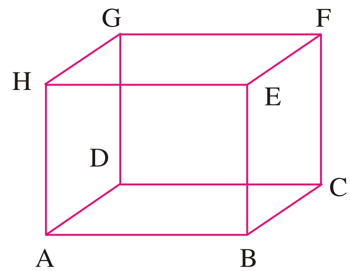
36

सरल रेखा

चित्र 36.1 में,, एक आयताकार डिब्बा है जिसके छः पृष्ठ हैं। ये पृष्ठ छः तलों के भाग हैं। इस चित्र में, ABCD तथा EFGH समान्तर समतल हैं। इसी प्रकार, ADGH तथा BCFE समान्तर समतल हैं तथा ABEH तथा CFGD भी ऐसे ही समतल हैं। दो समतल ABCD तथा CFGD परस्पर रेखा CD पर काटते हैं। ऐसा ही किसी भी दो आसन्न समतलों में होता है। इस प्रकार, आप देखेंगे कि समतल परस्पर रेखाओं में मिलते हैं तथा किनारे शीर्ष बिन्दुओं पर मिलते हैं।



चित्र 36.1

इस पाठ में, हम अंतरिक्ष में रेखा का सममित रूप में समीकरण, रेखा के व्यापक समीकरण को सममित रूप में बदलना, एक बिन्दु की एक रेखा से लम्बिक दूरी तथा एक समतल और एक रेखा के बीच का कोण ज्ञात करने के बारे में पढ़ेंगे। दो रेखाओं के समतलीय होने के प्रतिबंध को भी स्थापित करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेगें :

- अंतरिक्ष में एक रेखा का सममित रूप में समीकरण ज्ञात करना
- एक रेखा के व्यापक समीकरण सममित रूप में बदलना
- एक बिन्दु की एक रेखा से लम्बिक दूरी ज्ञात करना
- एक रेखा तथा एक समतल के बीच का कोण ज्ञात करना
- दो रेखाओं के समतलीय होने का प्रतिबंध ज्ञात करना

पूर्व ज्ञान

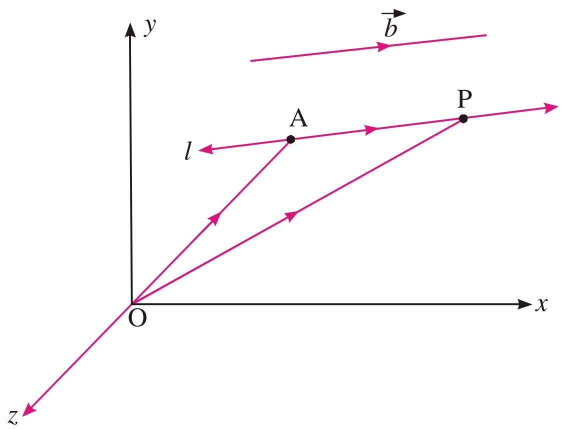
- एक रेखा की दिक्कोज्या/दिक-अनुपात तथा एक रेखाखण्ड का एक रेखा पर प्रक्षेप
- दो रेखाओं के परस्पर समान्तर तथा लम्ब होने का प्रतिबन्ध

36.1 रेखा का सदिश समीकरण

एक रेखा अद्वितियतः निर्धारित होती है, यदि यह एक दी गई दिशा में एक दिए हुए बिन्दु से होकर जाती है अथवा यह दो बिन्दुओं से होकर जाती है।

36.1.1 दिए गए बिन्दु से होकर जाने वाली तथा दिए गए सदिश के समान्तर रेखा का समीकरण : मान लीजिए कि दिए गए बिन्दु A से होकर जाने वाली तथा दिए

गए सदिश $\vec{b}$ के समान्तर रेखा l है। मान लीजिए बिन्दु A का स्थिति सदिश $\vec{a}$ और रेखा पर किसी स्वेच्छ बिन्दु P का स्थिति सदिश $\vec{r}$ है।



चित्र 36.2

ΔOAP में, $\quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP}$

i.e. $\quad \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \vec{r} - \vec{a}$

परन्तु $\quad \overrightarrow{AP} \parallel \vec{b} \quad \therefore \quad \overrightarrow{AP} = \lambda\vec{b}$

$\therefore \quad \vec{r} - \vec{a} = \lambda\vec{b}$ ...(1)

$\Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ जो कि रेखा का सदिश रूप में अभीष्ट समीकरण है।

36.1.2 सदिश रूप को कार्तीय रूप में परिवर्तित करना

मान लीजिए, (x_1, y_1, z_1), दिए हुए बिन्दु A के निर्देशांक हैं तथा b_1, b_2, b_3 सदिश $\vec{b}$ के दिक्–अनुपात हैं। इसके अतिरिक्त बिन्दु P के निर्देशांक (x, y, z) हैं।

तब $\quad \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \; \vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$

और $\quad \vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}.$

इन मानों को समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$(x - x_1)\hat{i} + (y - y_1)\hat{j} + (z - z_1)\hat{k} = \lambda(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x - x_1}{b_1} = \lambda, \frac{y - y_1}{b_2} = \lambda, \frac{z - z_1}{b_3} = \lambda$$

$\therefore \quad \dfrac{x - x_1}{b_1} = \dfrac{y - y_1}{b_2} = \dfrac{z - z_1}{b_3}$, जो कि रेखा के समीकरण का संगत कार्तीय रूप है।

यह रेखा के समीकरण का सममित रूप है।

36.1.3 दो बिन्दुओं से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण

मान लीजिए बिन्दु A तथा B से होकर जाने वाली रेखा l है। मान लीजिए बिन्दुओं A तथा B के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ हैं।

इसके अतिरिक्त रेखा पर किसी स्वेच्छ बिन्दु P का स्थिति सदिश $\vec{r}$ है।
आकृति में,

$$\overrightarrow{AP} = \vec{r} - \vec{a}$$

और $$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

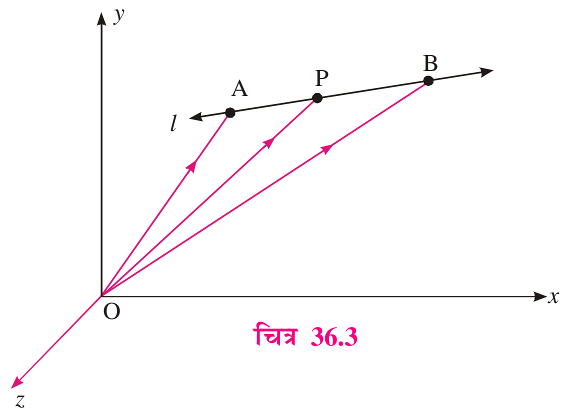
परन्तु $\overrightarrow{AP}$ तथा $\overrightarrow{AB}$ संरेख सदिश हैं

$$\therefore \quad \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$$

i.e. $$\vec{r} - \vec{a} = \lambda(\vec{b} - \vec{a}) \qquad ...(2)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$$

जो कि सदिश रूप में रेखा का अभीष्ट समीकरण है।



चित्र 36.3

36.1.4 सदिश रूप को कार्तीय रूप में परिवर्तित करना

मान लीजिए (x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2) क्रमशः बिन्दु A तथा B के निर्देशांक हैं। बिन्दु P के निर्देशांक (x, y, z) हैं।

तब $$\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}, \vec{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$$

और $$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}.$$

इन मानों को समीकरण (2) में रखने पर,

$$(x - x_1)\hat{i} + (y - y_1)\hat{j} + (z - z_1)\hat{k} = \lambda(x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \lambda, \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \lambda, \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \lambda$$

$$\therefore \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$ रेखा के समीकरण का संगत कार्तीय रूप है।

यह रेखा के समीकरण का द्वि–बिन्दु प्रारूप है।

उदाहरण 36.1. बिन्दु (2, –3, 5) से होकर जाने वाली तथा सदिश $\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ के समान्तर रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $$\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\therefore \quad \vec{r} = (2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$$

जो कि रेखा का अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 36.2. बिन्दुओं (–1, 5, 2) तथा (4, 3, –5) से होकर जाने वाली रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : दो बिन्दु रूप में रेखा का सदिश समीकरण

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}) \text{ है।}$$

यहाँ $\vec{a} = -\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}$

तथा $\vec{b} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$

$\therefore$ $\vec{b} - \vec{a} = 5\hat{i} - 2\hat{j} - 7\hat{k}$

अतः रेखा का अभीष्ट समीकरण है : $\vec{r} = (-\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}) + \lambda(5\hat{i} - 2\hat{j} - 7\hat{k})$

उदाहरण 36.3. रेखा के समीकरण $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-5}{7}$ को सदिश रूप में लिखिए।

हल : दिए हुए समीकरण की समीकरण $\dfrac{x-x_1}{b_1} = \dfrac{y-y_1}{b_2} = \dfrac{z-z_1}{b_3}$ से तुलना करने पर,

$$x_1 = -3,\ y_1 = 2,\ z_1 = 5$$
$$b_1 = 2,\ b_2 = -3,\ b_3 = 7$$

$\therefore$ $\vec{a} = (-3\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k})$

और $\vec{b} = (2\hat{i} - 3\hat{j} + 7\hat{k})$

अतः $\vec{r} = (-3\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} - 3\hat{j} + 7\hat{k})$ सदिश रूप में अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 36.4. उस रेखा के समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (1, 2,–3) से होकर जाती है तथा जिसके दिक्कोज्याएँ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ हैं।

हल : रेखा के समीकरण हैं :

$$\frac{x-1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{y-2}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{z+3}{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

अर्थात् $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+3}{-1}$

अर्थात् $x - 1 = y - 2 = -(z+3)$

उदाहरण 36.5. उस रेखा के समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (1,–3, 2) से होकर जाती है तथा जिसके दिक्-अनुपात (1,–2, 3) हैं।

हल : रेखा के समीकरण है :

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{3}$$

उदाहरण 36.6. उस रेखा के समीकरण ज्ञात कीजिए जो दो बिन्दुओं (1,–3,2) तथा (4,2,–3) से होकर जाती है।

हल : वांछित रेखा के समीकरण है :

$$\frac{x-1}{4-1}=\frac{y+3}{2+3}=\frac{z-2}{-3-2}$$

अर्थात्
$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-2}{-5}$$

उदाहरण 36.7. बिन्दुओं (0,2,3) तथा (–1,3,7) को मिलाने वाली रेखा के समांतर तथा बिन्दु (1,–5,–6) से होकर जाने वाली रेखा के समीकरण ज्ञात कीजिये।

हल : बिन्दुओं (0,2,3) तथा (–1,3,7) को मिलाने वाली रेखा के दिक्-अनुपात हैं:

$$-1-0,\ 3-2,\ 7-3$$

या
$$-1, 1, 4$$

अत:, इस रेखा के समांतर रेखा के दिक्-अनुपात भी –1, 1,4 लिये जा सकते हैं।

अत:, दी गई रेखा के समान्तर तथा (1,–5,–6) से होकर जाने वाली रेखा के समीकरण हैं :

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+5}{1}=\frac{z+6}{4}$$

देखें आपने कितना सीखा 36.1

1. एक रेखा के सममित रूप में समीकरण लिखिये, जो बिन्दु (1,–2,3) से होकर जाती है तथा जिसके दिक्-अनुपात 3,–4,5 हैं।
2. बिन्दु (3,–9,4) तथा (–9,5,–4) से होकर जाने वाली रेखा के सममित रूप में समीकरण लिखिये।
3. सममित रूप में समीकरण लिखिये, जो बिन्दुओं (–7,5,3) तथा (2, 6,8) से होकर जाती है।
4. रेखा के सममित रूप में समीकरण लिखिये, जो बिन्दु (1,2,3) से होकर जाती है तथा बिन्दुओं (–4,7,2) और (5,–3,–2) से होकर जाने वाली रेखा के समान्तर है।
5. उस रेखा के सममित रूप में समीकरण लिखिये, जो मूलबिन्दु से गुज़रती है तथा निर्देशांक अक्षों पर समान रूप में झुकी हुई है।
6. मूल बिन्दु एवं बिन्दु (5, –2, 3) से होकर जाने वाली रेखा का सदिश समीकरण लिखिए।
7. रेखा के समीकरण $\frac{x-5}{3}=\frac{y+4}{7}=\frac{z-3}{2}$ को सदिश रूप में लिखिए।
8. रेखा के समीकरण $\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})+\lambda(\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})$ को कार्तीय रूप में लिखिए।
9. बिन्दु (2, –1, 4) से होकर जाने वाली तथा सदिश $\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ के समान्तर रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

36.2 एक रेखा के समीकरणों को सममित रूप में परिवर्तित करना

आपको ध्यान होगा कि दो असमान्तर समतलों का प्रतिच्छेदन एक रेखा होती है।

माना दो प्रतिच्छेदीत समतलों के समीकरण

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad ...(i)$$

तथा $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ हैं। ....(ii)

माना ये दोनो समतल रेखा AB पर प्रतिच्छेदित करते हैं। AB का प्रत्येक बिन्दु दोनों तलों पर है। अतः, रेखा के प्रत्येक बिन्दु के निर्देशांक दोनों समतलों के समीकरणों को सन्तुष्ट करते हैं। अतः समीकरण (i) तथा (ii) दोनों एक रेखा के समीकरण हैं।

समीकरण $ax + by + cz = 0$ तथा $a'x + b'y + c'z = 0$ ऐसी रेखा के समीकरण हैं जो मूल बिन्दु से होकर जाती है तथा उपरोक्त रेखा के समान्तर है, क्योंकि उपरोक्त दोनों समतल शून्य से होकर जाते हैं। उपरोक्त रूप में समीकरणों को रेखा के व्यापक रूप (अथवा असममित रूप) में समीकरण कहते हैं।

(i) तथा (ii) के रूप में दिये गये रेखा के समीकरणों को सममित रूप में परिवर्तित करने के लिए, हमें रेखा की दिक्कोज्याएँ तथा रेखा पर स्थित एक बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात होने चाहिए।

माना रेखा की दिक्कोज्याएँ l, m तथा n हैं। समीकरण (i) तथा (ii) द्वारा प्रदर्शित समतलों के अभिलम्बों पर यह रेखा लम्ब है।

$\therefore \quad al + bm + cn = 0 \quad$ और $\quad a'l + b'm + c'n = 0$

वज्रगुणन विधि द्वारा हम पाते हैं :

$$\frac{l}{bc' - b'c} = \frac{m}{ca' - ac'} = \frac{n}{ab' - a'b}$$

अतः, रेखा की दिक्कोज्याएँ $(bc' - b'c), (ca' - ac')$ और $(ab' - a'b)$ के समानुपाती हैं।

समीकरणों (i) तथा (ii) में, $z = 0$ रखने पर, हमें वह बिन्दु मिलता है जिस पर xy-रेखा समतल से मिलती है। इससे हमें प्राप्त होता है :

$$ax + by + d = 0 \qquad ....(iii)$$

$$a'x + b'y + d' = 0 \qquad ....(iv)$$

(iii) तथा (iv) को हल करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$x = \frac{bd' - b'd}{ab' - a'b}, \; y = \frac{da' - d'a}{ab' - a'b}$$

अतः, रेखा का एक बिन्दु $\left(\frac{bd' - b'd}{ab' - a'b}, \frac{da' - d'a}{ab' - a'b}, 0\right)$ है।

अतः, सममित रूप में रेखा के समीकरण हैं :

$$\frac{x - \frac{bd' - b'd}{ab' - a'b}}{bc' - b'c} = \frac{y - \frac{da' - d'a}{ab' - a'b}}{ca' - c'a} = \frac{z}{ab' - a'b}$$

टिप्पणी: $z = 0$ को लेने के स्थान पर हम $x = 0$ या $y = 0$ या x, y, z के लिए कोई उचित मान ले सकते हैं, यदि इस प्रकार प्राप्त दोनों समीकरणों का एक अद्वितीय हल हो।

उदाहरण 36.8. किसी रेखा के समीकरणों $x - 2y + 3z = 4$ तथा $2x - 3y + 4z = 5$ को सममित रूप में परिवर्तित कीजिए तथा उसकी दिककोज्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : माना प्रत्येक तल पर किसी बिन्दु के z– निर्देशांक $z = 0$ हैं।

अत: समतलों के परिवर्तित समीकरण है :

$$x - 2y = 4$$

$$2x - 3y = 5$$

हल करने पर, $x = -2$ तथा $y = -3$ आता है।

$\therefore$ दोनों समतलों का उभयनिष्ट बिन्दु $(-2,-3,0)$ है। माना l, m, n रेखा की दिक्कोज्याएँ हैं। क्योंकि यह रेखा समतल के अभिलम्ब पर लम्ब है, इसलिए

$$l - 2m + 3n = 0 \quad \text{तथा} \quad 2l - 3m + 4n = 0$$

$$\therefore \quad \frac{l}{-8+9} = \frac{m}{6-4} = \frac{n}{-3+4}$$

अर्थात् $$\frac{l}{1} = \frac{m}{2} = \frac{n}{1} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$

अत:, रेखा के सममित रूप में समीकरण है :

$$\frac{x+2}{\pm\frac{1}{\sqrt{6}}} = \frac{y+3}{\pm\frac{2}{\sqrt{6}}} = \frac{z}{\pm\frac{1}{\sqrt{6}}}$$

अर्थात् $$\frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$$

तथा रेखा की दिक्कोज्याएँ हैं :

$$\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \quad (+ \text{ अथवा } - \text{ का समान चिन्ह लेना है})$$

देखें आपने कितना सीखा 36.2

1. निम्न रेखाओं के समीकरणों को सममित रूप में लिखिए:

   (i) $x + 5y - z = 7$ तथा $2x - 5y + 3z = -1$

   (ii) $x + y + z + 1 = 0$ तथा $4x + y - 2z + 2 = 0$

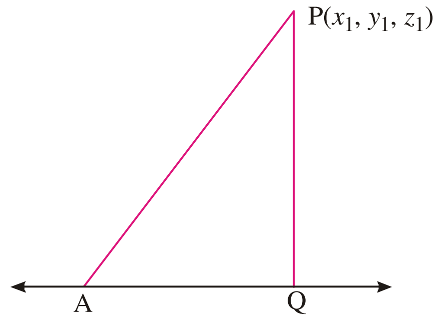
   (iii) $x - y + z + 5 = 0$ तथा $x - 2y - z + 2 = 0$

36.3 एक बिन्दु की एक रेखा से लम्बिक दूरी

माना $P(x_1, y_1, z_1)$ एक बिन्दु है तथा AQ दी गई रेखा है, जिसके समीकरण

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$$

है, जबकि रेखा AQ की दिक्कोज्याएँ l, m और n हैं। बिन्दु P से रेखा AQ पर लम्ब का पाद Q है तथा A कोई बिन्दु (α, β, γ) है।



चित्र 36.4

$\therefore \quad PQ^2 = AP^2 - AQ^2$

अब, $AP^2 = (x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 + (z_1 - \gamma)^2$

AQ रेखा पर AP का प्रक्षेप

$$= (x_1 - \alpha)l + (y_1 - \beta)m + (z_1 - \gamma)n$$

$$\therefore \quad PQ^2 = \left\{(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 + (z_1 - \gamma)^2\right\}$$

$$- \left\{(x_1 - \alpha)l + (y_1 - \beta)m + (z_1 - \gamma)n\right\}^2$$

जो बिन्दु P से रेखा पर लम्ब PQ की दूरी दर्शाता है।

उदाहरण 36.9. बिन्दु $(2,3,1)$ की रेखा

$$y + z - 1 = 0 = 2x - 3y - 2z + 4 \text{ से दूरी ज्ञात कीजिए।}$$

हल : माना $z = 0$ दोनों समतलों के उभयनिष्ठ बिन्दु का z निर्देशांक है।

$\therefore$ अत:, समीकरण $y=1$ तथा $2x - 3y + 4 = 0$ बन जाते हैं जिनसे $x = -\dfrac{1}{2}$ प्राप्त होता है।

$\therefore$ दोनों समतलों का उभयनिष्ठ बिन्दु $\left(-\dfrac{1}{2}, 1, 0\right)$ है।

माना l, m, n रेखा की दिक्कोज्याएँ हैं।

$0l + m + n = 0$ तथा $2l - 3m - 2n = 0$

या $\quad \dfrac{l}{1} = \dfrac{m}{2} = \dfrac{n}{-2} = \dfrac{1}{\pm 3}$

या $\quad l = \pm\dfrac{1}{3},\ m = \pm\dfrac{2}{3},\ n = \mp\dfrac{2}{3}$

यदि बिन्दु $(2,3,1)$ से रेखा पर लम्ब की लम्बाई PQ हो, तो

$$PQ^2 = \left[\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + (3-1)^2 + (1-0)^2\right] - \left[\frac{5}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 2 - 1 \times \frac{2}{3}\right]^2$$

$$= \left(\frac{25}{4} + 4 + 1\right) - \left(\frac{5}{6} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{45}{4} - \frac{9}{4} = 9$$

$\therefore \quad PQ = 3$

अर्थात् वांछित लाम्बिक दूरी 3 इकाई है।

देखें आपने कितना सीखा 36.3

1. निम्न में से प्रत्येक के लिए, एक बिन्दु की दी गई रेखा से दूरी ज्ञात कीजिए :

   (i) बिन्दु (0, 2, 3), रेखा $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+4}{3}$

(ii) बिन्दु $(-1, 3, 9)$, रेखा $\dfrac{x-13}{5} = \dfrac{y+8}{-6} = \dfrac{z-31}{1}$

(iii) बिन्दु (4, 1, 1), रेखा $x + y + z = 4,\ x - 2y - z = 4$

(iv) बिन्दु (3, 2, 1), रेखा $x + y + z = 4$ तथा $x - 2y - z = 4$

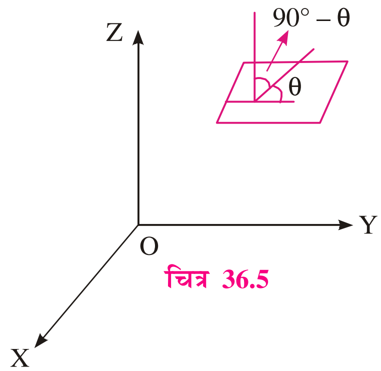
36.4 एक रेखा तथा एक समतल के बीच का कोण

एक रेखा तथा एक समतल के बीच का कोण समतल के अभिलम्ब तथा रेखा के बीच के कोण का पूरक होता है। माना रेखा के समीकरण

$$\frac{x-x'}{l} = \frac{y-y'}{m} = \frac{z-z'}{n} \qquad .....(i)$$

हैं तथा समतल का समीकरण है :

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad ....(ii)$$



चित्र 36.5

यदि (i) तथा (ii) के बीच का कोण θ है, तो

$$\sin\theta = \cos(90° - \theta)$$

$$= \frac{al + bm + cn}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\ \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

उदाहरण 36.10. रेखा $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+3}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ तथा समतल $2x - 3y + 4z - 7 = 0$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिये।

हल : मान लीजिए कि समतल तथा रेखा के बीच का कोण θ है।

$$\sin\theta = \frac{2\times 3 - 3\times 3 + 4\times 1}{\sqrt{3^2 + 3^2 + 1^2}\ \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{19}\ \sqrt{29}} = \frac{1}{\sqrt{551}}$$

अर्थात् $$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{551}}\right)$$

देखें आपने कितना सीखा 36.4

1. निम्न रेखाओं तथा समतलों के बीच के कोण ज्ञात कीजिए :

(i) रेखा : $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-3}{-1}$ तथा समतल : $3x - 4y + 5z = 5$

(ii) रेखा : $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{z-3}{3} = \dfrac{y+2}{1}$ तथा समतल : $-2x + 4y - 5z = 20$

(iii) रेखा : $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{y+2}{5}$ तथा समतल : $x - 4y + 6z = 11$

(iv) रेखा : $\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z+4}{1}$ तथा समतल : $4x - 3y - z - 7 = 0$

36.5 दो रेखाओं के समतलीय होने का प्रतिबंध

यदि दो रेखायें

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \qquad \text{......(i)}$$

तथा

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2} \qquad \text{.....(ii)}$$

प्रतिच्छेद करती हैं तो ये एक ही समतल में होती हैं।

रेखा (i) जिस समतल में है, उस समतल का समीकरण है :

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 \qquad \text{......(iii)}$$

जबकि

$$Al_1+Bm_1+Cn_1=0 \qquad \text{.....(iv)}$$

यदि रेखा (ii) तल (iii) में है, तो बिन्दु (x_2, y_2, z_2) उस समतल पर स्थित होना चाहिए।

$$\therefore \quad A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)=0 \qquad \text{.....(v)}$$

जबकि

$$Al_2+Bm_2+Cn_2=0 \qquad \text{....(vi)}$$

(iv), (v) , (vi) में से A, B और C का विलोपन करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0 \qquad \text{.....(vii)}$$ मिलता है।

यही रेखाओं (i) तथा (ii) के समतलीय होने का एक आवश्यक प्रतिबंध है।

पुनः (iii), (iv) , (vi) में से A, B और C का विलोपन करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0 \qquad \text{.....(viii)}$$

(viii) दो परस्पर प्रतिच्छेदी रेखाओं को अंतर्निहित करने वाले समतल को दर्शाता है। अब हम सिद्ध करेंगे कि यदि प्रतिबंध (vii) सत्य है तो रेखाएं (i) तथा (ii) समतलीय हैं।

समतल

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0 \qquad \text{....(ix)}$$

पर विचार कीजिए।

अर्थात्

$$(x-x_1)(m_1n_2-m_2n_1)+(y-y_1)(n_1l_2-n_2l_1)$$
$$+(z-z_1)(l_1m_2-l_2m_1)=0$$

कोई रेखा समतल में स्थित होगी यदि समतल का अभिलंब उस रेखा पर लम्ब है तथा रेखा पर स्थित कोई भी बिन्दु समतल पर है। आप देख सकते हैं कि

$$l_1(m_1n_2 - m_2n_1) + m_1(n_1l_2 - n_2l_1) + n_1(l_1m_2 - l_2m_1) = 0$$

अत: रेखा (i) समतल (ix) पर स्थित है।

इसी प्रकार, हम देखते हैं कि रेखा (ii) समतल (ix) पर स्थित है, अत: दोनों रेखाएँ समतलीय हैं। अत:, प्रतिबंध (vii) दो रेखाओं के समतलीय होने के लिए प्रर्याप्त है।

उपप्रमेय : रेखायें (i) तथा (ii) परस्पर प्रतिच्छेद करेंगी, यदि तथा केवल यदि (vii) सत्य हैं तथा रेखायें समान्तर नहीं हैं।

टिप्पणी: (i) अंतरिक्ष में दो रेखायें जो कि न तो समान्तर हैं तथा न ही प्रतिच्छेदी हैं एक ही समतल में नहीं होती। ऐसी रेखाओं को विषमतलीय रेखायें कहते हैं।

(ii) यदि एक रेखा सममित रूप में तथा दूसरी व्यापक रूप में हों, तो निम्न प्रकार से आगे बढ़ते हैं।

माना एक रेखा

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \qquad \text{.... (i)}$$

तथा दूसरी रेखा $ax + by + cz + d = 0$ तथा $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ है। .....(ii)

यदि दोनों रेखायें समतलीय हैं तब प्रथम रेखा का एक बिन्दु दूसरी रेखा के समीकरण को सन्तुष्ट करता है।

रेखा (i) पर स्थित एक व्यापक बिन्दु $(x_1 + lr, y_1 + mr, z_1 + nr)$ है।

यह बिन्दु $ax + by + cz + d = 0$ पर भी स्थित है, यदि

$$a(x_1 + lr) + b(y_1 + mr) + c(z_1 + nr) + d = 0 \text{ हो।}$$

$$\therefore \qquad r = -\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{al + bm + cn}$$

इसी प्रकार, यह बिन्दु $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ पर भी स्थित है।

$$\therefore \qquad r = -\frac{a'x_1 + b'y_1 + c'z_1 + d'}{a'l + b'm + c'n}$$

के मान बराबर करने पर, हम निम्न वाँछित प्रतिबंध प्राप्त करते हैं :

$$\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{al + bm + cn} = \frac{a'x_1 + b'y_1 + c'z_1 + d'}{a'l + b'm + c'n}$$

टिप्पणी: यदि दोनों रेखायें व्यापक रूप में हैं, तो एक रेखा के समीकरण को सममित रूप में बदलिये तथा उपरोक्त विधि से ही प्रतिबंध ज्ञात कीजिये।

उदाहरण 36.11. सिद्ध कीजिए कि रेखायें

$$\frac{x - 5}{4} = \frac{y - 7}{4} = \frac{z + 3}{-5} \text{ तथा } \frac{x - 8}{7} = \frac{y - 4}{1} = \frac{z - 5}{3} \text{ समतलीय हैं।}$$

हल : रेखाएँ $\dfrac{x - 5}{4} = \dfrac{y - 7}{4} = \dfrac{z + 3}{-5}$ ......(i)

तथा $\dfrac{x - 8}{7} = \dfrac{y - 4}{1} = \dfrac{z - 5}{3}$ .... (ii)

समतलीय होंगी यदि

$$\begin{vmatrix} 8-5 & 4-7 & 5+3 \\ 4 & 4 & -5 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{अर्थात्} \quad \begin{vmatrix} 3 & -3 & 8 \\ 4 & 4 & -5 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ हो।}$$

या $\quad 3(12+5)+3(12+35)+8(4-28)=0$

या $\quad 51+141-192=0$

या $\quad 0=0$, जो कि सत्य है।

अत:, रेखायें (i) तथा (ii) समतलीय हैं।

उदाहरण 36.12. सिद्ध कीजिये कि रेखाएँ

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+5}{7} \quad \text{तथा} \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-6}{7}$$

समतलीय हैं। साथ ही उस समतल का समीकरण भी ज्ञात कीजिये जिसमें ये रेखाएँ स्थित हैं।

हल : रेखाएँ

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+5}{7} \quad \text{तथा} \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-6}{7}$$

समतलीय होंगी, यदि

$$\begin{vmatrix} 2+1 & 4+3 & 6+5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{अर्थात्} \quad \begin{vmatrix} 3 & 7 & 11 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0 \text{ हो।}$$

या $\quad 3(35-28)-7(21-7)+11(12-5)=0$

या $\quad 21-98+77=0$

या $\quad 0=0$. जो कि सत्य है।

$\therefore$ दी गई रेखाएँ समांतर हैं।

उस समतल का समीकरण, जिनमें ये रेखाएँ स्थित हैं, निम्न है :

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+3 & z+5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

या $\quad (x+1)(35-28)-(y+3)(21-7)+(z+5)(12-5)=0$

या $\quad 7x+7-14y-42+7z+35=0$

या $\quad 7x-14y+7z=0$

या $\quad x-2y+z=0$

देखें आपने कितना सीखा 36.5

1. सिद्ध कीजिये कि निम्न रेखायें समतलीय हैं :

   (i) $\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+1}{1}$ तथा $x + 2y + 3z = 0 = 2x + 4y + 3z + 3$

   (ii) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ तथा $4x - 3y + 1 = 0 = 5x - 3z + 2$

2. दिखाइये कि रेखाएँ $\frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{1}$ तथा $\frac{x}{1} = \frac{y-7}{-3} = \frac{z+7}{2}$ समतलीय हैं। उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये, जिनमें ये रेखाएँ स्थित हैं।

आइये दोहराएँ

- दो असमान्तर समतलों का प्रतिच्छेदन एक रेखा होता है।
- रेखा का सदिश समीकरण $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ है, जहाँ $\vec{a}$ रेखा पर दिए हुए बिन्दु का स्थिति सदिश और $\vec{b}$ रेखा के समान्तर एक सदिश है।
- इसका संगत कार्तीय रूप $\frac{x-x_1}{b_1} = \frac{y-y_1}{b_2} = \frac{z-z_1}{b_3}$ है; जहाँ (x_1, y_1, z_1) रेखा पर दिए हुए बिन्दु के निर्देशांक हैं और b_1, b_2, b_3 सदिश $\vec{b}$ के दिक्–अनुपात हैं।
- $\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$ रेखा का एक अन्य सदिश समीकरण है जहाँ $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ रेखा पर दो विभिन्न बिन्दुओं के स्थिति सदिश हैं।
- इसका संगत कार्तीय रूप $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ है; जहाँ (x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2) रेखा पर दिए हुए दो विभिन्न बिन्दुओं के निर्देशांक हैं।
- रेखा $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ तथा समतल $ax + by + cz + d = 0$ के बीच का कोण θ

  $$\sin\theta = \frac{al + bm + cn}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\,\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$ द्वारा प्राप्त होता है।

- दो रेखाएँ $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ तथा $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$ समतलीय होंगी, यदि

  $$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$ हो।

तथा उस समतल का समीकरण, जिसमें ये दोनों रेखाएँ स्थित हैं, निम्न है :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

सहायक वेबसाइट

- *http://www.regentsprep.org/regents/math/algebra/ac1/eqlines.htm*
- *http://www.purplemath.com/modules/strtlneq.htm*
- *http://www.mathsteacher.com.au/year10/ch03_linear_graphs/02_gradient/line.htm*

आइए अभ्यास करें

1. उस रेखा के समीकरण ज्ञात कीजिये जो बिन्दु (1,4,7) तथा (3,–2,5) से होकर जाती है।
2. उस रेखा के समीकरण ज्ञात कीजिये जो बिन्दु (–1,–2,–3) से होकर जाती है तथा समतल $3x - 4y + 5z - 11 = 0$ पर लम्ब है।
3. उस रेखा की दिक्कोज्याएँ ज्ञात कीजिये, जो उन रेखाओं पर लम्ब है जिनके दिक्–अनुपात $1, -1, 2$, तथा $2, 1, -1$ हैं।
4. दिखाइए कि बिन्दुओं (1,2,3) तथा (4,5,7) को मिलाने वाला रेखाखण्ड बिन्दुओं (–4,3,–6) तथा (2,9,2) को मिलाने वाले रेखाखण्ड के समान्तर है।
5. दो रेखाओं $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+5}{5}$ तथा $\frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।
6. उस रेखा के समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिन्दु (1,2,–4) से होकर जाती है तथा निम्न दोनों रेखाओं में से प्रत्येक पर लम्ब है:
$$\frac{x-8}{3} = \frac{y+19}{-16} = \frac{z-10}{7} \quad \text{तथा} \quad \frac{x-15}{3} = \frac{y-29}{8} = \frac{z-5}{-5}$$
7. रेखा $x - y + 2z - 5 = 0$ तथा $3x + y + z - 6 = 0$ के समीकरणों को सममित रूप में परिवर्तित कीजिए।
8. दिखाइये कि रेखाएँ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{-1}$ तथा $\frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}$ समतलीय हैं। उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसमें ये रेखाएँ स्थित हैं।
9. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये जिनमें निम्न रेखाएँ स्थित हैं:
$$\frac{x-5}{4} = \frac{y-7}{4} = \frac{z+3}{-5} \quad \text{तथा} \quad \frac{x-8}{7} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{3}$$
10. बिन्दुओं (2,3,1) तथा (5,8,7) को मिलाने वाले रेखाखण्ड का रेखा $\frac{x}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z+1}{6}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

11. बिन्दु (1, 2, –4) से होकर जाने वाली तथा सदिश $(2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k})$ के समान्तर रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

12. एक रेखा का कार्तीय समीकरण $\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y-4}{-5}=z$ है। इसका सदिश समीकरण क्या होगा?

13. बिन्दुओं (3, –2, –5) तथा (3, –2, 6) से होकर जाने वाली रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

14. बिन्दु (–2, 4, –5) से होकर जाने वाली तथा रेखा $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+4}{5}=\dfrac{z-8}{2}$ के समान्तर रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 36.1

1. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-3}{5}$

2. $\dfrac{x-3}{-6}=\dfrac{y+9}{7}=\dfrac{z-4}{-4}$

3. $\dfrac{x+7}{9}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z-3}{5}$

4. $\dfrac{x-1}{9}=\dfrac{y-2}{-10}=\dfrac{z-3}{-4}$

5. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$

6. $\vec{r}=\lambda(5\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k})$

7. $\vec{r}=5\hat{i}-4\hat{j}+3\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+7\hat{j}+2\hat{k})$

8. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{2}$

9. $\vec{r}=(2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k})+\lambda(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$

देखें आपने कितना सीखा 36.2

1. (i) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{-3}$ (ii) $\dfrac{x+\frac{1}{3}}{1}=\dfrac{y+\frac{2}{3}}{-2}=\dfrac{z}{1}$

(iii) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+3}{1}$

देखें आपने कितना सीखा 36.3

1. (i) $\sqrt{21}$ इकाई (ii) 21 इकाई

(iii) $\sqrt{\dfrac{27}{14}}$ इकाई (iv) $\sqrt{6}$ इकाई

देखें आपने कितना सीखा 36.4

1. (i) $\sin^{-1}\left(-\dfrac{3}{5}\right)$ (ii) $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{70}}\right)$

(iii) $\sin^{-1}\left(\dfrac{46}{\sqrt{2650}}\right)$ (iv) 0°

देखें आपने कितना सीखा 36.5

2. $x + y + z = 0$

आइए अभ्यास करें

1. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-4}{-6} = \dfrac{z-7}{-2}$

2. $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z+3}{5}$

3. $-\dfrac{1}{\sqrt{35}}, \dfrac{5}{\sqrt{35}}, \dfrac{3}{\sqrt{35}}$

5. $90°$

6. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+4}{6}$

7. $\dfrac{x - \frac{11}{4}}{-3} = \dfrac{y + \frac{9}{4}}{5} = \dfrac{z}{4}$

8. $2x - 5y - 16z + 13 = 0$

9. $17x - 47y - 24z + 172 = 0$

10. $\dfrac{57}{7}$ इकाई

11. $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k})$

12. $\vec{r} = (-5\hat{i} + 4\hat{j}) + \lambda(3\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k})$

13. $\vec{r} = (3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k}) + \lambda(11\hat{k})$

14. $\vec{r} = (-2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k})$