक्त प्रभाव के बराबर हो, इन सदिशों का योग या परिणामी कहलाता है। यह सदिशों के योग के त्रिभुज नियम द्वारा किया जाता है। संलग्न चित्र 34.12 में, सदिश $\overrightarrow{OB}$ दो सदिशों $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{AB}$ के योग या परिणामी के समान है। इसे हम निम्न प्रकार से लिखते हैं :

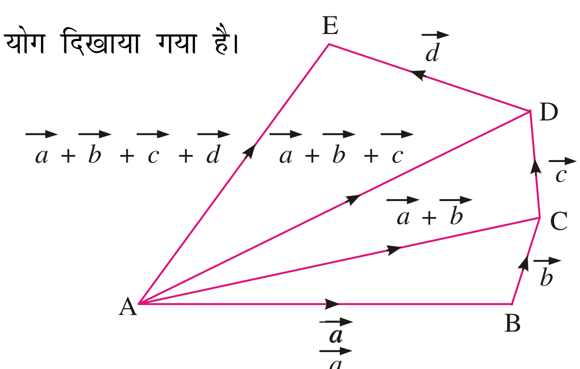
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

या $$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OB} = \vec{c}$$

आप यह अवलोकन कर सकते हैं कि सदिश $\vec{a}$ का अंत्य बिन्दु, सदिश $\vec{b}$ का आदि बिन्दु है तथा सदिश $\vec{a} + \vec{b}$ का आदि बिन्दु सदिश $\vec{a}$ का आदि बिन्दु है और इनका अन्त: बिन्दु सदिश $\vec{b}$ का अन्त: बिन्दु है।

34.4.2 दो से अधिक सदिशों का योग

संलग्न चित्र 34.13 में, दो से अधिक सदिशों का योग दिखाया गया है।



चित्र 34.13

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$$
$$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$$
$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$$
$$= \overrightarrow{AE}$$

सदिश $\overrightarrow{AE}$ दिये गये सदिशों का योग या परिणामी कहलाता है।

34.4.3 सदिशों के योग का समान्तर चतुर्भुज नियम

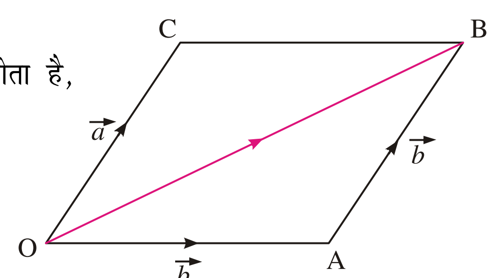
याद कीजिए कि दो सदिश समान होते हैं, जब उनके परिमाण और दिशा वही हों। परन्तु ये समान्तर भी हो सकते हैं (देखिये चित्र 34.14)।

संलग्न चित्र में, समान्तर चतुर्भुज OABC से हमें प्राप्त होता है,

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

परन्तु $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$$

$\therefore$ $$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$$



चित्र 34.14

जो कि सदिशों के योग का समान्तर चतुर्भुज नियम है। यह नियम है :

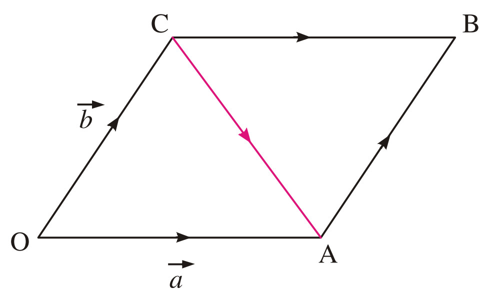
यदि एक समान्तर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाएँ दो सदिशों को निर्धारित करती हों, तो उनके परिणामी सदिश को आसन्न भुजाओं के उभयनिष्ठ बिन्दु से होकर जाने वाला विकर्ण निर्धारित करेगा।

34.4.4 सदिश का ऋण

किसी सदिश $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ के लिए, $\vec{a}$ का ऋण सदिश $\overrightarrow{AO}$ द्वारा निर्धारित होता है। $\overrightarrow{AO}$ का ऋण वही सदिश $\overrightarrow{OA}$ होगा। अत:, $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{AO}| = |\vec{a}|$ और $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AO}$. होगा। परिभाषा से, हम देखते हैं कि किसी सदिश $\vec{a}$ के लिए, $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

34.4.5 दो दिये गए सदिशों का अन्तर

दो दिये गये सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के लिए, अन्तर $\vec{a} - \vec{b}$ को सदिश $\vec{b}$ के ऋण और सदिश $\vec{a}$ का योग कहा जाता है। अर्थात् $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ ।



चित्र 34.15

संलग्न चित्र में, यदि $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ तथा $\overrightarrow{oc} = \vec{b}$ हो, तो समान्तर चतुर्भुज OABC में, $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$

और $\overrightarrow{BA} = -\vec{b}$ होगा।

$$\therefore \quad \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$$

उदाहरण 34.3. दो शून्येतर सदिशों का योग शून्य कब होता है ?

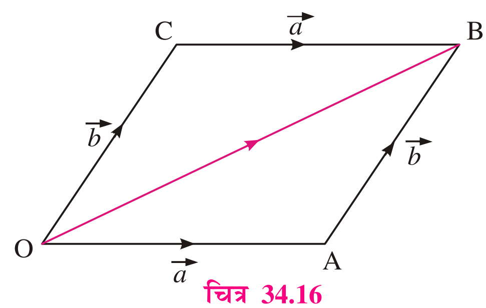
हल : दो शून्येतर सदिशों का योग शून्य तब होता है, जब उनके परिमाण समान हों, परन्तु वे विपरीत दिशाओं में हों।

उदाहरण 34.4. चित्र द्वारा दिखाइये कि $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

हल : संलग्न चित्र 34.16 से,

परिणामी सदिश $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

$= \vec{a} + \vec{b}$ ....(i)



चित्र 34.16

समान्तर चतुर्भुज OABC को पूरा कीजिए।

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA} = \vec{a}$

और $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}$

$= \vec{b} + \vec{a}$ .....(ii)

$\therefore \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ [(i) और (ii) से]

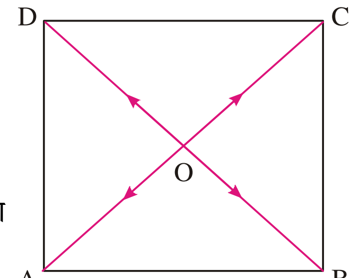
मॉड्यूल - IX

सदिश एवं त्रिविमीय ज्यामिति

टिप्पणी

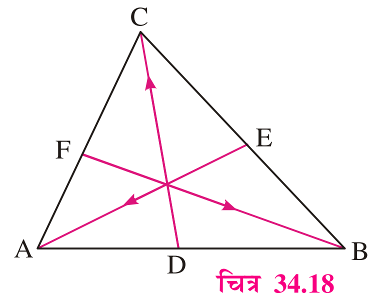
देखें आपने कितना सीखा 34.2

1. एक समान्तर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण एक दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं। सदिशों $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ और $\overrightarrow{OD}$ का योग ज्ञात कीजिए।



चित्र 34.17

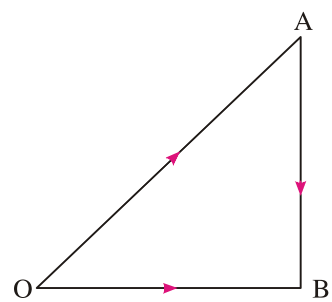
2. एक त्रिभुज ABC की माध्यिकाएँ बिन्दु O पर काटती हैं। सदिशों $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ और $\overrightarrow{OC}$ का योग ज्ञात कीजिए।



चित्र 34.18

34.5 एक बिन्दु का स्थिति सदिश

हम अंतरिक्ष में कोई बिन्दु O लेते हैं। अंतरिक्ष में किसी दिये गए बिन्दु P को O से मिलाइए तथा सदिश $\overrightarrow{OP}$ प्राप्त कीजिए। यह सदिश बिन्दु P का मूलबिन्दु O के संदर्भ में **स्थिति सदिश** कहलाता है। अतः, अंतरिक्ष में प्रत्येक बिन्दु का मूलबिन्दु के संदर्भ में एक अद्वितीय स्थिति होता है। विलोमतः यदि हमें एक मूलबिन्दु O दिया गया हो तो O आदि बिन्दु के प्रत्येक सदिश के संगत एक बिन्दु है, जो अंतरिक्ष में इसका अंत्य बिन्दु होगा।



चित्र 34.19

एक सदिश $\overline{AB}$ लीजिए। माना O मूलबिन्दु है।

तब $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

या $\overrightarrow{AB}$ = अंत्य बिन्दु B का स्थिति सदिश – आदि बिन्दु A का स्थिति सदिश

34.6 एक सदिश का एक अदिश से गुणन

एक शून्येतर सदिश $\vec{a}$ का एक अदिश $x \neq 0$ के साथ गुणनफल एक सदिश होता है, जिसकी लम्बाई $|x||\vec{a}|$ होती है तथा जिसकी दिशा वही होती है जो सदिश $\vec{a}$ की है, यदि $x > 0$ है और सदिश $\vec{a}$ से विपरीत दिशा होती है, यदि $x < 0$ है। सदिश $\vec{a}$ के अदिश x से गुणनफल को $x \cdot \vec{a}$ से व्यक्त किया जा सकता है। सदिश $\vec{a}$ और अदिश 0 का गुणनफल सदिश $\vec{\mathbf{0}}$ होता है।

परिभाषा से, यह निष्कर्ष निकलता है कि एक शून्य सदिश का एक शून्येतर अदिश से गुणनफल शून्य सदिश होता है। अर्थात् $x \cdot \vec{0} = \vec{0}$ तथा $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

सदिशों के गुणन के नियम : यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ सदिश हों तथा x और y अदिश हों, तो

(i) $x(y\,\vec{a}) = (x\,y)\,\vec{a}$

(ii) $x\,\vec{a} + y\,\vec{a} = (x + y)\,\vec{a}$

(iii) $x\,\vec{a} + x\,\vec{b} = x\,(\vec{a} + \vec{b})$

(iv) $0\,\vec{a} + x\,\vec{0} = \vec{0}$

याद कीजिए कि दो संरेख सदिशों की दिशा वही होती है, परन्तु परिमाण भिन्न हो सकते हैं। इसका अर्थ यह है कि सदिश $\vec{a}$ तथा शून्येतर सदिश $\vec{b}$ संरेख हैं, यदि और केवल यदि एक अदिश संख्या x ऐसी हो कि

$$\vec{a} = x\,\vec{b}$$

प्रमेय 34.1 दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के संरेख होने के लिए एक आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबन्ध है कि दो ऐसी अदिश संख्याएँ x और y (दोनों इकट्ठे शून्य नहीं) हों, जिससे कि $x\,\vec{a} + y\,\vec{b} = \vec{0}$ हों।

उपपत्ति : प्रतिबन्ध आवश्यक है

माना $\vec{a}$ और $\vec{b}$ संरेख हैं।

माना एक अदिश संख्या l है, जिससे $\vec{a} = l\,\vec{b}$ है।

अर्थात् $\quad \vec{a} + (-l)\,\vec{b} = \vec{0}$

हमने दो अदिश संख्याएँ $x(=1)$ और $y(=-l)$ ढूंढ ली हैं, जिससे $x\,\vec{a} + y\,\vec{b} = \vec{0}$ है। ध्यान दीजिए कि अदिश 1 शून्येतर है।

प्रतिबन्ध पर्याप्त है

अब यह दिया गया है कि $x\,\vec{a} + y\,\vec{b} = \vec{0}$ और इकट्ठे $x \neq 0,\ y \neq 0$ है।

मान लीजिए $y \neq 0$ है।

$\therefore \quad y\,\vec{b} = -x\,\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{b} = -\dfrac{x}{y}\vec{a}$, अर्थात् $\vec{a}$ और $\vec{b}$ संरेख हैं।

उपप्रमेय: दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ असंरेख हैं, यदि और केवल यदि प्रत्येक सम्बन्ध $x\,\vec{a} + y\,\vec{b} = \vec{0}$ से $x = 0$ और $y = 0$ प्राप्त हों।

[**संकेत:** यदि x और y में से कोई एक शून्येतर है, 'माना y', तो $\vec{b} = -\dfrac{x}{y}\vec{a}$, जो विरोधाभास है]

उदाहरण 34.5. वह संख्या x ज्ञात कीजिए जिससे शून्येतर सदिश $\vec{a}$ को गुणा करने पर

(i) $\hat{a}$ $\qquad$ (ii) $-\hat{a}$ प्राप्त हो।

हल: (i) $x\,\vec{a} = \hat{a}$, अर्थात् $\quad x\,|\vec{a}|\,\hat{a} = \hat{a}$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{1}{|\vec{a}|}$$

(ii) $\quad x\,\vec{a} = -\hat{a}$, अर्थात् $\quad x\,|\vec{a}|\,\hat{a} = -\hat{a}$

$$\Rightarrow \qquad x = -\frac{1}{|\vec{a}|}$$

उदाहरण 34.6. सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ संरेख नहीं है। ऐसी संख्या x ज्ञात कीजिए, जिससे सदिश $\vec{c} = (x-2)\,\vec{a} + \vec{b}$ और $\vec{d} = (2x+1)\,\vec{a} - \vec{b}$ संरेख हो जायें।

हल : $\vec{c}$ शून्येतर है, क्योंकि b का गुणांक शून्येतर है।

$\therefore$ एक संख्या y है, जिससे $\vec{d} = y\,\vec{c}$ होगा।

अर्थात् $\quad (2x+1)\vec{a} - \vec{b} = y\,(x-2)\,\vec{a} + y\,\vec{b}$

$\therefore \quad (yx - 2y - 2x - 1)\,\vec{a} + (y+1)\,\vec{b} = 0$

$\vec{a}$ और $\vec{b}$ असंरेख हैं।

$\therefore \quad yx - 2y - 2x - 1 = 0$ और $y + 1 = 0$

हल करने पर, $y = -1$ और $x = \frac{1}{3}$ प्राप्त होगा।

$\therefore \quad \vec{c} = -\frac{5}{3}\vec{a} + \vec{b}$ और $\vec{d} = \frac{5}{3}\vec{a} - \vec{b}$

हम देख सकते हैं कि $\vec{c}$ और $\vec{d}$ विपरीत सदिश हैं। अत: ये संरेख हैं।

उदाहरण 34.7. दो बिन्दुओं A तथा B के स्थिति सदिश क्रमश: $2\vec{a} + 3\vec{b}$ तथा $3\vec{a} + \vec{b}$ हैं। $\overrightarrow{AB}$ ज्ञात कीजिए।

हल : माना O संदर्भ का मूलबिन्दु है।

तब $\quad \overrightarrow{AB}$ = B का स्थिति सदिश $-$A का स्थिति सदिश

$$= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$= (3\vec{a} + \vec{b}) - (2\vec{a} + 3\vec{b})$$

$$= (3-2)\,\vec{a} + (1-3)\,\vec{b} = \vec{a} - 2\vec{b}$$

उदाहरण 34.8. दिखाइए कि बिन्दु P,Q तथा R, जिनके स्थिति सदिश क्रमश: $\vec{a} - 2\vec{b}$, $2\vec{a} + 3\vec{b}$ तथा $-7\vec{b}$ हैं, संरेख हैं।

हल : $\overrightarrow{PQ}$ = Q का स्थिति सदिश $-$ P का स्थिति सदिश

$$= (2\vec{a} + 3\vec{b}) - (\vec{a} - 2\vec{b})$$

$$= \vec{a} + 5\vec{b} \qquad \text{....(i)}$$

तथा $\overrightarrow{QR}$ = R का स्थिति सदिश $-$ Q का स्थिति सदिश

$$= -7\vec{b} - (2\vec{a} + 3\vec{b})$$

$$= -7\vec{b} - 2\vec{a} - 3\vec{b}$$

$$= -2\vec{a} - 10\vec{b}$$

$$= -2(\vec{a} + 5\vec{b}) \qquad \text{....(ii)}$$

(i) तथा (ii) से, हमें $\overrightarrow{QR} = -2\overrightarrow{PQ}$ मिलता है, जो $\overrightarrow{QR}$ का एक अदिश गुणज है।

$\therefore \quad \overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{QR}$

परन्तु Q एक उभयनिष्ठ बिन्दु है।

$\therefore$ $\overrightarrow{PQ}$ तथा $\overrightarrow{QR}$ संरेख हैं। अत: P,Q तथा R संरेख हैं।

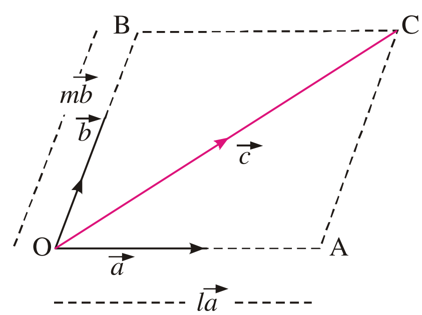
देखें आपने कितना सीखा 34.3

1. दिए गए मूलबिन्दु के संदर्भ में दो बिन्दुओं A और B के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}$ और $\vec{b}$ हैं। सदिश $\overrightarrow{AB}$ ज्ञात कीजिए।
2. निम्नलिखित में से प्रत्येक की व्याख्या कीजिए :

   (i) $3\vec{a}$ (ii) $-5\vec{b}$
3. बिन्दुओं A,B,C तथा D के स्थिति सदिश क्रमशः $2\vec{a}$, $3\vec{b}$, $4\vec{a}+3\vec{b}$ तथा $\vec{a}+2\vec{b}$ हैं। $\overrightarrow{DB}$ तथा $\overrightarrow{AC}$ ज्ञात कीजिए।
4. सदिश $\vec{n}$ और अदिश y के गुणनफल का परिमाण ज्ञात कीजिए।
5. बताइये कि एक सदिश को एक अदिश से गुणा करने पर सदिश प्राप्त होगा या अदिश।
6. दो सदिशों $\vec{p}$ और $\vec{q}$ के संरेख होने के लिए प्रतिबन्ध लिखिए।
7. दिखाइए कि बिन्दु जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $5\vec{a}+6\vec{b}$, $7\vec{a}-8\vec{b}$ तथा $3\vec{a}+20\vec{b}$ हैं, संरेख होंगें।

34.7 सदिशों की समतलीयता

यदि दो अंसरेख सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दिये गए हों, तो उनको एक तल में रखा जा सकता है। यहाँ पर (तल में) सदिश एक दूसरे को प्रतिच्छेद करेंगे। हम उनका उभयनिष्ठ बिन्दु O लेते हैं तथा दोनो सदिशों को $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ मानते हैं। यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के समतलीय तीसरा सदिश $\vec{c}$ दिया गया हो, तो हम इसका आदि बिन्दु भी O को चुन सकते हैं। माना C इसका अंत्य बिन्दु है। सदिश $\overrightarrow{OC}$ को विकर्ण लेकर समान्तर चतुर्भुज को पूरा कीजिए। इस की आसन्न भुजाएँ $\vec{a}$ और $\vec{b}$ हैं।



चित्र 34.20

$$\therefore \qquad \vec{c} = l\,\vec{a} + m\,\vec{b}$$

इस प्रकार, $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के समतलीय कोई सदिश $\vec{c}$, $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के रैखिक संयोजन के रूप में व्यक्त किया जाता है। अर्थात्, $\vec{c} = l\,\vec{a} + m\,\vec{b}$

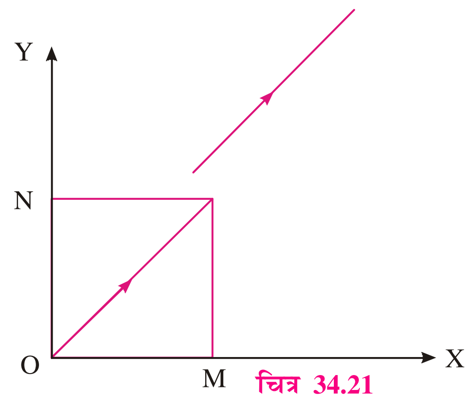
34.8 एक सदिश का दो लाम्बिक अक्षों के अनुदिश वियोजन

दो परस्पर लम्ब एकक सदिश $\hat{i}$ और $\hat{j}$ दो परस्पर लम्ब अक्षों OX और OY के अनुदिश लीजिए। हमने देखा है कि किसी सदिश $\vec{r}$ को जो कि $\hat{i}$ और $\hat{j}$ के तल में है, $x\hat{i}+y\hat{j}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$\therefore \qquad \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

यदि O सदिश $\vec{r}$ का आदि बिन्दु है, तब OM = x और ON = Y (चित्र 34.21)।

$\overrightarrow{OM}$ और $\overrightarrow{ON}$ सदिश $\vec{r}$ के x-अक्ष और y-अक्ष के अनुदिश घटक कहलाते हैं। इस विशेष व्यवस्था में, $\overrightarrow{OM}$ और $\overrightarrow{ON}$ को सदिश $\vec{r}$ के **वियोजित भाग** भी कहते हैं।



चित्र 34.21

34.9 एक सदिश का तीन विमाओं में तीन परस्पर लाम्बिक अक्षों के अनुदिश वियोजन

एक सदिश की तीन विमाओं में तीन परस्पर लाम्बिक अक्षों के अनुदिश वियोजन की संकल्पना, एक सदिश के तल में दो लाम्बिक अक्षों के अनुदिश वियोजन का एक विस्तार है।

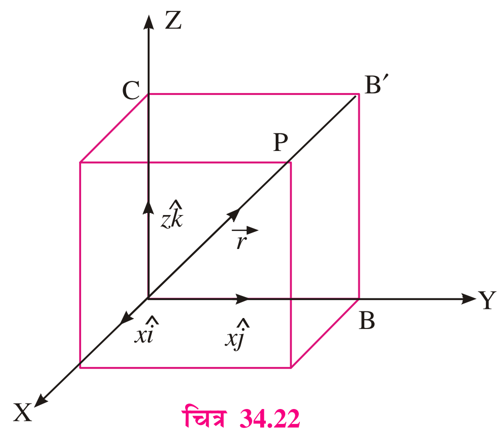
अंतरिक्ष में किसी सदिश $\vec{r}$ को तीन परस्पर लाम्बिक अक्षों के अनुदिश एकक सदिशों $\hat{i}$, $\hat{j}$ और $\hat{k}$ के रैखिक संयोजन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जैसे कि चित्र 34.22 में दिखाया गया है।

हम समकोणिक समांतरषटफलक को पूरा कर लेते हैं।

इसमें विकर्ण $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$

तब, $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$x\hat{i}$, $y\hat{j}$ और $z\hat{k}$ सदिश $\vec{r}$ के तीन परस्पर लाम्बिक अक्षों के अनुदिश **वियोजित भाग** कहलाते हैं।



चित्र 34.22

इस प्रकार, आकाश में किसी सदिश $\vec{r}$ को तीन परस्पर लाम्बिक एकक सदिशों $\hat{i}$, $\hat{j}$ और $\hat{k}$ के रैखिक संयोजन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

चित्र 34.21 में, $OP^2 = OM^2 + ON^2$ (दो विमाओं में)

अर्थात् $\vec{r}^2 = x^2 + y^2$ ......(i)

और चित्र 34.22 में,

$$OP^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2$$

$$\vec{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad ....(ii)$$

स्थिति (i) में, $\vec{r}$ का परिमाण $= |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

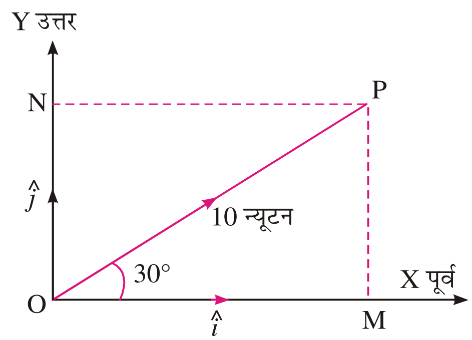
स्थिति (ii) में, $\vec{r}$ का परिमाण $= |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

टिप्पणी: यदि तीन असमतलीय सदिश $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ (आवश्यक नहीं ये लाम्बिक एकक सदिश हों) दिये गए हों, तो कोई सदिश $\vec{d}$ सदिश $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ के रैखिक संयोजन अर्थात् $\vec{d} = x\,\vec{a} + y\,\vec{b} + z\,\vec{c}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरण 34.9. 10 न्यूटन का एक सदिश पूर्व के 30° उत्तर में है। उसके पूर्व और उत्तर दिशा के अनुदिश घटक ज्ञात कीजिए।

हल : माना $\hat{i}$ और $\hat{j}$ अक्षों OX और OY (क्रमश: पूर्व और उत्तर) के अनुदिश एकक सदिश हैं।

OP का OX और OY की दिशा में वियोजन करने पर,



चित्र 34.23

$$\therefore \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$$

$$= 10\cos 30°\,\hat{i} + 10\sin 30°\,\hat{j}$$

$$= 10.\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i} + 10.\frac{1}{2}\hat{j}$$

$$= 5\sqrt{3}\,\hat{i} + 5\,\hat{j}$$

पूर्व दिशा के अनुदिश घटक $= 5\sqrt{3}$ न्यूटन

और उत्तर दिशा के अनुदिश घटक $= 5$ न्यूटन

उदाहरण 34.10. दिखाइये कि निम्न सदिश समतलीय हैं:

$$\vec{a} - 2\vec{b},\ 3\vec{a} + \vec{b} \text{ और } \vec{a} + 4\vec{b}$$

हल : सदिश समतलीय होंगे, यदि दो अदिश x और y इस प्रकार के हों कि

$$\vec{a} + 4\vec{b} = x(\vec{a} - 2\vec{b}) + y(3\vec{a} + \vec{b})$$

$$= (x + 3y)\,\vec{a} + (-2x + y)\,\vec{b} \qquad \text{.....(i)}$$

(i) के दोनों पक्षों में $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के गुणांकों की तुलना करने पर,

$$x + 3y = 1 \quad \text{और} \quad -2x + y = 4$$

x और y के लिए हल करने पर, $x = -\frac{11}{7}$ और $y = \frac{6}{7}$ प्राप्त होता है।

क्योंकि $\vec{a} + 4\vec{b}$ को $\vec{a} - 2\vec{b}$ तथा $3\vec{a} + \vec{b}$ के रैखिक संयोजन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, इसलिए तीनों सदिश समतलीय हैं।

उदाहरण 34.11. दिया गया है $\vec{r_1} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{r_2} = 2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}$ निम्न के परिमाण ज्ञात कीजिए :

(a) $\vec{r_1}$ (b) $\vec{r_2}$ (c) $\vec{r_1} + \vec{r_2}$ (d) $\vec{r_1} - \vec{r_2}$

हल : (a) $|\vec{r_1}| = |\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

(b) $\quad |\vec{r_2}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}$

(c) $\vec{r_1} + \vec{r_2} = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) + (2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}) = 3\hat{i} - 5\hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore \quad |\vec{r_1} + \vec{r_2}| = |3\hat{i} - 5\hat{j} - 2\hat{k}| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{38}$

(d) $\vec{r_1} - \vec{r_2} = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) - (2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}) = -\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$

$\therefore \quad |\vec{r_1} - \vec{r_2}| = |-\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{26}$

उदाहरण 34.12. दो सदिशों $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ के परिणामी सदिश के समान्तर एकक सदिश ज्ञात कीजिए।

हल : परिणामी सदिश $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} = (3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}) + (\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$

$$= 4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$$

परिणामी सदिश $\vec{R}$ का परिमाण $|\vec{R}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

$\therefore$ परिणामी सदिश के समान्तर एकक सदिश

$$= \frac{R}{|\vec{R}|} = \frac{1}{\sqrt{29}}(4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) = \frac{4}{\sqrt{29}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{29}}\hat{j} - \frac{2}{\sqrt{29}}\hat{k}$$

उदाहरण 34.13. $\vec{r} - \vec{s}$ दिशा में एकक सदिश ज्ञात कीजिए, जबकि

$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ तथा $\vec{s} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ है।

हल : $\quad \vec{r} - \vec{s} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) - (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = -\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$

$\therefore \quad |\vec{r} - \vec{s}| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{35}$

$\therefore$ $(\vec{r} - \vec{s})$ की दिशा में एकक सदिश

$$= \frac{1}{\sqrt{35}}(-\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) = -\frac{1}{\sqrt{35}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{35}}\hat{j} - \frac{5}{\sqrt{35}}\hat{k}$$

उदाहरण 34.34. $2\vec{a} + 3\vec{b}$ की दिशा में एकक सदिश ज्ञात कीजिए, जबकि $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ है।

हल : $\quad 2\vec{a} + 3\vec{b} = 2(\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) + 3(3\hat{i} - 2j - \hat{k})$

$$= (2\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k}) + (9\hat{i} - 6j - 3\hat{k}) = 11\hat{i} - \hat{k}\,.$$

$\therefore \quad |2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{(11)^2 + (-1)^2} = \sqrt{122}$

$\therefore$ $(2\vec{a} + 3\vec{b})$ की दिशा में एकक सदिश $= \dfrac{11}{\sqrt{122}}\hat{i} - \dfrac{1}{\sqrt{122}}\hat{k}$

उदाहरण 34.15. दिखाइये कि निम्न सदिश समतलीय हैं :

$4\vec{a}-2\vec{b}-2\vec{c}$, $-2\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c}$ और $-2\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}$, जबकि $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ तीन असमतलीय सदिश हैं।

हल : यदि ये सदिश समतलीय हैं, तो इनमें से एक को अन्य दोनो सदिशों के रैखिक संयोजन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

माना $-2\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c} = x\,(4\vec{a}-2\vec{b}-2\vec{c}) + y\,(-2\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c})$ है।

जबकि x और y अदिश हैं।

दोनों पक्षों में $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ के गुणांकों की तुलना करने पर,

$$4x - 2y = -2,\ -2x + 4y = -2 \text{ और } -2x - 2y = 4$$

ये तीनों समीकरण $x = -1, y = -1$ के लिए संतुष्ट होते हैं।

इस प्रकार $-2\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c} = (-1)\,(4\vec{a}-2\vec{b}-2\vec{c}) + (-1)\,(-2\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c})$

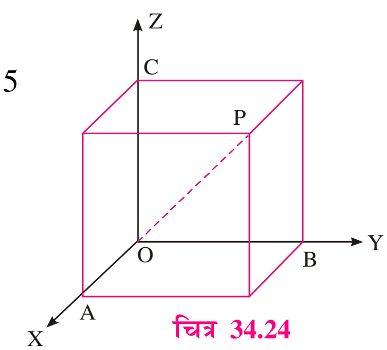
अत: दिये गये तीनों सदिश समतलीय हैं।

देखें आपने कितना सीखा 34.4

1. सदिश $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ के समतलीय होने के लिए प्रतिबन्ध लिखिए।

2. परिणामी सदिश $\vec{r}$ ज्ञात कीजिए जिसके दो आयताकार कार्तीय निर्देशांक अक्षों के अनुदिश घटक क्रमशः 3 और 4 इकाई हों।

3. संलग्न चित्र में, $|OA| = 4$, $|OB| = 3$ और $|OC| = 5$
   OP को घटक सदिशों के रूप में व्यक्त कीजिए।



चित्र 34.24

4. यदि $\vec{r_1} = 4\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{r_2} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$
   और $\vec{r_3} = \hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ हो, तो दिखाइये कि
   $|\vec{r_1} + \vec{r_2} + \vec{r_3}| = 7$

5. सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ के परिणामी सदिश के समान्तर एकक सदिश ज्ञात कीजिए।

6. $3\vec{a} - 2\vec{b}$ की दिशा में एक सदिश ज्ञात कीजिए, जबकि $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ है।

7. दिखाइये कि निम्न सदिश समतलीय हैं:

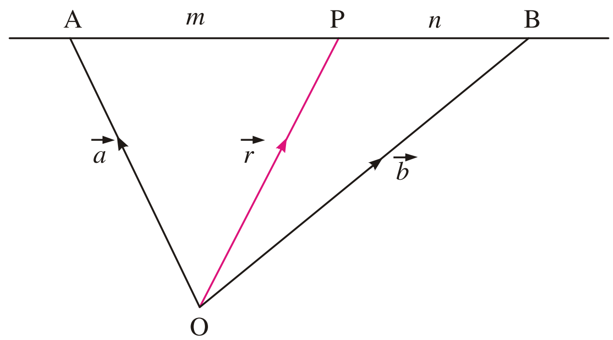
   $3\vec{a} - 7\vec{b} - 4\vec{c}$, $3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ और $\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$] जबकि $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ तीन असमतलीय सदिश हैं।

मॉड्यूल - IX
सदिश एवं त्रिविमीय ज्यामिति

टिप्पणी

34.10 विभाजन सूत्र

याद कीजिए कि अंतरिक्ष में किसी बिन्दु P का मूलबिन्दु O के संदर्भ में स्थिति सदिश $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ होता है। आगे आने वाली पंक्तियों में हम ऐसे बिन्दु का स्थिति सदिश ज्ञात करने का प्रयास करेंगे, जो दो बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड को m : n के अन्तः अनुपात में विभाजित करता है।



चित्र 34.25

मान लीजिए A और B दो बिन्दु हैं तथा उनके मूलबिन्दु O के संदर्भ में स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}$ और $\vec{b}$ हैं।

अतः $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ और $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$

मान लीजिए कि बिन्दु P रेखाखण्ड AB को m : n के अन्तः अनुपात में विभाजित करता है।

अर्थात् $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{m}{n}$ या, $n\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{PB}$ ....(i)

क्योंकि $n\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{PB}$

$\therefore \quad n(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = m(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP})$

या $(m+n)\,\overrightarrow{OP} = m\,\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OA}$

या $\overrightarrow{OP} = \dfrac{m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OA}}{m+n}$

या $\vec{r} = \dfrac{m\,\vec{b} + n\,\vec{a}}{m+n}$,

जबकि $\vec{r}$ बिन्दु P का मूलबिंदु O के संदर्भ में, स्थिति सदिश है।

उपप्रमेय 1: यदि $\dfrac{m}{n} = 1 \Rightarrow m = n$ है, तब बिन्दु P रेखाखण्ड AB का मध्य-बिन्दु हो जाता है।

$\therefore$ दो बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड के मध्य बिन्दु का स्थिति सदिश $\dfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ होता है, जबकि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ उन बिन्दुओं के क्रमशः स्थिति सदिश हैं।

उपप्रमेय 2: बिन्दु P के स्थिति सदिश को इस प्रकार लिखा जा सकता है,

$$\vec{r} = \frac{\vec{a} + \frac{m}{n}\vec{b}}{1 + \frac{m}{n}} = \frac{\vec{a} + k\,\vec{b}}{1 + k}, \qquad .....(ii)$$

जबकि $k = \frac{m}{n},\ k \neq -1$ है।

(ii) से हम उस बिन्दु का स्थिति सदिश पाते हैं, जो दो बिन्दुओं, जिनके स्थिति सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ हैं, को मिलाने वाले रेखाखण्ड को $k : 1$ के अनुपात में विभाजित करता है।

उपप्रमेय 3: उस बिन्दु P का स्थिति सदिश, जो दो बिन्दुओं को $m : n$ के बाह्य अनुपात में विभाजित करता है, निम्न है :

$$\vec{r} = \frac{n\,\vec{a} - m\,\vec{b}}{n - m}$$

जबकि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ उन बिन्दुओं के स्थिति सदिश हैं।

संकेत: यह विभाजन $-m : n$ के अनुपात में है।

उदाहरण 34.16. उस बिन्दु का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए, जो दो बिन्दुओं जिनके स्थिति सदिश $\vec{x}$ और $\vec{y}$ हैं, को मिलाने वाले रेखाखण्ड को $2 : 3$ के अन्तः अनुपात में विभाजित करता है।

हल : माना अभीष्ट बिन्दु का स्थिति सदिश $\vec{r}$ है।

$$\therefore \qquad \vec{r} = \frac{3\vec{x} + 2\vec{y}}{3 + 2} = \frac{1}{5}(3\vec{x} + 2\vec{y})$$

उदाहरण 34.17. रेखाखण्ड AB के मध्य-बिन्दु का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए, यदि A तथा B के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{x} + 2\vec{y}$ तथा $2\vec{x} - \vec{y}$ हैं।

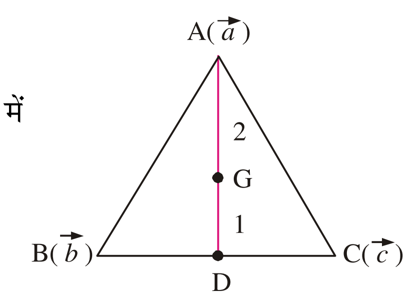
हल : AB के मध्य-बिन्दु का स्थिति सदिश

$$= \frac{(\vec{x} + 2\vec{y}) + (2\vec{x} - \vec{y})}{2} = \frac{3}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$$

एक त्रिभुज ABC के शीर्षों A,B तथा C के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ हैं। ΔABC के केन्द्रक का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए।

हल: माना D, ΔABC की भुजा BC का मध्य-बिन्दु है।

माना G, ΔABC का केन्द्रक है। तब G रेखाखण्ड AD को $2 : 1$ में विभाजित करता है, अर्थात् $AG : GD = 2 : 1$.।



चित्र 34.26

अब D का स्थिति सदिश $= \dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$

$$\therefore \text{ G का स्थिति सदिश है } = \frac{2 \cdot \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} + 1 \cdot \vec{a}}{2 + 1} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

देखें आपने कितना सीखा 34.5

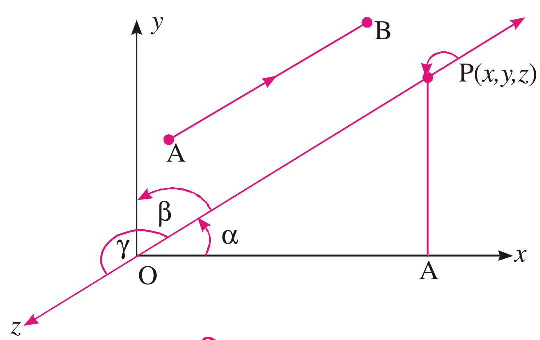
1. बिन्दु C का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए, यदि यह AB को

   (i) $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{3}$ के अनुपात में विभाजित करता है, (ii) 2 : – 3 के अनुपात में विभाजित करता है,

   जबकि यह दिया गया है कि A और B के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}$ और $\vec{b}$ हैं।
2. वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो $P(\vec{p})$ और $Q(\vec{q})$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 3 : 4 के अन्तः अनुपात में विभाजित करता है।
3. रेखाखण्ड CD बिन्दुओं P और Q से समत्रिभाजित होता है। यदि बिन्दुओं C और D के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{c}$ और $\vec{d}$ हों, तो समत्रिभाजन करने वाले बिन्दुओं के स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए।
4. सदिश की सहायता से सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज की मध्यिकाएं संगामी होती हैं।
5. सदिश की सहायता से सिद्ध कीजिए कि किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का माध्य बिंदुओं को मिलाने वाला रेखा खंड तीसरी भुजा के समांतर व उसका आधा होता है।

34.11 सदिश के दिक-कोसाइन

संलग्न आकृति में $\overrightarrow{AB}$ अंतरिक्ष में एक सदिश है और $\overrightarrow{OP}$, बिन्दु P(x, y, z), का स्थिति सदिश इस प्रकार है कि $\overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{AB}$. मान लीजिए $\overrightarrow{OP}$, x, y एवं z अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ क्रमशः α, β एवं γ कोण बनाता है। α, β एवं γ सदिश $\overrightarrow{OP}$ के दिक् कोण और cos α, cos β एवं cos γ दिक् कोसाइन कहलाते हैं।



चित्र 34.27

क्योंकि $\overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{AB}$ है, इसलिए cosα, cosβ एवं cosγ, $\overrightarrow{AB}$ के भी दिक्–कोसाइन है।

किसी सदिश द्वारा x, y एवं z अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ बने कोणों के कोसाइन, उस सदिश के दिक्–कोसाइन कहलाते हैं।

- यदि $\overrightarrow{OP}$ की दिशा को उलटा कर दिया जाए, तो हम देखते हैं कि $\overrightarrow{PO}$, x, y एवं z अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ क्रमशः π – α, π – β एवं π – γ कोण बनाता है। इसलिए cos(π – α) = –cos α, cos (π – β) = – cos β and cos(π – γ) = –cos γ, $\overrightarrow{PO}$ के दिक्– कोसाइन हैं। वास्तव में अंतरिक्ष में किसी भी सदिश को दो दिशाओं में बढ़ाया जा सकता है इसलिए प्रत्येक सदिश के दिक्–कोसाइन के दो समूह होते हैं। यदि (cosα, cosβ, cosγ) दिक्–कोसाइन का एक समूह है तो (–cosα, –cosβ, –cosγ) दूसरा समूह होगा। किसी भी सदिश के दिक्–कोसाइन के एक समूह को लेना ही पर्याप्त है।

- सामान्यतः एक सदिश के दिक्–कोसाइन को l, m एवं n से व्यक्त किया जाता है। दूसरे शब्दों में $l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$ एवं $n = \cos\gamma$.

- क्योंकि $\overrightarrow{OX}$ अक्षों $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ एवं $\overrightarrow{OZ}$ के साथ क्रमशः 0°, 90°, एवं 90° कोण बनाता है; इसलिए cos 0°, cos 90°, cos 90° अर्थात 1, 0, 0, x-अक्ष के, दिक्–कोसाइन हैं। दी गई आकृति में, मान लीजिए

  $|\overrightarrow{OP}| = r$ और $PA \perp OX$.

  अब समकोण त्रिभुज ΔOAP में, $\dfrac{OA}{OP} = \cos\alpha$

  i.e. $OA = OP\cos\alpha$ i.e. $x = r.l \Rightarrow \boxed{x = l\,r}$

  इसी प्रकार y एवं z अक्षों पर लम्ब खींचकर हम $y = mr$ एवं $z = nr$ प्राप्त कर सकते हैं।

  अब $$x^2 + y^2 + z^2 = r^2(l^2+m^2+n^2) \quad \text{...(i)}$$

  परन्तु $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ अथवा $|\overrightarrow{OP}|^2 = x^2+y^2+z^2 = r^2$

  इसलिए (i) $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

  इसके अतिरिक्त, $l = \dfrac{x}{r}$, $m = \dfrac{y}{r}$, $n = \dfrac{z}{r}$

  अर्थात् $l = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $m = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $n = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

  अतः, यदि $P(x, y, z)$, अंतरिक्ष में एक बिन्दु है, तो $\overrightarrow{OP}$ के दिक्–कोसाइन

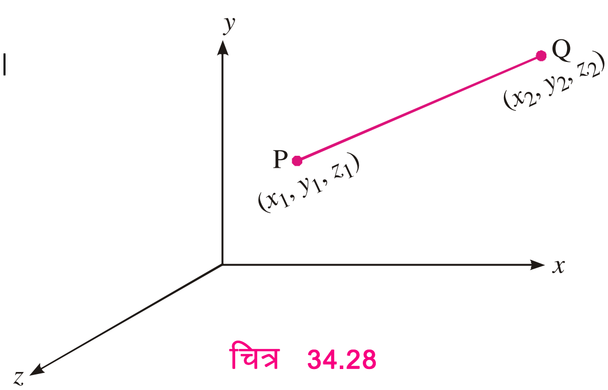
  $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ हैं।

34.11.1 दो बिन्दुओं को मिलाने वाले सदिश के दिक्–कोसाइन

संलग्न आकृति में, $P(x_1, y_1, z_1)$ एवं $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाकार सदिश $\overrightarrow{PQ}$ बनाया गया है। यदि हम निर्देशांक अक्षों की दिशा को परिवर्तित किए बिना मूल बिन्दु को बिन्दु $P(x_1,y_1,z_1)$ पर स्थानांतरित कर दें, तो बिन्दु Q के निर्देशांक $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ हो जाते हैं। इसलिए $\overrightarrow{PQ}$ के दिक्–कोसाइन

$$\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}, \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},$$

$$\frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$ हैं।



चित्र 34.28

34.11.2 सदिश के दिक्-अनुपात

ऐसी तीन वास्तविक संख्याएँ जो सदिश के दिक्–कोसाइनों के समानुपाती हैं, सदिश के दिक्–अनुपात कहलाती हैं। मान लीजिए l, m, n एक सदिश के दिक्–कोसाइन और a, b, c दिक्–अनुपात हैं,

तो, $\dfrac{a}{l} = \dfrac{b}{m} = \dfrac{c}{n} = \lambda$ (मान लीजिए)

$\Rightarrow \quad a = \lambda l, b = \lambda m, c = \lambda n$

$\therefore \quad a^2 + b^2 + c^2 = \lambda^2(l^2 + m^2 + n^2)$

$\Rightarrow \quad \lambda^2 = a^2 + b^2 + c^2$

अर्थात् $\lambda = \pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$$\therefore \quad l = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, m = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, n = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

- यदि a, b, c किसी सदिश के दिक्–अनुपात हैं तो प्रत्येक $\lambda \neq 0$, के लिए $\lambda a, \lambda b$ एवं λc भी सदिश के दिक्–अनुपात हैं। अतः एक सदिश के अनन्त दिक्–अनुपात होते हैं।
- यदि $P(x,y,z)$ अंतरिक्ष में एक बिन्दु है, तो $\overrightarrow{OP}$ के दिक्–अनुपात x, y, z हैं।
- यदि $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ अंतरिक्ष में दो बिन्दु हैं, तो $\overrightarrow{PQ}$ के दिक्–अनुपात $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ हैं।
- $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ परन्तु, व्यापकतः $a^2 + b^2 + c^2 \neq 1$.

उदाहरण 34.19. मान लीजिए अंतरिक्ष में एक बिन्दु P इस प्रकार है कि $OP = \sqrt{3}$ और $\overrightarrow{OP}$, x, y एवं z अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ क्रमशः $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}$ कोण बनाता है। बिन्दु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : $\overrightarrow{OP}$ के दिक्–कोसाइन $\cos\dfrac{\pi}{3}, \cos\dfrac{\pi}{4}, \cos\dfrac{\pi}{3}$ i.e. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ बिन्दु P के निर्देशांक $x = lr = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$y = mr = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$z = nr = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ हैं।

उदाहरण 34.20. यदि $P(1, 2, -3)$ अंतरिक्ष में एक बिन्दु है, तो $\overrightarrow{OP}$ के दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए।

हल :

$$l = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$m = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$n = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{-3}{\sqrt{14}}$$

उदाहरण 34.21. क्या $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ किसी सदिश के दिक्–कोसाइन हो सकते हैं?

हल : $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{4}{3} \neq 1$

इसलिए $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ किसी सदिश के दिक्–कोसाइन नहीं हो सकते।

उदाहरण 34.22. यदि P(2, 3, –6) एवं Q(3, –4, 5) अंतरिक्ष में दो बिन्दु हैं, तो $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{QO}$ तथा $\overrightarrow{PQ}$ के दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए, जबकि O मूल बिन्दु है।

हल : $\overrightarrow{OP}$ के दिक्–कोसाइन $\frac{2}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}}, \frac{3}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}}, \frac{-6}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}}$

i.e. $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{-6}{7}$.

इस प्रकार $\overrightarrow{QO}$ के दिक्–कोसाईन $\frac{-3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{-5}{\sqrt{2}}$ हैं।

$\overrightarrow{PQ}$ के दिक्–कोसाइन, $\frac{3-2}{\sqrt{(3-2)^2+(-4-3)^2+(5+6)^2}}$,

$\frac{-4-3}{\sqrt{(3-2)^2+(-4-3)^2+(5+6)^2}}, \frac{5+6}{\sqrt{(3-2)^2+(-4-3)^2+(5+6)^2}}$ हैं।

अर्थात $\frac{1}{\sqrt{171}}, \frac{-7}{\sqrt{171}}, \frac{11}{\sqrt{171}}$ हैं।

उदाहरण 34.23. एक ऐसे सदिश के दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए जो तीनों अक्षों के साथ समान कोण बनाता है।

हल : मान लीजिए, वह सदिश $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}$ तथा $\overrightarrow{OZ}$ में से प्रत्येक के साथ α कोण बनाता है।

$\therefore \quad \cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

अर्थात $\quad \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ उस सदिश के दिक्–कोसाइन $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ हैं।

उदाहरण 34.24. यदि P(1, 2, –3) एवं Q(4, 3, 5) अंतरिक्ष में दो बिन्दु हैं तो, $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{QO}$ तथा $\overrightarrow{PQ}$ के दिक्–अनुपात ज्ञात कीजिए जबकि O मूल बिंदु है।

हल : $\overrightarrow{OP}$ के दिक्–अनुपात 1, 2, –3 हैं।

$\overrightarrow{QO}$ के दिक्–अनुपात (–4, –3, –5) अथवा (4, 3, 5)

$\overrightarrow{PQ}$ के दिक्–अनुपात 4 –1, 3 –2, 5 – (–3)

अर्थात् 3, 1, 8 हैं।

देखें आपने कितना सीखा 34.6

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :
   (i) y-अक्ष के दिक्–कोसाइन .... हैं।
   (ii) यदि l, m, n किसी सदिश के दिक्–कोसाइन है, तो $l^2 + m^2 + n^2 =$ ....
   (iii) यदि a, b, c किसी सदिश के दिक्–अनुपात हैं, तो $a^2 + b^2 + c^2$, 1 के .... हैं।
   (iv) निर्देशांक अक्षों के साथ समान कोण बनाने वाले सदिश के दिक्–कोसाइन........... हैं।
   (v) यदि दो सदिश परस्पर समान्तर हैं, तो उनके दिक्–अनुपात .... है।
   (vi) (1, –1, 1) किसी भी सदिश के दिक्–कोसाइन नहीं हैं क्योंकि.............
   (vii) एक सदिश के दिक्–अनुपातों की संख्या .... हैं (सीमित/असीमित)
2. यदि P(3, 4, –5) अंतरिक्ष में एक बिन्दु है, तो $\overrightarrow{\text{OP}}$ के दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए।
3. $\overrightarrow{\text{AB}}$ के दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए जहाँ A(–2, 4, –5) तथा B(1, 2, 3) अंतरिक्ष में दो बिन्दु हैं।
4. यदि कोई सदिश x, y, z अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ क्रमशः 90°, 135° तथा 45° कोण बनाता है, तो सदिश के दिक्–अनुपात ज्ञात कीजिए।

34.12 सदिशों का गुणनफल

अनुच्छेद 34.6 में, आपने एक सदिश को अदिश से गुणा किया। सदिश को अदिश से गुणा करने पर, हमें एक सदिश मिलता है। इस अनुच्छेद में, हम एक सदिश को दूसरे सदिश से गुणा करने के स्थिति पर विचार करेंगें। इसके दो प्रकार हैं:

(i) जब दो सदिशों का गुणनफल एक अदिश हो, तो इसे हम अदिश गुणनफल कहते हैं। यह डाट (बिंदु) गुणनफल भी कहलाता है, क्योंकि इसमें संबधित संकेत '.' प्रयोग किया जाता है।

(ii) जब दो सदिशों का गुणनफल एक सदिश हो, तो इसे हम सदिश गुणनफल कहते हैं, जो कि संबधित संकेत '×' के प्रयोग करने से क्रास गुणनफल भी कहलाता है।

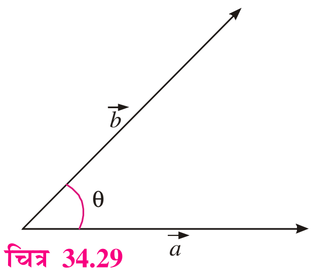
34.13 सदिशों का अदिश गुणनफल

माना $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दो ऐसे सदिश हैं, जिनके बीच का कोण θ है।

अदिश गुणनफल $\vec{a}\cdot\vec{b}$ को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है :

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

स्पष्टतः $\vec{a}\cdot\vec{b}$ एक अदिश है, क्योंकि $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ तथा $\cos\theta$ सभी अदिश हैं।



चित्र 34.29

टिप्पणी

1. यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ समदिश सदिश हो तो, $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta = ab$ होगा, जबकि a तथा b क्रमशः $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के परिमाण हैं।
2. यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ विपरीत दिशाओं में हैं, तो $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\pi = -ab$ होगा।
3. सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण θ, $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$ से प्राप्त किया जा सकता है।
4. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ तथा $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c})$
5. $n(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (n\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(n\vec{b})$, जबकि n कोई वास्तविक संख्या है।
6. $\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$ तथा $\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$ होता है, क्योंकि $\hat{i}$, $\hat{j}$ तथा $\hat{k}$ परस्पर लाम्बिक एकक सदिश हैं।

उदाहरण 34.25. यदि $\vec{a} = 3\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ है, तो $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ज्ञात कीजिए। $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण भी ज्ञात कीजिए।

हल : $\vec{a}\cdot\vec{b} = (3\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k})\cdot(4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k})$

$$= 3\times4 + 2\times(-3) + (-6)\times1$$

$$\left[\because\ \hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1 \text{ और } \hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0\right]$$

$$= 12 - 6 - 6 = 0$$

मान लीजिए $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है।

तब, $$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = 0 \quad \therefore\ \theta = \frac{\pi}{2}$$

34.14 दो सदिशों का सदिश गुणनफल

इससे पहले कि हम दो सदिशों के सदिश गुणनफल को परिभाषित करें, हम नीचे दक्षिणहस्त पेंच और वामहस्त पेच पर चर्चा करते हैं तथा इसे सदिश त्रिक से संबधित करते हैं।

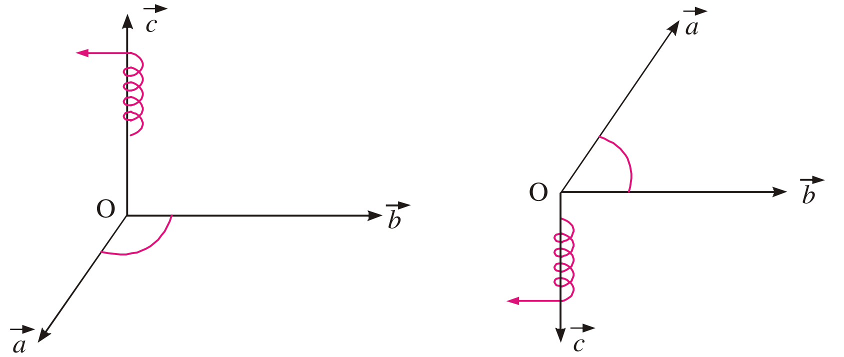
34.14.1 दक्षिणहस्त पेंच

यदि एक पेंच लिया जाए तथा इसे घड़ी की सुइयों की विपरीत(वामावृत) दिशा में घुमाएं, तो इसका पढ़ने वाले की ओर स्थानान्तरण होता है। इसे दक्षिणहस्त पेंच कहते हैं।

यदि एक पेंच लिया जाए तथा इसे घड़ी की सुइयों की दिशा में (दक्षिणावृत) घुमाया जाए, तो इसका पढ़ने वाले से दूर की ओर स्थानान्तरण होता है। इसे वामहस्त पेंच कहते हैं।

अब हम इस पेंच का संबन्ध दिए गए क्रमित सदिश त्रिक से जोड़ते हैं।

माना $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ तीन सदिश हैं, जिनका आदि बिन्दु O है।



(i) (ii)

चित्र 34.30

अब यदि एक दक्षिणहस्त पेंच को O पर रख कर $\vec{a}$ से $\vec{b}$ की ओर $<180°$ के कोण पर घुमाया जाए तो इसका $\vec{c}$ के अनुदिश स्थानान्तरण होगा (चित्र 34.30 (i))।

इसी प्रकार, यदि एक वामहस्त पेंच को O पर रख कर $\vec{a}$ से $\vec{b}$ की ओर $<180°$ घुमाया जाए, तो इसका $\vec{c}$ के अनुदिश स्थानान्तरण होगा (चित्र 34.30 (ii)) परन्तु इस बार स्थानान्तरण की दिशा पहली दिशा से विपरीत होगी।

इसलिए $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ का एक क्रमित सदिश त्रिक, दक्षिणहस्त वामहस्त कहलाता है, यदि वह $180°$ से कम के कोण पर घुमाने पर $\vec{c}$ की दिशा में या $\vec{c}$ की विपरीत दिशा में चलता है।

34.14.2 सदिशों का सदिश गुणनफल

यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दो शून्येतर सदिश हैं, तो उनका सदिश गुणनफल $\vec{a} \times \vec{b}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है और इसे $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta . \hat{n}$ द्वारा परिभाषित किया जाता है।

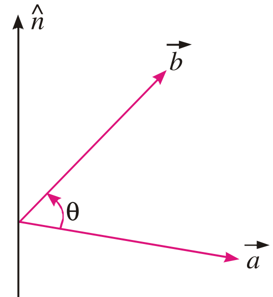
जहाँ θ, $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के मध्य बना हुआ कोण है, $0 \le \theta \le \pi$ और $\hat{n}$ एक ऐसा मात्रक सदिश है जो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दोनों पर लम्ब है। $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\hat{n}$ एक दक्षिणावर्ती पद्धति को निर्मित करते हैं। अर्थात दक्षिणावर्ती पद्धति $\vec{a}$ से $\vec{b}$ की तरफ घुमाने पर यह $\hat{n}$ की दिशा में चलती है।

- $\vec{a} \times \vec{b}$ एक सदिश है तथा $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ है।
- यदि $\vec{a} = \vec{0}$ अथवा $\vec{b} = \vec{0}$ हो, तो θ परिभाषित नहीं है और इस स्थिति में $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ लेते हैं।
- यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ शून्यतेर सदिश हैं, तो $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ यदि और केवल यदि है, जब $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ संरेख अथवा समान्तर सदिश हैं अर्थात $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$.
- विशिष्टतः $\vec{b} \times \vec{b} = \vec{0}$ और $\vec{b} \times (-\vec{b}) = \vec{0}$ क्योंकि प्रथम स्थिति में $\theta = 0$ और द्वितीय स्थिति में $\theta = \pi$. इस प्रकार दोनों ही स्थितियों में $\sin\theta = 0$ हो जाता है।

- $\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=\vec{0}$
- $\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k},\ \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i},\ \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$ तथा $\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k}$,

  $\hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}, \hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$.
- $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$
- $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$.
- दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के मध्य बना कोण θ,

  $\sin\theta=\dfrac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ द्वारा प्राप्त होता है।



चित्र 34.31

- यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ किसी त्रिभुज की संलग्न भुजाओं का निरूपित करते हैं तो त्रिभुज का क्षेत्रफल $\dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$ द्वारा प्रदत्त है।
- यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ किसी समान्तर चतुर्भुज की संलग्न भुजाओं को निरूपित करते हैं तो समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $|\vec{a}\times\vec{b}|$ द्वारा प्रदत्त है।
- यदि $\vec{a} = a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ तथा $\hat{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$, तो

$$\hat{a}\times\hat{b} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

$$= (a_2b_3-a_3b_2)\hat{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\hat{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{k}$$

- $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दोनों के लम्बवत् मात्रक सदिश $\dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$ है।

उदाहरण 34.26. सदिश गुणनफल के प्रयोग से, सदिशों $\vec{a}=2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल :
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 1 & -3\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix} = \hat{i}(1-6)-\hat{j}(2+9)+\hat{k}(-4-3)$$

$$= -5\hat{i}-11\hat{j}-7\hat{k}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{25+121+49}=\sqrt{195}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{9+4+1}=\sqrt{14}$$

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\sqrt{195}}{\sqrt{14}.\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{195}}{14}$$

$$\Rightarrow \qquad \theta = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{195}}{14}\right)$$

उदाहरण 34.27. सदिशों $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ के लम्बवत् मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

हल :
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \hat{i}(-2+3) - \hat{j}(-3+3) + \hat{k}(3-2)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{i} + \hat{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$\therefore$ $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के लम्बवत् मात्रक सदिश $= \dfrac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \dfrac{\hat{i} + \hat{k}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}$

उदाहरण 34.28. एक ऐसे त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष, A(1, 1, 1), B(1, 2, 3) तथा C(2, 3, 1) हैं।

हल :
$$\overrightarrow{AB} = (1-1)\hat{i} + (2-1)\hat{j} + (3-1)\hat{k} = \hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = (2-1)\hat{i} + (3-1)\hat{j} + (1-1)\hat{k} = \hat{i} + 2\hat{j}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(0-4) - \hat{j}(0-2) + \hat{k}(0-1)$$

$$= -4\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

$$\therefore \qquad |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+4+1} = \sqrt{21}$$

अतः $\qquad \Delta ABC$ का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$ वर्ग इकाई

उदाहरण 34.29. एक ऐसे समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष, A(5, –1, 1), B(–1, –3, 4), C(1, –6, 10) तथा D(7, –4, 7) हैं।

हल :
$$\overrightarrow{AB} = (-1-5)\hat{i} + (-3+1)\hat{j} + (4-1)\hat{k} = -6\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AD} = (7-5)\hat{i} + (-4+1)\hat{j} + (7-1)\hat{k} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -6 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \hat{i}(-12+9) - \hat{j}(-36-6) + \hat{k}(18+4)$$

$$= -3\hat{i} + 42\hat{j} + 22\hat{k}$$

$\therefore$ समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \sqrt{9+1764+484} = \sqrt{2257}$ वर्ग इकाई

देखें आपने कितना सीखा 34.7

1. (i) यदि $\vec{a}\times\vec{b}$ एक मात्रक सदिश है तथा $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=\frac{\sqrt{2}}{3}$, तो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के मध्य बना हुआ कोण .... है।

   (ii) यदि $|\vec{a}.\vec{b}|=|\vec{a}\times\vec{b}|$ है, तो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के मध्य बना हुआ कोण .... है।

   (iii) $\hat{i}.(\hat{j}\times\hat{k})+\hat{j}.(\hat{i}\times\hat{k})+\hat{k}.(\hat{i}\times\hat{j})$ का मान .... है।

2. $(\vec{a}+\vec{b})$ तथा $(\vec{a}-\vec{b})$ दोनों के लम्बवत् मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए जहाँ $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ तथा $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$.

3. एक ऐसे समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएँ सदिशों $\vec{a}=3\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$ तथा $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ द्वारा निरूपित हैं।

4. यदि $\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}, \vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}, \vec{c}=3\hat{i}+\hat{j}$ इस प्रकार हैं कि $\vec{a}+\lambda\vec{b}, \vec{c}$ पर लम्बवत् है, तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

34.15 अदिश त्रिक गुणनफल

यदि $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ तीन सदिश हैं तो $\vec{a}\times\vec{b}$ का $\vec{c}$ के साथ अदिश गुणनफल, अदिश त्रिक गुणनफल कहलाता है। $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}$ को $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ का अदिश त्रिक गुणनफल कहते हैं। सामान्यतः इसे $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$ से व्यक्त किया जाता है।

- $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$ एक अदिश राशि है।
- $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}$ एक ऐसे समांतर षटफलक के आयतन को व्यक्त करता है जिसके सहावसानी किनारे $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ द्वारा निरूपित हैं।
- $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}=0$, यदि $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ समतलीय सदिश हैं अथवा तीनों में से कोई दो सदिश समान अथवा समान्तर हैं।
- यदि सदिशों का चक्रीय क्रम बनाए रखा जाए तो अदिश त्रिक गुणनफल में डॉट (.) और क्रास (×) की स्थिति को परस्पर परिवर्तित किया जा सकता है।

$$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c} = \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$$

$$(\vec{b}\times\vec{c}).\vec{a} = \vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a})$$

$$(\vec{c}\times\vec{a}).\vec{b} = \vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})$$

- $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c}).\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a}).\vec{b}$
- $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}=-(\vec{b}\times\vec{a}).\vec{c}=-\vec{c}.(\vec{b}\times\vec{a})$

$$(\vec{b}\times\vec{c}).\vec{a}=-(\vec{c}\times\vec{b}).\vec{a}=-\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{b})$$

$$(\vec{c}\times\vec{a}).\vec{b}=-(\vec{a}\times\vec{c}).\vec{b}=-\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{c})$$

- यदि $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}, \vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}, \vec{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$ हैं,

  तो $$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

- चार बिन्दु A, B, C तथा D समतलीय होते हैं यदि $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ तथा $\overrightarrow{AD}$ समतलीय हैं अर्थात्

  $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD} = 0$

उदाहरण 34.30. एक ऐसे समान्तर षटफलक का आयतन ज्ञात कीजिए जिसके किनारे $\vec{a}=2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ तथा $\vec{c}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ द्वारा निरूपित हैं।

हल :
$$\text{आयतन} = (\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4-1)+3(2+3)+4(-1-6)$$

$$= 6+15-28=-7$$

ऋणात्मक चिन्ह को छोड़ते हुए, अभीष्ट आयतन = 7 घन इकाई

उदाहरण 34.31. λ का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए सदिश

$\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, b=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}, c=3\hat{i}+\lambda\hat{j}+5\hat{k}$ समतलीय हैं।

हल : सदिश $\vec{a},\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ समतलीय होंगे, यदि $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=0$

i.e. $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & \lambda & 5 \end{vmatrix} = 0$$

i.e. $2(10+3\lambda)+1(5+9)+1(\lambda-6) = 0$

i.e. $7\lambda+28 = 0$

$\Rightarrow$ $\lambda = -4.$

उदाहरण 34.32. दर्शाइए कि चार बिन्दु A, B, C तथा D जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $(4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}),(-\hat{j}-\hat{k}),$ $(3\hat{i}+9\hat{j}+4\hat{k})$ तथा $(-4\hat{i}+4\hat{j}+4\hat{k})$ हैं, समतलीय हैं।

हल :
$$\overrightarrow{AB} = -4\hat{i}-6\hat{j}-2\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = -\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AD} = -8\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$$

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -4 & -6 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ -8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -4(12+3)+6(-3+24)-2(1+32)$$

$$= -60+126-66=0$$

अतः बिन्दु A, B, C तथा D समतलीय हैं।

उदाहरण 34.33. सिद्ध कीजिए कि $[\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}]=2[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$

हल : बायाँ पक्ष $= (\vec{a}+\vec{b}).[(\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{c}+\vec{a})]$

$= (\vec{a}+\vec{b}).[(\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}]$

$= (\vec{a}+\vec{b}).[(\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}]$ $\quad\because\ \vec{c}\times\vec{c}=0$

$= \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{a})+\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{a})$

$+\vec{b}.(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}.(\vec{b}\times\vec{a})+\vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a})$

$= \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a})$ [$\because$ जब दो सदिश समान हों, तो अदिश त्रिक गुणनफल शून्य होता है]

$= 2[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$

= दायाँ पक्ष

देखें आपने कितना सीखा 34.8

1. एक ऐसे समान्तर षटफलक का आयतन ज्ञात कीजिए जिसके किनारे $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k},\vec{c}=3\hat{i}+2\hat{j}+5\hat{k}$ द्वारा निरूपित हैं।
2. λ का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए सदिश $\vec{a}=-4\hat{i}-6\hat{j}+\lambda\hat{k},\vec{b}=-\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$ तथा $\vec{c}=-8\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ समतलीय हैं।

आइये दोहराएँ

- वह भौतिक राशि जिसे केवल एक संख्या द्वारा प्रकट किया जा सकता है, अदिश कहलाती है।
- वह राशि, जिसका परिमाण तथा दिशा दोनों हों, सदिश कहलाती है।
- सदिश, जिसका परिमाण 'a' तथा दिशा A से B की ओर हो, को $\overrightarrow{AB}$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है तथा इसका परिमाण $|\overrightarrow{AB}| = a$ द्वारा प्रकट किया जाता है।
- एक सदिश जिसका परिमाण दूसरे सदिश $\vec{a}$ के परिमाण के बराबर है, परन्तु दिशा विपरीत है, दिये गये सदिश का ऋण कहलाता है तथा इसे $-\vec{a}$ द्वारा दर्शाते हैं।

- एकक सदिश का परिणाम 1 इकाई होता है। सदिश $\vec{a}$ के समान्तर एकक सदिश को $\hat{a}$ द्वारा दर्शाते हैं तथा यह $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ के बराबर होता है।
- शून्य सदिश $\vec{0}$ का परिमाण 0 होता है तथा इसकी कोई निश्चित दिशा नहीं होती।
- अदिशों के योग से भिन्न, सदिशों का योग सदिशों के योग के त्रिभुज नियम के अनुसार होता है। इसी कारण दो सदिशों के योग का परिमाण उनके परिमाणों के योग से कम या बराबर होता है।
- दो या अधिक सदिश संरेख होते हैं, यदि उनके आधार एक ही हों या समान्तर हों।
- तीन या अधिक सदिश समतलीय होते हैं, यदि उनके आधार एक ही तल के समान्तर हों या एक ही तल में स्थित हों।
- यदि $\vec{a}$ सदिश और x अदिश हो, तब $x\vec{a}$ एक ऐसा सदिश है, जिसका परिमाण सदिश $\vec{a}$ के परिमाण का x गुना है तथा जिसकी दिशा वही या विपरीत इस पर निर्भर करती है कि $x > 0$ या $x < 0$ है।
- किसी सदिश को जो दो असंरेख सदिशों के साथ समतलीय है, उनके एक रैखिक संयोजन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।
- अंतरिक्ष में किसी सदिश को दिये गए तीन असमतलीय सदिशों के एक रैखिक संयोजन के रूप में व्यक्त किया जात सकता है।
- एक बिन्दु का स्थिति सदिश, जो दो बिन्दुओं, जिनके स्थिति सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ है, को मिलाने वाले रेखाखण्ड को m : n के अन्तः/बाह्य अनुपात में विभाजित करता है, क्रमशः निम्न हैं:

$$\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n},\ \frac{n\vec{a}-m\vec{b}}{n-m}$$

- दो बिन्दुओं, जिनके स्थिति सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ हैं, को मिलाने वाले रेखाखण्ड के मध्य-बिन्दु का स्थिति सदिश $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ होगा।
- दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ का अदिश गुणनफल, $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$ से प्राप्त होता है, जबकि θ, दोनो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण है।
- दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ का सदिश गुणनफल $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$ से प्राप्त होता है। जबकि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है तथा $\hat{n}$ एक एकक सदिश है, जो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ पर लम्बवत् है।
- एक सदिश द्वारा x, y एवं z अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ बने कोणों के कोसाइन के मान उस सदिश के दिक्–कोसाइन कहलाते हैं।
- ऐसी तीन वास्तविक संख्याएँ जो किसी सदिश के दिक्–कोसाइनों के समानुपाती हैं, उस सदिश के दिक् अनुपात कहलाती हैं।
- सामान्यतः किसी सदिश के दिक्–कोसाइनों को l, m, n तथा दिक्–अनुपातों को a, b, c से व्यक्त करते हैं।
- $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, परन्तु व्यापकतः $a^2 + b^2 + c^2 \neq 1$.

- यदि $\overrightarrow{AB} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ है, तो $\overrightarrow{AB}$ के दिक्–अनुपात x, y, z हैं तथा दिक्–कोसाइन $\dfrac{\pm x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{\pm y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{\pm z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ हैं।
- एक सदिश के दिक्–कोसाइन अद्वितीय हैं तथा दिक्–अनुपात अनन्त हैं।
- दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ का सदिश गुणनफल, $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta.\hat{n}$ द्वारा परिभाषित होता है जहाँ θ, सदिशों $\vec{a}$, $\vec{b}$ के बीच का कोण तथा $\hat{n}$, $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दोनों पर लम्ब मात्रक सदिश हैं।
- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ यदि $\vec{a} = 0$ अथवा $\vec{b} = 0$ अथवा $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ समान्तर हैं अथवा $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ संरेख हैं।
- $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$
- $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$.
- $\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}, \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}, \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$.
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$
- $\sin\theta = \dfrac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$
- त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\dfrac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$ जहाँ $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ त्रिभुज की संलग्न भुजाओं को निरूपित करते हैं।
- समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= |\vec{a} \times \vec{b}|$ जहाँ $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ समान्तर चतुर्भुज की संलग्न भुजाओं को निरूपित करते हैं।
- $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दोनों पर लम्ब मात्रक सदिश $\dfrac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$ द्वारा प्राप्त होता है।
- यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ तो $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$
- यदि $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ कोई तीन सदिश हैं तो $(\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c}$ अदिश त्रिक गुणनफल कहलाता है और सामान्यतः इसे $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$ से व्यक्त करते हैं।
- समान्तर षट्फलक का आयतन $= (\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c}$, जहाँ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ समान्तर षट्फलक के सहावसानी किनारे हैं।

- $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}=0$, यदि $\vec{a},\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ समतलीय हैं अथवा तीनों में से कोई दो सदिश समान है अथवा समान्तर हैं।
- $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}=\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$
- $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c}).\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a}).\vec{b}$
- $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}=-(\vec{b}\times\vec{a}).\vec{c}$
- यदि $\overline{AB}, \overline{AC}$ तथा $\overline{AD}$ समतलीय हैं तो चार बिन्दु A, B, C तथा D भी समतलीय होंगे i.e. यदि $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}=0$, तो A, B, C, D समतलीय हैं।
- यदि $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}, \vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}, \vec{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$, तो

$$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

सहायक वेबसाइट

- *www.youtube.com/watch?v=ihNZlp7iUHE*
- *http://emweb.unl.edu/math/mathweb/vectors/vectors.html*
- *http://www.mathtutor.ac.uk/geometry_vectors*
- *www.khanacademy.org/.../introduction-to-vectors-and-scalars*

आइए अभ्यास करें

1. माना $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ तीन ऐसे सदिश हैं कि इनमें से कोई दो असंरेख हैं। यदि सदिश $\vec{a}+\vec{b}$ और सदिश $\vec{c}$ संरेख हों तथा सदिश $\vec{b}+\vec{c}$ और सदिश $\vec{a}$ संरेख हों, तो सदिशों $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ का योग ज्ञात कीजिए।
2. सिद्ध कीजिए कि कोई दो शून्येतर सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ संरेख होते हैं, यदि और केवल यदि, दो संख्याएँ x और y (दोनों इकट्ठे शून्य नहीं हैं) इस प्रकार हैं कि $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$ हो।
3. ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है जिसमें भुजा CD का मध्य-बिन्दु M है। सदिशों $\overrightarrow{BD}$ और $\overrightarrow{AM}$ को सदिशों $\overrightarrow{BM}$ और $\overrightarrow{MC}$ के पदों में व्यक्त कीजिए।
4. क्या सदिश $\vec{a}-\vec{b}$ की लम्बाई सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ की लम्बाइयों के योग से (i) कम हो सकती है, (ii) बराबर हो सकती है या (iii) अधिक हो सकती है?
5. माना $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो असंरेख सदिश हैं। संख्याएँ x और y ज्ञात कीजिए, यदि सदिश $(2-x)\vec{a}+\vec{b}$ और $y\vec{a}+(x-3)\vec{b}$ बराबर हैं।

टिप्पणी

6. सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ असंरेख हैं। x ज्ञात कीजिए, यदि सदिश $3\vec{a} + x\vec{b}$ और $(1-x)\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$ समान्तर हैं।

7. x और y ज्ञात कीजिए, जिससे सदिश $\vec{a} = -2\hat{i} + 3\hat{j} + y\hat{k}$ तथा सदिश $\vec{b} = x\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$ संरेख हों। $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के परिमाण भी ज्ञात कीजिए।

8. सदिशों $\vec{a} + \vec{b}$ और $\vec{a} - \vec{b}$ के परिमाण ज्ञात कीजिए, यदि $\vec{a} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 8\hat{k}$ और $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ है।

9. सदिश $\vec{a}$ की दिशा में एकक सदिश ज्ञात कीजिए, जबकि $\vec{a} = -6\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ है।

10. सदिशों $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ और $-2\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$ के परिणामी सदिश के समान्तर एक एकक सदिश ज्ञात कीजिए।

11. किसी कण P पर निम्न बल लगे हैं :

    $\vec{F_1} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{F_2} = -3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ और $\vec{F_3} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, जिन्हें न्यूटन में मापा गया है।

    (a) परिणामी बल ज्ञात कीजिए। (b) परिणामी बल का परिमाण ज्ञात कीजिए।

12. दिखाइये कि निम्न सदिश समतलीय हैं:

    $(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c})$, $(2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c})$ और $(-3\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c})$, जबकि $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ कोई तीन असमतलीय सदिश हैं।

13. एक सदिश $\overrightarrow{OX}$ तथा $\overrightarrow{OY}$ के साथ क्रमशः $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ कोण बनाता है। इस सदिश द्वारा $\overrightarrow{OZ}$ के साथ बनाया हुआ कोण ज्ञात कीजिए।

14. यदि अंतरिक्ष में एक बिन्दु $P(\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{3})$ है, तो $\overrightarrow{OP}$ के दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए जहाँ O मूल बिन्दु है।

15. बिन्दुओं (–4,1,7) तथा (2, –3, 2) को मिलाने वाले सदिश के दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए।

16. दिक् अनुपातों की अवधारणा के प्रयोग से दर्शाइए कि $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{RS}$ जहाँ P, Q, R तथा S के निर्देशांक क्रमशः (0, 1, 2), (3, 4, 8), $\left(-2, \frac{3}{2}, -3\right)$ तथा $\left(\frac{5}{2}, 6, 6\right)$ हैं।

17. यदि किसी सदिश के दिक्–अनुपात 3, 4, 0 हैं, तो इसके दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए।

18. एक ऐसे समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएँ $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ द्वारा निरूपित हैं।

19. एक त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए यदि A, B, C के निर्देशांक क्रमशः (3, –1, 2), (1, –1, –3) तथा (4, –3, 1) हैं।

20. सदिशों $2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ तथा $3\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$ के लम्बवत् एक मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

21. यदि $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k}$ तथा $\vec{B} = \hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$, तो $(\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} - \vec{B})$ ज्ञात कीजिए।

22. सिद्ध कीजिए कि : $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b}) = 2(\vec{a}\times\vec{b})$.

23. यदि $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$ और $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$, तो दर्शाइए कि $(\vec{a}-\vec{d})$ तथा $(\vec{b}-\vec{c})$ परस्पर समान्तर हैं।

24. एक ऐसे समान्तर षटफलक का आयतन ज्ञात कीजिए जिसके किनारे, $\vec{a}=2\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, \vec{c}=3\hat{i}-5\hat{j}+2\hat{k}$ द्वारा निरूपित हैं।

25. दर्शाइए कि सदिश, $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ तथा $\vec{c}=3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$ समतलीय हैं।

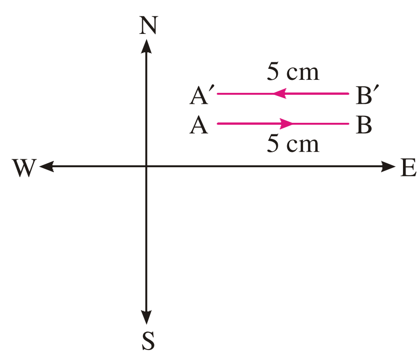
26. यदि बिन्दु A(3, 2, 1), B(4, λ, 5), C(4, 2, –2) तथा D(6, 5, –1) समतलीय हैं, तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 34.1

1. (d) 2. (b)

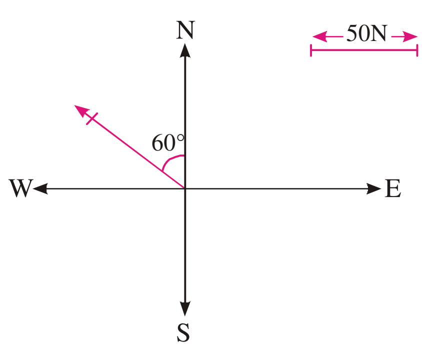
3.



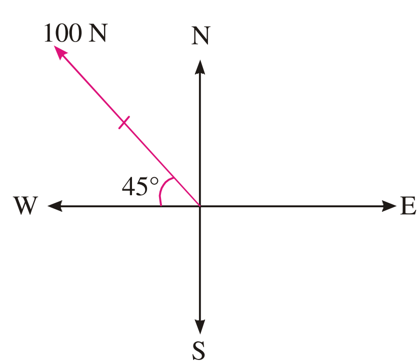
चित्र 34.32

4. दो सदिश समदिश कहलाते हैं, यदि उनकी दिशा वही हो, चाहे उनके परिमाण कुछ भी हों। परन्तु समान सदिशों में परिमाण और दिशा दोनों वही होने चाहिये।

5.



चित्र 34.33



चित्र 34.34

देखें आपने कितना सीखा 34.2

1. $\vec{0}$ 2. $\vec{0}$

देखें आपने कितना सीखा 34.3

1. $\vec{b} - \vec{a}$

2. (i) यह एक सदिश है जो $\vec{a}$ की दिशा में है तथा जिसका परिमाण $\vec{a}$ के परिमाण का 3 गुना है।

   (ii) यह $\vec{b}$ की विपरीत दिशा में एक सदिश है, जिसका परिणाम $\vec{b}$ के परिमाण का 5 गुना है।

3. $\overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{a}$ तथा $\overrightarrow{AC} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$

4. $|y\vec{n}| = y|\vec{n}|$, यदि $y > 0$ 5. सदिश

   $= -y|\vec{n}|$, यदि $y < 0$

   $= 0$, यदि $y = 0$

6. $\vec{p} = x\vec{q}$, x एक शून्येतर सदिश है।

देखें आपने कितना सीखा 34.4

1. यदि x और y इस प्रकार हों कि $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$

2. $\vec{r} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ 3. $\overrightarrow{OP} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$

5. $\frac{1}{7}\left(3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}\right)$ 6. $\frac{1}{\sqrt{51}}\hat{i} - \frac{5}{\sqrt{51}}\hat{j} - \frac{5}{\sqrt{51}}\hat{k}$

देखें आपने कितना सीखा 34.5

1. (i) $\frac{1}{5}(2\vec{a} + 3\vec{b})$ (ii) $(3\vec{a} - 2\vec{b})$

2. $\frac{1}{7}(4\vec{p} + 3\vec{q})$ 3. $\frac{1}{3}(2\vec{c} + \vec{d}), \frac{1}{3}(\vec{c} + 2\vec{d})$

देखें आपने कितना सीखा 34.6

1. (i) (0, 1, 0) (ii) 1 (iii) समान नहीं

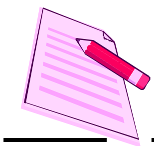
   (iv) $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ (v) समानुपाती

   (vi) उनके वर्गों का योग 1 के समान नहीं है (vii) अनन्त

2. $\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{2}}{5}, \frac{-1}{\sqrt{2}}$ 3. $\frac{3}{\sqrt{77}}, \frac{-2}{\sqrt{77}}, \frac{8}{\sqrt{77}}$ 4. 0, –1, 1

देखें आपने कितना सीखा 34.7

1. (i) $\frac{\pi}{4}$ (ii) $\frac{\pi}{4}$ (iii) 1



2. $\frac{-\hat{i}}{\sqrt{6}}+\frac{2\hat{j}}{\sqrt{6}}-\frac{\hat{k}}{\sqrt{6}}.$ 3. $\sqrt{42}$ वर्ग इकाई 4. 8

देखें आपने कितना सीखा 34.8

1. 42 घन इकाई 2. $\lambda = -2$

आइए अभ्यास करें

1. $\vec{a}+\vec{b}+c=\vec{0}$

3. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{MC}$

4. (i) हाँ $\vec{a}$ और $\vec{b}$ या तो असरेख सदिश हैं या शून्येतर सदिश, जिनकी दिशा एक ही है।

(ii) हाँ $\vec{a}$ और $\vec{b}$ या तो विपरीत दिशाओं में हैं या कम से कम एक शून्य सदिश है।

(iii) हाँ $\vec{a}$ और $\vec{b}$ विपरीत दिशाओं में हैं।

5. x = 4, y = –2 6. x = 2, –1

7. x = 4, y = 1 $|\vec{a}| = \sqrt{14}, |\vec{b}| = 2\sqrt{14}$

8. $|\vec{a}+\vec{b}| = 6, |\vec{a}+\vec{b}| = 14$

9. $-\frac{6}{7}\hat{i}+\frac{3}{7}\hat{j}-\frac{2}{7}\hat{k}$ 10. $\pm\frac{1}{3}(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})$

11. $2\hat{i}+\hat{j};\sqrt{5}$

13. $\frac{\pi}{4}$ अथवा $\frac{3\pi}{4}$ 14. $\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}$ 15. $\frac{6}{\sqrt{77}},\frac{-4}{\sqrt{77}},\frac{-5}{\sqrt{77}}$

17. $\frac{3}{5},\frac{4}{5},0$ 18. $8\sqrt{3}$ वर्ग इकाई 19. $\frac{1}{2}\sqrt{165}$ वर्ग इकाई

20. $\frac{7\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{75}}$ 21. $-60\hat{i}+4\hat{j}-22\hat{k}$ 24. 8 घन इकाई

26. $\lambda = 5$