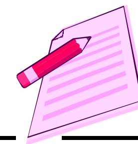


37

रैखिक प्रोग्रामन

37.1 रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं का परिचय

एक खिलौना विक्रेता 1500 रुपये लेकर खिलौने खरीदने के लिए बाजार जाता है। बाजार में विभिन्न प्रकार के खिलौने उपलब्ध हैं। विशेषता के आधार पर, वह A तथा B प्रकार के खिलौनों को अनुरूप पाता है। A प्रकार के प्रत्येक खिलौनें का क्रय मूल्य 300 रुपये तथा B प्रकार के प्रत्येक खिलौने का क्रयमूल्य 250 रुपये है। वह A प्रकार के प्रत्येक खिलौने को 325 रुपये में तथा B प्रकार के प्रत्येक खिलौने को 265 रुपये में बेच सकता है। अपने पास उपलब्ध धन से वह अधिकतम लाभ प्राप्त करना चाहता है। उसकी समस्या यह है कि वह A तथा B प्रकार के कितने–कितने खिलौने खरीदे ताकि उन्हें बेचने पर उसे अधिकतम लाभ प्राप्त हो।

वह लागत की सीमा को ध्यान में रखकर A तथ B प्रकार के खिलौनों के सभी सम्भव क्रमचयों (combinations) के लिए निम्नलिखित तालिका बना सकता है।

‘A’ प्रकार	‘B’ प्रकार	लागत (रु. में)	बेचने के बाद राशि (रु. में) (बिना प्रयुक्त राशि यदि हो)	लागत पर लाभ (रु. में)
0	6	1500.00	1590.00	90.00
1	4	1300.00	1385.00	85.00
2	3	1350.00	1445.00	95.00
3	2	1400.00	1505.00	105.00
4	1	1450.00	1565.00	115.00
5	0	1500.00	1625.00	125.00

अब, अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए निर्णय स्पष्ट है। A प्रकार के पाँच खिलौने खरीदे जाने चाहिए। उपयुक्त समस्या का हल आसान था क्योंकि चयन केवल दो किस्मों तक सीमित था तथा खरीदी गई वस्तुओं की संख्या भी कम थी। यहाँ, सभी सम्भव क्रमचयों के बारे में सोचा गया तथा उनसे संबन्धित लाभ की गणना की गई। लेकिन यह निश्चित करना होगा कि उसने सभी संभावनाओं को ध्यान में रखा है।

ऊपर वर्णित समस्या के समान एक रेडियो फुटकर विक्रेता द्वारा एक समस्या का सामना किया गया। इस का वर्णन नीचे दिया गया है।

एक रेडियो फुटकर विक्रेता एक थोक विक्रेता से रेडियो ट्रांजिस्टर खरीदना चाहता है। दो प्रकार (A तथा B प्रकार) के रेडियो हैं। A प्रकार के प्रत्येक रेडियो का क्रय मूल्य 360 रुपये तथा *B* प्रकार के प्रत्येक रेडियो का क्रय मूल्य 240 रु. है। विक्रेता 5760 रु. तक खर्च कर सकता है। वह A प्रकार के प्रत्येक रेडियो को बेचेने पर 50 रुपये लाभ तथा B प्रकार के प्रत्येक रेडियो को बेचने पर 40 रुपये लाभ प्राप्त कर सकता है। अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए उसे प्रत्येक प्रकार के कितने रेडियो खरीदने चाहिएँ?

यहाँ हम लाभ को अधिकतम करते हैं। कुछ समस्याओं में कीमत को न्यूनतम करते हैं। निम्नलिखित समस्या को लीजिए।

दो दर्जी A तथा B प्रत्येक दिन क्रमशः 150 रुपये तथा 200 रुपये कमाते हैं। दर्जी A प्रतिदिन 6 कमीज, 4 पैंट तथा दर्जी B प्रतिदिन 4 कमीज तथा 7 पैंट की सिलाई करता है। यदि वे न्यूनतम श्रमिक मूल्य पर कम–से–कम 60 कमीज तथा 72 पैंट बनाना चाहें तो प्रत्येक को कितने दिन कार्य करना होगा।

इस समस्या में हमें श्रमिक मूल्य को न्यूनतम करना है।

अधिकतम तथा न्यूनतम करने की इस प्रकार की समस्याओं को इष्टतम समस्या (Optimization Problems) कहते हैं।

इस प्रकार की समस्याओं को हल करने के लिए गणितज्ञों द्वारा अपनाई गई विधि को रैखिक–प्रोग्रामन (Linear Programming) कहते हैं।

37.1.1 ऐतिहासिक आधार

रैखिक प्रोग्रामन (Linear Programming) विधि हल की नवीन उत्पत्ति है। यह द्वितीय विश्व युद्ध के दौरान शुरू हुई जब युद्ध क्रियाओं के खर्चे को कम करने, हानि को न्यूनतम करने तथा शत्रु के नुकसान को अधिकतम करने के लिए योजनाबद्ध करना पड़ा।

1941 में रूस के गणितज्ञ एल. कन्टोरोविच तथा अमेरिका के अर्थशास्त्री एफ.एल. हिल्कोक ने रैखिक प्रोग्रामन में पहली समस्या को सूत्रबद्ध किया। दोनों ने अलग–अलग कार्य किया। यह एक सुविख्यात परिवहन समस्या (Transportation Problem) है जो रैखिक प्रोग्रामन (Linear Programming) की ही एक शाखा बनाती है।

1945 में एक अंग्रेज अर्थशास्त्री जी. स्टिग्लर ने एक दूसरी रैखिक प्रोग्रामन समस्या का वर्णन किया, जिसमें संतुलित आहार के लिए गणना की गई। मुख्यतया यह समस्या 77 प्रकार के आहारों के गुणों की गणना के लिए थी, जिन्हें निम्नतम मूल्य पर ही नहीं बल्कि नौ पौष्टिक तत्वों की जरूरत को पूरा करने के लिए खरीदा जाना था।

1947 में एक अमेरिकी अर्थशास्त्री जी.बी. डान्जिग ने प्रसिद्ध पत्रिका 'इकोनोमेट्रिका' में एक लेख प्रकाशित किया जिसमें उसने रैखिक प्रोग्रामन समस्या को सूत्रबद्ध किया। डान्जिग को पद 'रैखिक प्रोग्रामन' प्रयोग करने तथा समस्या का विधि से हल करने का श्रेय भी दिया जाता है।

1974 में एल. कन्टोरोविच को एक दूसरे प्रसिद्ध अमेरिकी गणितज्ञ–अर्थशास्त्री टी.सी. कूपमान्स के साथ इन समस्याओं पर काम करने के लिए अर्थशास्त्र में नोबेल पुरस्कार दिया गया था।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाएंगे:

- रैखिक प्रोग्रामन में प्रयुक्त शब्दावली का ज्ञान
- व्यवहारिक समस्याओं को रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं में बदलना
- आलेखीय विधि द्वारा रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को हल करना

पूर्व ज्ञान

- विभिन्न सूचनाओं को रैखिक असमिकाओं में बदलना
- आलेखीय विधि से रैखिक असमिकाओं को हल करना

37.2 रैखिक प्रोग्रामन में प्रयुक्त विभिन्न पदों की परिभाषाएँ

भूमिका में दिए गए उदाहरणों के सूक्ष्म परीक्षण से एक मुख्य लक्षण चिन्हित होता है जो सभी समस्याओं के लिए उभयनिष्ठ है अर्थात् प्रत्येक उदहरण में, हम किसी राशि का अधिकतम या न्यूनतम मान ज्ञात करते हैं।

परिचय में दिए गए उदाहरण 1 तथा 2 में हम लगाए गए धन की अधिकतम वापसी चाहते हैं। उदाहरण 3 में हम श्रमिक मूल्य को न्यूनतम बनाना चाहते हैं। रैखीय प्रोग्रामन शब्दावली में किसी राशि को अधिकतम या न्यूनतम बनाना उस समस्या के उद्देश्य को निरूपित करता है।

37.2.1 वस्तुनिष्ठ फलन (Objective Functions)

रैखिक प्रोग्रामन समस्या में चरों का रैखिक फलन, z जिसका इष्टतम (Optimal) मान ज्ञात करना है वस्तुनिष्ठ फलन कहलाता है। यहाँ, रैखीय स्थिति से मतलब है कि निम्न प्रकार का गणितीय व्यंजक लिखना

$a_1x_1 + a_2\,x_2 + ... + a_nx_n$, जहाँ $a_1, a_{2,\,.....,}\; a_n$ स्थिरांक तथा $x_1, x_{2,\,.....,}\; x_n$ चर हैं।

रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं में उत्पाद, सेवाएँ, अनुसंधान आदि जो दिए गए सीमित **साधनों की हिस्सेदारी** के लिए एक–दूसरे से स्पर्धा करते हैं, चर या निर्णायक चर कहलाते हैं।

37. 2.2 प्रतिबन्ध

संसाधनों पर सीमाएँ (जैसे नकद–राशि, उत्पादन क्षमता, मानवशक्ति, समय, मशीन आदि) जो विभिन्न स्पर्धात्मक चरों में सम्बन्ध दर्शाती हैं, प्रतिबन्ध होती हैं। ये सीमाएँ रैखिक–समीकरण या असमिका के रूप में होती है, इन्हें प्रतिबन्ध (constraints) कहते हैं।

37.2.3 ऋणेतर प्रतिबन्ध

सभी चरों का ऋणेतर मान लिया जाता है क्योंकि भौतिकीय राशियों का मान ऋणात्मक होना असम्भव है।

37.3 रैखिक प्रोग्रामन समस्या को सूत्रबद्ध करना

रैखिक प्रोग्रामन समस्या को गणितीय मॉडल रूप में व्यवस्थापित करने के लिए निम्नलिखित चरणों को ध्यान में रखते हैं।

चरण 1 : उन निर्णायक चरों को पहचानिए जिनकी गणना की जानी है तथा उन्हें बीजीय चिन्हों के रूप में लिखिए जैसे $x_1, x_2, x_3,$ ....

चरण 2 : दी गई समस्या में सभी सीमाओं को पहचानिए तथा उन्हें उपर्युक्त परिभाषित चरों के पदों में रैखिक समीकरण या असमिकाओं के रूप में प्रदर्शित कीजिए।

चरण 3 : वस्तुनिष्ठ फलन जिसका इष्टतम (Optimum) मान ज्ञात करना है को पहचानिए तथा इसे उपर्युक्त परिभाषित चरों के रैखिक फलन के रूप में प्रदर्शित कीजिए।

उदाहरण 37.1. एक फुटकर विक्रेता A तथा B प्रकार के रेडियो ट्रांजिस्टर खरीदना चाहता है। A प्रकार के प्रत्येक रेडियो का मूल्य 360.00 रुपये तथा B प्रकार के प्रत्येक रेडियो का मूल्य 240.00 रुपये है। फुटकर विक्रेता यह जानता है कि वह 20 सेट से अधिक नहीं बेच सकता इसलिए वह 20 सेट से अधिक नहीं खरीदता है। वह 5760.00 रुपये तक ही खर्च कर सकता है। वह A प्रकार के सेट पर 50.00 रुपये लाभ तथा B प्रकार के सेट पर 40.00 रुपए लाभ प्राप्त करना चाहता है। अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए इस समस्या का गणितीय सूत्रण कीजिए।

हल : माना कि फुटकर विक्रेता A प्रकार के x_1 सेट तथा B प्रकार के x_2 सेट खरीदता है। क्योंकि प्रत्येक प्रकार के सेट की संख्या ऋणात्मक नहीं हो सकती है।

$$x_1 \geq 0, \qquad \cdots (1)$$

$$x_2 \geq 0, \qquad \cdots (2)$$

A प्रकार के x_1 सेट तथा B प्रकार के x_2 सेट का मूल्य $360\ x_1 + 240\ x_2$ है जो 5760.00 रुपये के बराबर या इससे कम होना चाहिए। अतः

$$360\,x_1 + 240\,x_2 \leq 5760$$

या $$3x_1 + 2x_2 \leq 48 \qquad \cdots (3)$$

दोनों प्रकार के सेट की कुल संख्या 20 से अधिक नहीं होनी चाहिए।

अतः $$x_1 + x_2 \leq 20 \qquad \cdots (4)$$

क्योंकि कुल लाभ A प्रकार के x_1 सेट तथा B प्रकार के x_2 सेट बेचने पर प्राप्त होता है। अतः फुटकर विक्रेता A प्रकार के सेटों पर $50\,x_1$ तथा B प्रकार के सेटों पर $40\,x_2$ लाभ कमाता है। अतः कुल लाभ निम्नलिखित होगा :

$$z = 50x_1 + 40x_2 \qquad \cdots (5)$$

अतः दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का गणितीय सूत्रण निम्नलिखित होगाः

x_1, x_2 का मान ज्ञात कीजिए जिससे

निम्न शर्तों के अन्तर्गत,

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \le 48 \\ x_1 + x_2 \le 20 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{array}\right\} \textbf{ प्रतिबन्ध}$$

z = $50x_1 + 40x_2$ **(वस्तुनिष्ठ फलन)** का मान अधिकतम हो जाए।

उदाहरण 37.2. ठण्डा पेय बनाने वाली एक कम्पनी बोतल भरने के दो यन्त्र लगाती है। एक यन्त्र स्थान P पर तथा दूसरा स्थान Q पर स्थित है। प्रत्येक यन्त्र विभिन्न तीन प्रकार के ठण्डे पेय A, B तथा C बनाता है। दोनों यन्त्रों की प्रत्येक दिन बोतल भरने की क्षमता निम्न प्रकार है :

	यन्त्र	
उत्पाद	P	Q
A	3000	1000
B	1000	1000
C	2000	6000

एक बाज़ार का निरीक्षण करने पर यह स्पष्ट होता है कि मई महीने के दौरान A प्रकार की कम से कम 24000 बोतलों, B प्रकार की कम से कम 16000 बोतलों तथा C प्रकार की कम से कम 48000 बोतलों की माँग होगी। P तथा Q यन्त्रों को प्रतिदिन चलाने के लिए क्रमशः 6000.00 रुपये तथा 4000.00 रुपये खर्च आता है। मई महीने में कम्पनी को प्रत्येक यन्त्र कितने दिन चलाना चाहिए, जिससे उत्पादन मूल्य न्यूनतम हो तथा बाजार की माँग पूरी हो जाए। समस्या का गणितीय सूत्रण कीजिए।

हल : माना कि बाजार की माँग की पूर्ति के लिए कम्पनी मई महीने में यन्त्र P को x_1 दिन तथा यन्त्र Q को x_2 दिन चलाती है।

यन्त्र P को प्रतिदिन चलाने का खर्चा 6000.00 रुपये है

अतः इसे x_1 दिन चलाने का खर्चा 6000 x_1 रुपये होगा।

यन्त्र Q को प्रतिदिन चलाने का खर्चा 4000 रुपये है

अतः इसे x_2 दिन चलाने का खर्चा 4000 x_2 रुपये होगा।

अतः दोनों यन्त्रों को चलाने का कुल खर्चा होगा :

$$z = 6000x_1 + 4000x_2 \qquad \cdots (1)$$

यन्त्र P प्रत्येक दिन A प्रकार के पेय की 3000 बोतलें बनाता है।

अतः x_1 दिनों में यन्त्र P, A प्रकार के पेय की 3000 x_1 बोतलें बनाएगा।

यन्त्र Q प्रत्येक दिन A प्रकार के पेय की 1000 बोतलें बनाता है।

अतः x_2 दिनों में यन्त्र Q, A प्रकार के पेय की 1000 x_2 बोतलें बनाएगा।

निर्धारित समय में A प्रकार के पेय का कुल उत्पादन निम्न होगा :

$3000\,x_1 + 1000\,x_2$

लेकिन इस प्रकार के पेय की कम से कम 24000 बोतलों की माँग होगी। अतः इस प्रकार के पेय का कुल उत्पादन इस माँग के बराबर या इससे अधिक होना चाहिए।

$\therefore \quad 3000x_1 + 1000x_2 \geq 24000$

या $\quad 3x_1 + x_2 \geq 24 \qquad \cdots (2)$

इसी प्रकार, अन्य दो पेय के लिए,

$1000x_1 + 1000x_2 \geq 16000$

या $\quad x_1 + x_2 \geq 16 \qquad \cdots (3)$

तथा

$2000x_1 + 6000x_2 \geq 48000$

या $\quad x_1 + 3x_2 \geq 24 \qquad \cdots (4)$

x_1 और x_2 क्योंकि दिनों की संख्या है अतः यह ऋणेतर है।

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \qquad \cdots (5)$

इस प्रकार हमारी समस्या है : x_1 तथा x_2 का मान ज्ञात करना जो z को न्यूनतम बनाते हैं।

$z = 6000x_1 + 4000x_2$ ***(वस्तुनिष्ठ फलन)***

निम्न शर्तों के अन्तर्गत

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\geq 24 \\ x_1 + x_2 &\geq 16 \\ x_1 + 3x_2 &\geq 24 \end{aligned}\right\} \qquad \textit{(प्रतिबन्ध)}$$

तथा $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

उदाहरण 37.3. एक कारखाना A तथा B दो प्रकार की वस्तुओं का उत्पादन करता है और A प्रकार की वस्तु को 2.00 रुपये लाभ तथा B प्रकार की वस्तु को 3.00 रुपये लाभ पर बेचता है। प्रत्येक वस्तु पर मशीनों G तथा H द्वारा कार्य होता है। A प्रकार की वस्तु को उत्पादित करने में G पर एक मिनट तथा H पर दो मिनट कार्य करने की जरूरत होती है। B प्रकार की वस्तु को उत्पादित करने में G पर एक मिनट तथा H पर एक मिनट कार्य करने की जरूरत होती है। एक कार्यदिवस के दौरान मशीन G, 6 घण्टे 40 मिनट से अधिक समय उपलब्ध नहीं होती है जबकि मशीन H, अधिकतम 10 घण्टे उपलब्ध होती है। इस समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्रबद्ध कीजिए।

हल : माना कि A प्रकार की वस्तुओं की संख्या x_1 तथा B प्रकार की वस्तुओं की संख्या x_2 है। समस्या में दी गई सूचनाओं को निम्नलिखित तालिका के रूप में व्यवस्थापित कर सकते हैं :

मशीन	वस्तुओं पर कार्य समय (मिनट में)		उपलब्ध समय (मिनट में)
	A प्रकार (x_1 इकाई)	B प्रकार (x_2 इकाई)	
G	1	1	400
H	2	1	600
प्रति इकाई लाभ	2.00 रुपये	3.00 रुपये	

क्योंकि, A प्रकार की प्रत्येक वस्तु पर लाभ 2 .00 रुपये हैं। अतः A प्रकार की x_1 वस्तुओं को बेचने पर लाभ $2x_1$. होगा। इसी प्रकार B प्रकार की x_2 वस्तुओं को बेचने पर लाभ $3x_2$. होगा। अतः A प्रकार की x_1 वस्तुओं तथा B प्रकार की x_2 वस्तुओं को बेचने पर कुल लाभ निम्नलिखित होगा :

$$z = 2x_1 + 3x_2 \quad \text{(वस्तुनिष्ठ फलन)} \qquad \cdots(1)$$

क्योंकि मशीन G, A प्रकार पर एक मिनट तथा B प्रकार पर एक मिनट लेती है अतः मशीन G पर कुल आवश्यक मिनट $x_1 + x_2$ होगी।

लेकिन मशीन G, 6 घंटे 40 मिनट (400 मिनट) से अधिक समय के लिए उपलब्ध नहीं है। अतः

$$x_1 + x_2 \leq 400 \qquad \cdots(2)$$

इसी प्रकार मशीन H पर कुल आवश्यकता $2x_1 + x_2$ मिनट होंगी। लेकिन मशीन H, *10* घंटे के लिए उपलब्ध है। अतः

$$2x_1 + x_2 \leq 600 \qquad \cdots(3)$$

क्योंकि ऋणात्मक वस्तुएँ उत्पन्न करना सम्भव नहीं है अतः

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \qquad \cdots(4)$$

अतः समस्या है x_1 तथा x_2 के मान ज्ञात करना जो z को अधिकतम बनाएं जबकि $z = 2x_1 + 3x_2$ (वस्तुनिष्ठ फलन)

निम्न शर्तों के अन्तर्गत

$$x_1 + x_2 \leq 400$$
$$2x_1 + x_2 \leq 600$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

उदाहरण 37.4. एक फर्नीचर निर्माता दो प्रकार– A तथा B प्रकार के सोफे बनाता है। सरलता के लिए वह उत्पादन क्रिया को तीन विभिन्न क्रियाओं–बढ़ईगीरी, परिष्कृत करना, गद्दार बनाना, में बाँट लेता है। A प्रकार के सोफे के निर्माण में 6 घंटे बढ़ईगीरी में, 1 घंटा परिष्कृत करने में तथा 2 घंटे गद्दार बनाने में लगते हैं। B प्रकार के सोफे के निर्माण में 3 घंटे बढ़ईगीरी में, 1 घंटा परिष्कृत करने में तथा 6 घंटे गद्दार बनाने

में लगते हैं। कुशल कारीगरों, औजारों तथा सुविधाओं की सीमित उपलब्धताओं की वजह से कारखाने में प्रत्येक दिन 96 मानव घंटे बढ़ईगीरी के लिए, 18 मानव घंटे परिष्कृत करने तथा 72 मानव घंटे गद्देदार बनाने के लिए उपलब्ध है। A प्रकार के प्रत्येक सोफा पर 80 रुपये लाभ तथा B प्रकार के प्रत्येक सोफा पर 70 रुपये लाभ होता है। अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए प्रत्येक दिन A तथा B प्रकार के कितने सोफे बनाने चाहिएँ?। इस समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्र–बद्ध कीजिए।

हल : विभिन्न क्रियाओं तथा प्रत्येक क्रिया के लिए आवश्यक मानव समय को निम्न तालिका के रूप में दर्शाया गया है :

क्रियाएँ	**सोफा *A* प्रकार**	**सोफा *B* प्रकार**	**उपलब्ध श्रम**
बढ़ईगीरी	6 घंटे	3 घंटे	96 मानव घंटे
परिष्कृत करना	1 घंटा	1 घंटा	18 मानव घंटे
गद्देदार बनाना	2 घंटे	6 घंटे	72 मानव घंटे
लाभ	80.00 रुपये	70.00 रुपये	

माना कि A प्रकार के सोफों की संख्या x_1 तथा B प्रकार के सोफों की संख्या x_2 है।

तालिका की प्रत्येक पंक्ति एक प्रतिबन्ध बनाती है।

पहली पंक्ति दर्शाती है कि बढ़ईगीरी के A प्रकार के प्रत्येक सोफा के लिए 6 घंटे तथा B प्रकार के प्रत्येक सोफे के लिए 3 घंटे आवश्यक हैं प्रत्येक दिन बढ़ईगीरी के लिए केवल 96 मानव घंटे उपलब्ध ा हैं। प्रत्येक दिन A प्रकार के x_1 सोफे तथा B प्रकार के x_2 सोफे बनाने के लिए कुल मानव घंटों की गणना निम्न प्रकार कर सकते हैं :

बढ़ईगिरी के लिए प्रत्येक दिन मानव घंटों की संख्या = { (बढ़ईगीरी के लिए A प्रकार के प्रत्येक सोफा के लिए आवश्यक घंटे)$\times$(A प्रकार के सोफों की संख्या) } + { (बढ़ईगीरी के लिए B प्रकार के प्रत्येक सोफा के लिए आवश्यक घंटे)$\times$(B प्रकार के सोफों की संख्या) }

$$= 6x_1 + 3x_2$$

लेकिन प्रत्येक दिन बढ़ईगीरी के लिए अधिकतम 96 मानव घंटे उपलब्ध हैं। अतः

$$6x_1 + 3x_2 \leq 96$$

या $\quad 2x_1 + x_2 \leq 32 \qquad \cdots(1)$

इसी प्रकार तालिका की द्वितीय तथा तृतीय पंक्ति क्रमशः परिष्कृत करने तथा गद्देदार बनाने की सीमाओं को दर्शाती है। अतः

$$x_1 + x_2 \leq 18 \qquad \cdots(2)$$

तथा $\quad 2x_1 + 6x_2 \leq 72$

या $\quad x_1 + 3x_2 \leq 36 \qquad \cdots(3)$

क्योंकि सोफों की संख्या ऋणात्मक नहीं हो सकती

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \qquad \cdots(4)$$

अब, लाभ दो स्रोतों A प्रकार के सोफा तथा B प्रकार के सोफा, से प्राप्त होता है। अतः

लाभ = (A प्रकार के सोफों से लाभ) + (B प्रकार के सोफों से लाभ)

= { (A प्रकार के प्रत्येक सोफे पर लाभ) $\times$ (A प्रकार के सोफों की संख्या) }

+ { (B प्रकार के प्रत्येक सोफे पर लाभ) $\times$ (B प्रकार के सोफों की संख्या) }

$z = 80x_1 + 70x_2$ (वस्तुनिष्ठ फलन) $\cdots(5)$

अब, समस्या है कि x_1 तथा x_2 का मान ज्ञात करना है जिससे z का अधिकतम मान प्राप्त हो।

जबकि $\boldsymbol{z = 80\,x_1 + 70\,x_2}$ **(वस्तुनिष्ठ फलन)**

निम्न शर्तों के अन्तर्गत,

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 32 \\ x_1 + x_2 &\leq 18 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 36 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(प्रतिबन्धा)}$$

देखें आपने कितना सीखा 37.1

1. एक कम्पनी दो वस्तुएँ A तथा B बनाती है। प्रत्येक वस्तु पर दो मशीनों G तथा H से कार्य होता है। वस्तु A को उत्पादित करने के लिए मशीन G पर 3 घंटे तथा मशीन H पर 4 घंटे तथा वस्तु B को उत्पादित करने के लिए मशीन G पर 4 घंटे तथा मशीन H पर 5 घंटे कार्य करने की जरूरत होती है। मशीन G तथा H पर कार्य करने के लिए उपलब्ध समय क्रमशः 18 घंटे तथा 21 घंटे है। वस्तुएँ A तथा B क्रमशः 3.00 रुपये तथा 8.00 रुपये प्रति इकाई के लाभ पर बेची जा सकती हैं। इस समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्रबद्ध कीजिए।
2. एक फर्नीचर व्यापारी दो वस्तुओं मेज तथा कुर्सी का व्यापार करता है। व्यापार में उपयेाग करने के लिए उसके पास 5000 रुपये हैं तथा अधिकतम 60 वस्तुओं को रखने के लिए जगह है। एक मेज का मूल्य 250 रुपये तथा एक कुर्सी का मूल्य 50 रुपये है वह एक मेज को 50 रुपये लाभ पर तथा एक कुर्सी को 15 रुपये लाभ पर बेचता है। यह मानकर कि वह खरीदी गई सभी वस्तुएँ बेच सकता है, अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए उसे अपना धन किस प्रकार व्यापार में लगाना चाहिए? इस समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्रबद्ध कीजिए।
3. स्थान P तथा स्थान Q पर एक दुग्धशाला के दो यंत्र लगे हैं। प्रत्येक यंत्र एक किग्रा. पैकिट में दो प्रकार के उत्पाद A तथा B बनाते हैं। प्रत्येक दिन पैकिट बनाने की दोनों यंत्रों की क्षमता इस प्रकार है :

	यंत्र	
उत्पाद	P	Q
A	2000	1500
B	4000	6000

बाजार में एक निरीक्षण करने पर ज्ञात हुआ कि अप्रैल महीने में A प्रकार के कम से कम 20000 पैकिट तथा B प्रकार के कम से कम 16000 पैकिट की माँग होगी। P तथा Q यंत्रों को प्रतिदिन चलाने के लिए क्रमशः 4000 रुपये तथा 7500 रुपये खर्च होंगे। अप्रैल महीने में कम्पनी को प्रत्येक यंत्र कितने दिन चलाना चाहिए जिससे उत्पादन मूल्य न्यूनतम हो तथा बाजार की माँग भी पूरी हो जाए। इस समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्रबद्ध कीजिए।

4. एक कारखाने में दो वस्तुओं A तथा B का निर्माण होता है। वस्तु A को बनाने के लिए मशीन पर 1 घंटा 30 मिनट कार्य करना पड़ता है तथा इसके अतिरिक्त एक शिल्पकार को 2 घंटे कार्य करना पड़ता है। वस्तु B को बनाने के लिए मशीन पर 2 घंटे 30 मिनट कार्य करना पड़ता है तथा इसके अतिरिक्त एक शिल्पकार को 1 घंटा 30 मिनट कार्य करना पड़ता है। एक सप्ताह में कारखाने में 80 घंटे मशीन पर समय तथा 70 घंटे शिल्पकार का समय उपलब्ध हो सकता है। प्रत्येक A वस्तु पर 5.00 रुपये लाभ तथा प्रत्येक B वस्तु पर 4.00 रुपये लाभ होता है। यदि बनाई गई सभी वस्तुएँ बेच दी जाएँ तो बताइए प्रत्येक प्रकार की कितनी वस्तुएँ बनाई जाएँ जिस से हर सप्ताह अधिकतम लाभ प्राप्त हो। समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्रबद्ध कीजिए।

37.4 रैखिक प्रोग्रामन समस्या–ज्यामितीय विधि

दो चरों x तथा y में एक सरल प्रश्न लेते हैं। x तथा y के मान ज्ञात कीजिए, जो निम्नलिखित समीकरणों को संतुष्ट करते हैं :

$$x + y = 4$$
$$3x + 4y = 14$$

इन समीकरणों को हल करने पर $x = 2$ तथा $y = 2$ प्राप्त होता है। जब समीकरणों तथा चरों की संख्या अधिक हो तो क्या होता है?

इस प्रकार के समीकरण निकायों के लिए, क्या हम अद्वितीय हल प्राप्त कर सकते हैं?

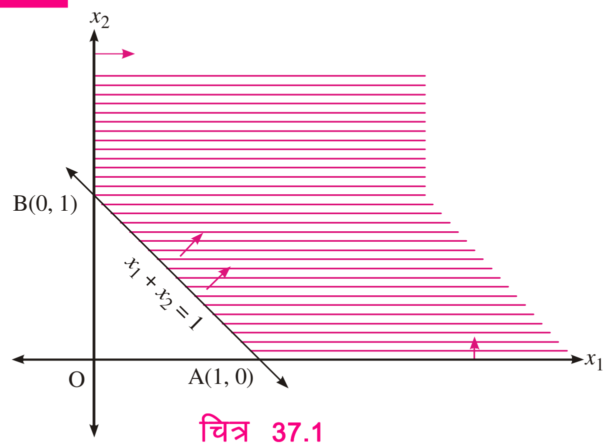
तथापि, n चरों में समीकरण निकायों के लिए अद्वितीय हल तभी प्राप्त किया जा सकता है जबकि ठीक n संबंध (समीकरण) दिए हों। जब संबंधों (समीकरणों) की संख्या n से अधिक या कम हो तो क्या होगा?

अद्वितीय हल संभव नहीं होंगे लेकिन परीक्षणीय हल (Trial solution) प्राप्त किए जा सकते हैं। फिर, यदि संबंधों की संख्या चरों की संख्या से अधिक या कम हो तथा संबंध असमिका (Inequation) के रूप में हैं, क्या हम इस प्रकार के निकायों का हल प्राप्त कर सकते हैं?

जब कभी एक समस्या का विश्लेषण, जिसमें चर को कई रैखिक असमिकाओं का पालन करते हुए एक रैखिक व्यंजक को न्यूनतम या अधिकतम बनाने को अग्रसर होता हो तो उसका हल रैखिक प्रोग्रामन कला का उपयेाग करके प्राप्त किया जा सकता है। रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं जिनमें केवल दो चर होते हैं को हल करने का तरीका ज्यामितीय तरीका है, जिसे **रैखिक प्रोग्रामन समस्या का आलेखीय हल कहते हैं।**

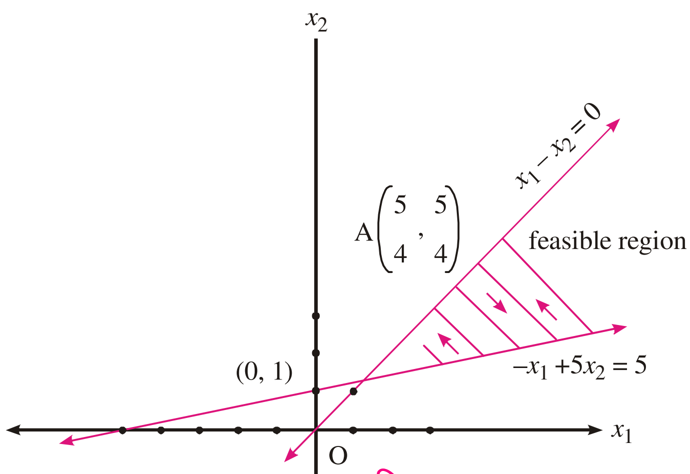
37.5 रैखिक प्रोग्रामन समस्या का हल

पिछले अनुच्छेद में हमने ऐसी समस्याओं को देखा है जिनमें संबंधों की संख्या चरों की संख्या के बराबर नहीं है तथा बहुत से संबंधों को असमिका (अर्थात् $\leq$ या $\geq$) के रूप में दर्शाया गया है जिनमें दी गई शर्तों के अन्तर्गत चरों के फलन को अधिकतम (या न्यूनतम) करना होता है।



चित्र 37.1

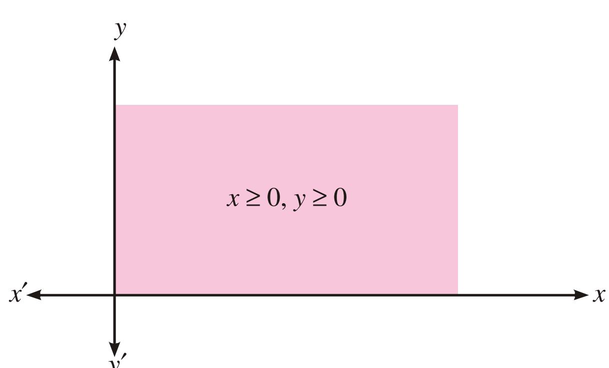
हम जानते हैं कि $x \geq 0$, y-अक्ष सहित y-अक्ष के दाईं ओर के भाग को दर्शाता है (चित्र 37.1) इसी प्रकार $y \geq 0$, x-अक्ष के उपर के भाग को दर्शाता है (चित्र 37.2)



चित्र 37.2

अब प्रश्न यह है कि ऐसी समस्याओं का हल कैसे प्राप्त किया जा सकता है?

अब प्रश्न उठता है कि एक साथ $x \geq 0$, तथा $y \geq 0$ किस भाग को प्रदर्शित करते हैं। स्पष्टतः $x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित भाग में वे सभी बिन्दु होते हैं जो दोनों $x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ में उभयनिष्ठ होते हैं। यह तल में प्रथम चतुर्थांश होगा। (चित्र 37.3)

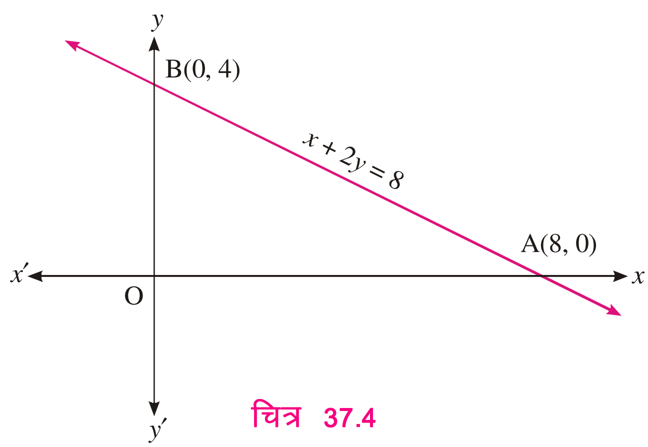


चित्र 37.3

आगे, हम असमिका $x + 2y \leq 8$ का आलेख लेते हैं। इसके लिए, पहले रेखा $x + 2y = 8$ खींचते हैं और तब वह भाग मालूम करते हैं जो $x + 2y \leq 8$ को सन्तुष्ट करता है।

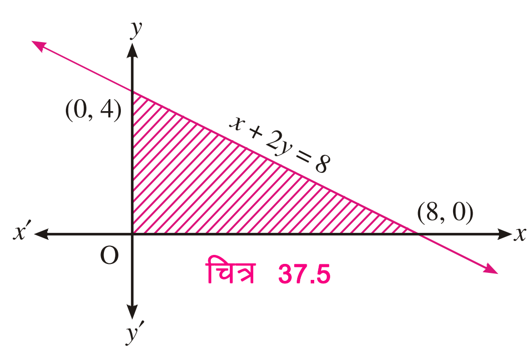
सामान्यतया, मान प्राप्त करने के लिए, हम $x = 0$ लेते हैं तथा y का इसके तुल्य मान ज्ञात करते हैं। इसी प्रकार हम $y = 0$ लेते हैं तथा इसके तुल्य x का मान ज्ञात करते हैं। (यदि रेखा दोनों अक्षों में से किसी एक के समान्तर है या मूल बिन्दु से गुजरती है तो यह विधि उपयुक्त नहीं है। इस स्थिति में हम x तथा y के कोई भी ऐसे सम्भावित मान लेते हैं, जो समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं।)

बिन्दुओं (0,4) तथा (8,0) को ग्राफ पर दर्शाकर, उन्हें सीधी रेखा से मिलाने पर हमें रेखा का आलेख प्राप्त होता है जैसाकि चित्र 37.4 में दर्शाया गया है।



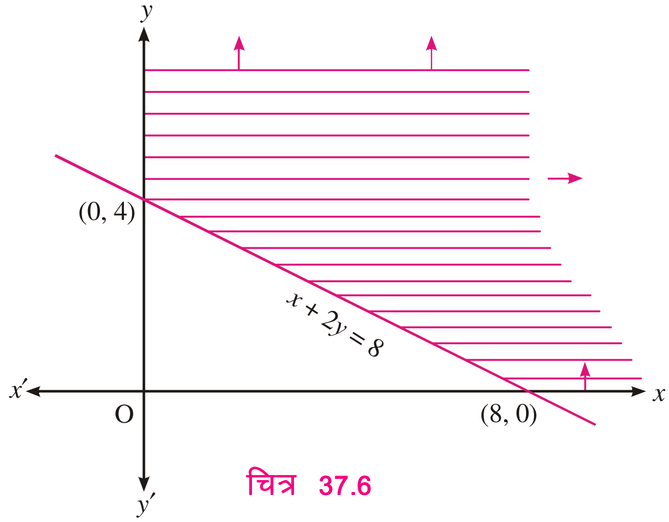
चित्र 37.4

हम पहले ही देख चुके हैं कि $x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ प्रथम चतुर्थांश को दर्शाते हैं। $x + 2y < 8$ द्वारा प्रदर्शित आलेख रेखा $x + 2y = 8$ के उस तरफ होता है जिस ओर मूल बिन्दु होता है क्योंकि इस भाग का कोई भी बिन्दु असमिका को सन्तुष्ट करता है। अतः चित्र 37.5 में छायांकित भाग $x \geq 0$, $y \geq 0$ तथा $x + 2y \leq 8$ को प्रदर्शित करता है।



चित्र 37.5

इसी प्रकार यदि हम $x \geq 0$, $y \geq 0$ तथा $x + 2y \geq 8$, से घिरा भाग लेते हैं तो यह प्रथम चतुर्थांश में होगा तथा रेखा $x + 2y = 8$ के उस तरफ होगा, जिस तरफ मूलबिन्दु स्थित नहीं है। चित्र 37.6 में छायांकित भाग आलेख को प्रदर्शित करता है।



चित्र 37.6

छायांकित भाग जिसमें दिए गए सभी प्रतिबन्ध सन्तुष्ट हो जाते हैं संभाव्य **(Feasible)** क्षेत्र कहलाता है।

37.5.1 संभाव्य (सुसंगत) (Feasible) हल

रैखिक प्रोग्रामन–समस्या के चरों के वे मान जो सभी प्रतिबन्धों तथा ऋणेतर प्रतिबन्ध को सन्तुष्ट करते हैं समस्या के **संभाव्य (feasible)** हल कहलाते हैं।

37.5.2 इष्टतम (Optimal) हल

रैखिक प्रोग्रामन समस्या के वे संभाव्य हल जो अपने वस्तुनिष्ठ फलन को अधिकतम या न्यूनतम बनाते हैं, समस्या के इष्टतम **(optimal)** हल कहलाते हैं।

टिप्पणी : *यदि कोई भी संभाव्य हल वस्तुनिष्ठ फलन को अधिकतम (या न्यूनतम) नहीं बनाता है या समस्या का संभाव्य हल नहीं है तो रैखिक प्रोग्रामन समस्या का कोई हल नहीं होता है।*

रैखिक प्रोग्रामन समस्या का आलेख–विधि से हल प्राप्त करने के लिए निम्नलिखित चरण हैं :

चरण 1 : रैखिक प्रोग्रामन समस्या का गणितीय सूत्रण करना।

चरण 2 : प्रतिबन्धित असमिकाओं का आलेख बनाना (उपर्युक्त बताई गई विधि से)।

चरण 3 : सम्भावित क्षेत्र को पहचानना जो एक साथ सभी प्रतिबन्धों को सन्तुष्ट करता हो। छोटा या बराबर ($\leq$) प्रतिबन्धों के लिए समान्यतया भाग रेखा के नीचे होता है। बड़ा या बराबर ($\geq$) प्रतिबन्धों के लिए भाग समान्यतया रेखाओं से ऊपर होता है।

चरण 4 : सम्भावित क्षेत्र में हल बिन्दुओं को स्थापित कीजिए। ये बिन्दु सम्भावित क्षेत्र के कोनों पर होते हैं।

चरण 5 : प्रत्येक कोने पर बिन्दु के लिए वस्तुनिष्ठ फलन की गणना कीजिए।

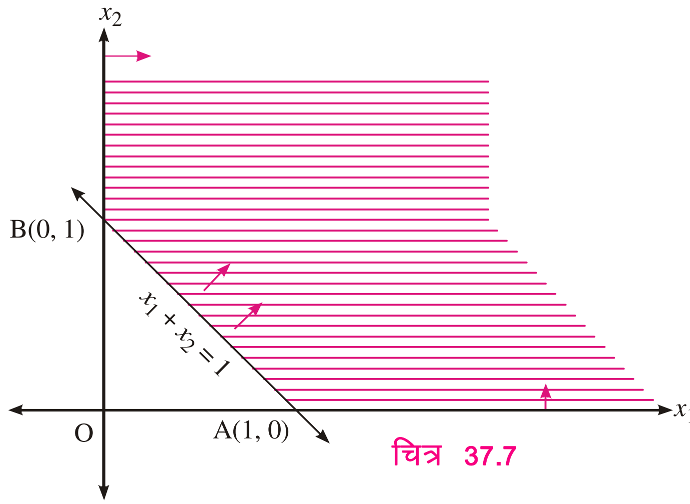
चरण 6 : वस्तुनिष्ठ फलन के इष्टतम मानों की पहचान कीजिये।

उदाहरण 37.5. राशि z का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए :

$$z = x_1 + 2x_2$$

निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



चित्र 37.7

हल : $z = x_1 + 2x_2$ वस्तुनिष्ठ फलन है, जिसका न्यूनतम मान ज्ञात करना है। निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

सर्वप्रथम हम इन असमिकाओं के लिए आलेख खींचते हैं जो इस प्रकार है :

जैसाकि हम पहले बता चुके हैं कि वह भाग जो $x_1 \geq 0$ तथा $x_2 \geq 0$ को सन्तुष्ट करता है प्रथम चतुर्थांश होता है और वह भाग जो $x_1 + x_2 \geq 1$ के साथ–साथ $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ को संतुष्ट करता है, रेखा $x_1 + x_2 = 1$ के उस ओर है जिस ओर मूल बिन्दु नहीं है। अतः छायांकित भाग सम्भावित हल होगा क्योंकि इस भाग का प्रत्येक बिन्दु सभी प्रतिबन्धों को सन्तुष्ट करता है। अब, हमको इष्टतम हल प्राप्त करना है। सम्भावित क्षेत्र के कोने A (1,0) तथा B (0,1) हैं।

A पर z का मान = 1

B पर z का मान = 2

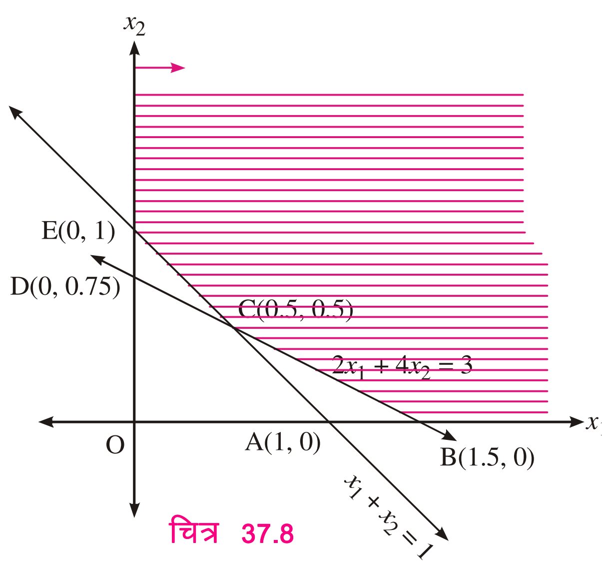
सम्भावित भाग में कोई दूसरे बिन्दु माना कि (1,1), (2,0), (0,2) लेने पर हम देखते हैं कि A (1, 0) पर z का न्यूनतम मान होता है।

उदाहरण 37.6. राशि z का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिये :

$$z = x_1 + 2x_2$$

निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$2x_1 + 4x_2 \geq 3$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



चित्र 37.8

हल : $z = x_1 + 2x_2$ वस्तुनिष्ठ फलन है, जिसका न्यूनतम मान ज्ञात करना है।

निम्न प्रतिबन्धों के अंतर्गत

$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$2x_1 + 4x_2 \geq 3$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

सर्वप्रथम हम इन असमिकाओं का आलेख खींचते हैं (जैसा पहले वर्णन किया गया है) जो इस प्रकार हैः

छायांकित भाग सम्भावित क्षेत्र है। इस क्षेत्र का प्रत्येक बिन्दु सभी गणितीय असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है और अतः ये ही सम्भावित हल हैं।

अब हमें इष्टतम हल प्राप्त करने हैं।

$B\ (1.5, 0)$ पर z का मान 1.5 है।

$C\ (0.5, 0.5)$ पर z का मान 1.5 है।

E (0,1) पर z का मान 2 है।

यदि हम रेखा $2x_1 + 4x_2 = 3$ पर B तथा C के बीच कोई बिन्दु लेते हैं तो हमें $\frac{3}{2}$ प्राप्त होता है और अन्य कहीं भी सम्भावित क्षेत्र में $\frac{3}{2}$ से अधिक प्राप्त होगा। $2x_1 + 4x_2 = 3$ पर कोई भी सम्भावित बिन्दु (B तथा C के बीच) वस्तुनिष्ठ फलन $z = x_1 + 2x_2$ को न्यूनतम बनाता है, इसका कारण है कि दोनों रेखाएँ समान्तर हैं (दोनों की प्रवणता $-\frac{1}{2}$ है)। इस प्रकार रैखिक प्रोग्रामन समस्या के अनन्त हल होंगे जिनमें से दो हल कोनों पर प्राप्त होते हैं।

उदाहरण 37.7. $z = 0.25x_1 + 0.45x_2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिये

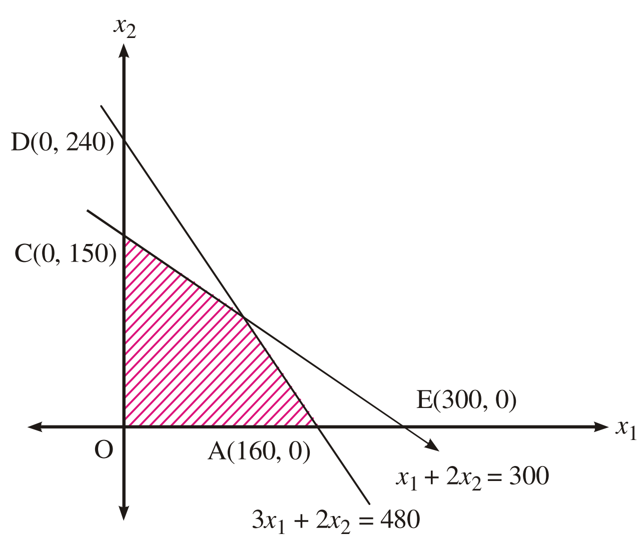
निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$$x_1 + 2x_2 \leq 300$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 480$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

हल : $z = 0.25x_1 + 0.45x_2$ वस्तुनिष्ठ फलन है जिसका अधिकतम मान प्राप्त करना है।

निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$$x_1 + 2x_2 \leq 300$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 480$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$



चित्र 37.9

सर्वप्रथम हम इन असमिकाओं का आलेख खींचते हैं जो इस प्रकार है :

N k; k8d r Hkkx $OABC$ सम्भावित क्षेत्र है। इस भाग में प्रत्येक बिन्दु सभी गणितीय असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है, अतः ये ही सम्भावित हल हैं।

अब हमें इष्टतम हल प्राप्त करना है।

A (160, 0) पर z का मान 40.00 है।

B (90, 105) पर z का मान 69.75 है।

C (0, 150) पर z का मान 67.50 है।

O (0, 0) पर z का मान 0 है।

यदि हम सम्भावित क्षेत्र से कोई दूसरे मान जैसे कि (60, 120), (80, 80) आदि लेते हैं फिर भी सम्भावित क्षेत्र के कोने B (90, 105) पर प्राप्त मान 69.75 अधिकतम मान है।

टिप्पणीः किसी रैखिक प्रोग्रामन समस्या के लिए जिसका हल सम्भव है, निम्नलिखित सामान्य नियम सत्य है।

यदि रैखिक प्रोग्रामन समस्या का एक हल है तो यह सम्भावित हलों के समूह के एक शीर्ष पर स्थित होता है, यदि रैखिक प्रोग्रामन समस्या के अनेक हल हों तो उनमें से कम–से–कम एक सम्भावित हल, हलों के समूह के एक शीर्ष पर स्थित होता है। दोनों स्थिति में वस्तुनिष्ठ फलन का अद्वितीय मान होता है।

उदाहरण 37.8. एक लघु उद्योग में एक निर्माता दो प्रकार की पुस्तक अलमारी बनाता है। पहले प्रकार की पुस्तक अलमारी को पूर्ण बनाने के लिए मशीन A पर 3 घंटे तथा मशीन B पर 2 घंटे आवश्यक होते हैं। दूसरे प्रकार की पुस्तक अलमारी के लिए मशीन A पर 3 घंटे तथा मशीन B पर 3 घंटे आवश्यक होते हैं। प्रतिदिन मशीन A अधिकतम 18 घंटे तथा मशीन B अधिकतम 14 घंटे चल सकती है। पहले प्रकार की प्रत्येक पुस्तक अलमारी पर वह 30 रुपये लाभ तथा दूसरे प्रकार की प्रत्येक पुस्तक अलमारी पर 40 रुपये लाभ कमाता है। प्रत्येक दिन वह प्रत्येक प्रकार की कितनी पुस्तक अलमारी बनाए जिससे उसे अधिकतम लाभ प्राप्त हो?

हल : माना कि निर्माता प्रत्येक दिन पहले प्रकार की x_1 पुस्तक अलमारी तथा दूसरे प्रकार की x_2 पुस्तक अलमारी बनाता है। क्योंकि x_1 तथा x_2 पुस्तक अलमारियों की संख्या है, इसलिए

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \qquad \cdots \textbf{(1)}$$

क्योंकि पहले प्रकार की पुस्तक अलमारी के लिए मशीन A पर 3 घंटे आवश्यक है। अतः x_1 पुस्तक अलमारियों के लिए मशीन A पर $3x_1$ घंटे आवश्यक होंगे। दूसरे प्रकार की पुस्तक अलमारियों के लिए मशीन A पर 3 घंटे आवश्यक है। अतः x_2 पुस्तक अलमारियों के लिए मशीन A पर $3x_2$ घंटे आवश्यक होंगे। लेकिन मशीन A की प्रतिदिन कार्य क्षमता अधिक–से–अधिक 18 घंटे हैं। अतः

$$3x_1 + 3x_2 \leq 18$$

या $x_1 + x_2 \le 6$ ... **(2)**

इसी प्रकार, मशीन B पर पहले प्रकार की पुस्तक अलमारी 2 घंटे तथा दूसरे प्रकार की पुस्तक अलमारी 3 घंटे लेती है। मशीन की प्रतिदिन कार्यक्षमता अधिक–से–अधिक 14 घंटे हैं। अतः

$2x_1 + 3x_2 \le 14$ ... **(3)**

प्रतिदिन का लाभ

$z = 30x_1 + 40x_2$ ... **(4)**

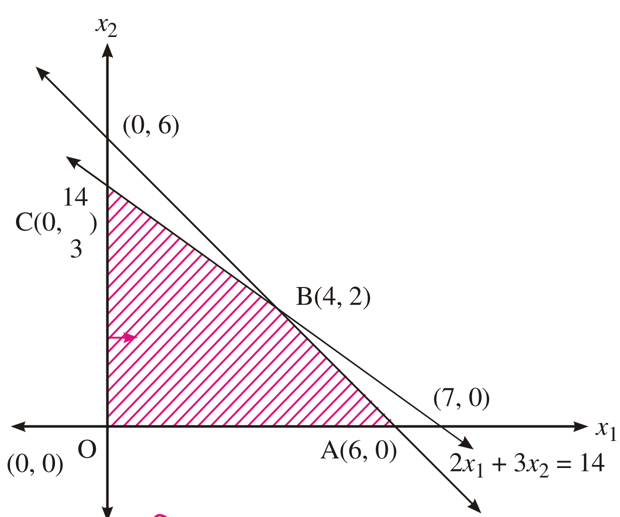
अब हमें x_1 तथा x_2 के मान ज्ञात करने हैं जिससे कि z का अधिकतम मान प्राप्त हो।

अधिकतम $z = 30x_1 + 40x_2$ (वस्तुनिष्ठ फलन)

निम्न शर्तों के अन्तर्गत :

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{array}\right\} \text{प्रतिबन्ध}$$

इस समस्या का हल प्राप्त करने के लिए हम आलेखीय विधि प्रयोग करते हैं। सर्वप्रथम हम इन असमिकाओं के आलेख खींचते हैं जो निम्न प्रकार हैं :



चित्र 37.10

छायांकित भाग OABC सम्भावित क्षेत्र है। इस क्षेत्र में प्रत्येक बिन्दु सभी गणितीय असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है अतः ये ही सम्भावित हल हैं।

हम जानते हैं कि कोनों O (0, 0), A (6, 0). तथा B (4,2) पर इष्टतम हल प्राप्त किए जा सकते हैं। क्योंकि C के निर्देशांक पूर्णांक नहीं हैं, अतः हम इस बिन्दु पर विचार नहीं करते हैं। रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु B के निर्देशांकों की गणना की जा सकती है।

बिन्दु O पर लाभ शून्य है।

A पर लाभ $= 30 \times 6 + 40 \times 0$

$= 180$

B पर लाभ $= 30 \times 4 + 40 \times 2$

$= 120 + 80$

$= 200$

इस प्रकार, यदि निर्माता पहले प्रकार की 4 पुस्तक अलमारियाँ तथा दूसरे प्रकार की 2 पुस्तक अलमारियाँ बनाता है तो वह 200 रुपये का अधिकतम लाभ प्राप्त करता है।

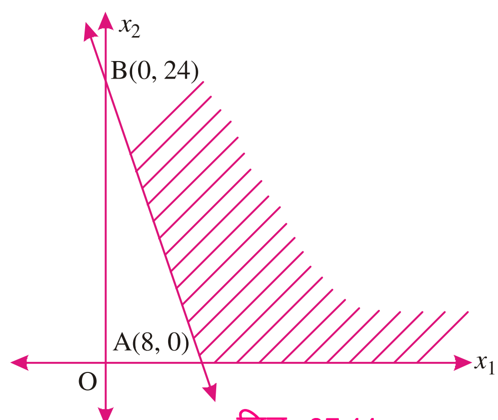
उदाहरण 37.9. उदाहरण 37.2 को आलेखीय विधि से हल कीजिए।

हल : उदाहरण 37.2 से,

न्यूनतम $z = 6000\,x_1 + 4000\,x_2$ (वस्तुनिष्ठ फलन)

निम्न शर्तों के अन्तर्गत :

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 \geq 24 \\ x_1 + x_2 \geq 16 \\ x_1 + 3x_2 \geq 24 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \text{(प्रतिबन्ध)}$$



चित्र 37.11

स्पष्टतया, प्रथम चतुर्थांश में कोई बिन्दु (x_1, x_2) प्रतिबन्ध $x_1 \geq 0$, तथा $x_2 \geq 0$, को सन्तुष्ट करता है। अब, हम रेखाओं को ग्राफ पर खींचते हैं :

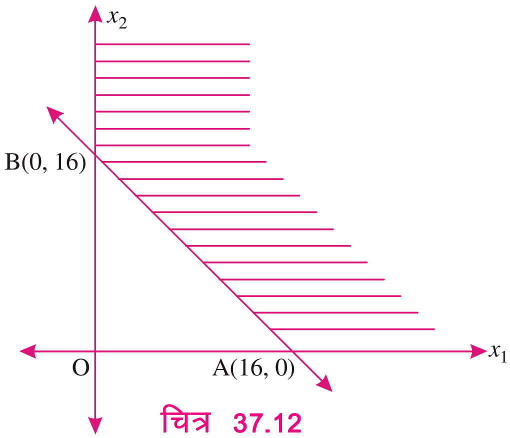
$$3x_1 + x_2 = 24$$

या $$\frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{24} = 1$$

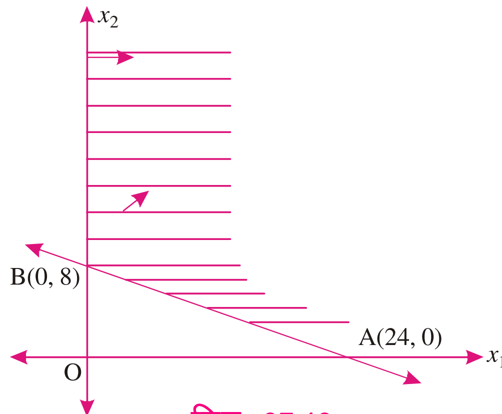
रेखा $3x_1 + x_2 = 24$ पर कोई भी बिन्दु प्रतिबन्ध $3x_1 + x_2 \geq 24$ को सन्तुष्ट करता है (चित्र 37.11)

इसी प्रकार कोई भी बिन्दु जो रेखा $x_1 + x_2 = 16$ पर हो या इसके ऊपर हो, प्रतिबन्ध $x_1 + x_2 \geq 16$ को सन्तुष्ट करता है (चित्र 37.12)

पुनः कोई भी बिन्दु जो रेखा $x_1 + 3x_2 = 24$ पर या इसके ऊपर है प्रतिबन्ध $x_1 + 3x_2 \geq 24$ को सन्तुष्ट करता है (चित्र 37.13)



चित्र 37.12

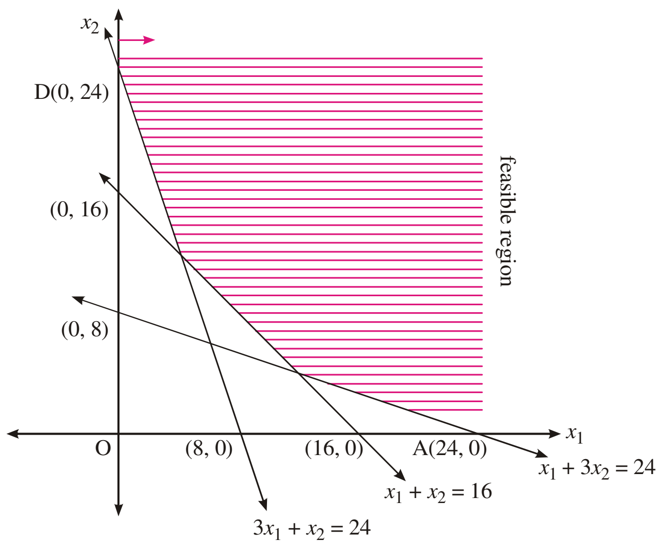


चित्र 37.13

अतः उपरोक्त सभी चित्रों को मिलाकर हम उभयनिष्ठ छायांकित असीमित क्षेत्र प्राप्त करते हैं। (चित्र 37.14)

बिन्दुओं A (24,0), B(12,4), C(4,12) तथा D(0,24) में से एक बिन्दु पर

$z = 6000x_1 + 4000x_2$ का न्यूनतम मान होगा।



चित्र 37.14

A पर, $z = 6000 \times 24 + 0$

$= 144000$

B पर, $z = 6000 \times 12 + 4000 \times 4$

$= 88000$

C पर, $z = 6000 \times 4 + 4000 \times 12 = 72000$

D पर, $z = 0 + 4000 \times 24 = 96000$

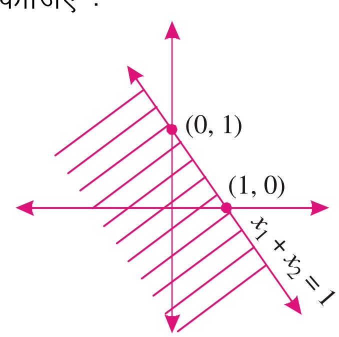
अतः हम देखते हैं कि C (4, 12) पर z का न्यूनतम मान है जहाँ $x_1 = 4$ तथा $x_2 = 12$.

अतः न्यूनतम मूल्य के लिए, कम्पनी को यंत्र P, 4 दिन तथा यंत्र Q, 12 दिन चलाना चाहिए। न्यूनतम मूल्य 72000 रु. होगा।

उदाहरण 37.10. राशि $z = x_1 + 2x_2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए :

निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$$x_1 + x_2 \geq 1,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$



हल : सर्वप्रथम हम प्रतिबन्धों

$$x_1 + x_2 \geq 1,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

के आलेख खींचते हैं।

छायांकित क्षेत्र सम्भावित हल का समुच्चय है। अब हमें वस्तुनिष्ठ फलन को अधिकतम करना है।

$A(1, 0)$ पर z का मान 1 है।

$B(0, 1)$ पर z का मान 2 है।

यदि हम सम्भावित क्षेत्र से कोई दूसरे बिन्दु जैसे $(1, 1)$ या $(2, 3)$ या $(5, 4)$ आदि लें और इनके लिए z के मान ज्ञात करें तो हमें मालूम होता है कि हर बार एक बिन्दु के लिए पहले वाले बिन्दु की अपेक्षा बड़ा मान प्राप्त होता है। अतः कोई भी सम्भावित बिन्दु z का अधिकतम मान नहीं बनाता है। क्योंकि ऐसा कोई सम्भावित बिन्दु नहीं है जो z का मान अधिकतम बनाए। अतः हम यह मान लेते हैं कि इस रैखिक प्रोग्रामन समस्या का कोई हल नहीं है।

उदाहरण 37.11. निम्नलिखित प्रश्न को आलेखीय विधि से हल कीजिए :

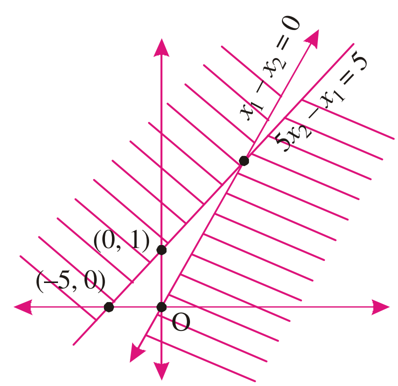
$$z = 2x_1 - 10x_2 \text{ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए,}$$

निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$$x_1 - x_2 \geq 0$$
$$x_1 - 5x_2 \leq -5$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

हल : पहले हम निम्न प्रतिबन्धों के आलेख खींचते हैं :

$$\begin{array}{lcl} x_1 - x_2 \geq 0 & & x_2 - x_1 \leq 0, \\ x_1 - 5x_2 \leq -5 & \text{या} & 5x_2 - x_1 \geq 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 & & x_1 - x_2 = 0 \end{array}$$



छायांकित भाग सम्भावित क्षेत्र है।

यहाँ हम देखते हैं कि सम्भावित क्षेत्र एक तरफ से असीमित है।

परन्तु चित्र से यह स्पष्ट है कि वस्तुफलन बिन्दु A पर न्यूनतम मान प्राप्त करता है जो दो रेखाओं $x_1 - x_2 = 0$ तथा $-x_1 + 5x_2 = 5.$ का प्रतिच्छेद बिन्दु है। इन्हें हल करने पर $x_1 = x_2 = \frac{5}{4}$ प्राप्त होता है।

अतः जब $x_1 = \frac{5}{4},\ x_2 = \frac{5}{4}$, तब z का मान न्यूनतम होता है।

न्यूनतम मान $= 2 \times \frac{5}{4} - 10 \times \frac{5}{4} = -10$ है।

टिप्पणी: *इन प्रतिबन्धों से यदि हम z का अधिकतम मान प्राप्त करना चाहें, तो यह सम्भव नहीं है क्योंकि सम्भावित क्षेत्र एक तरफ से खुला (असीमित) है।*

देखें आपने कितना सीखा 37.2

निम्नलिखित प्रश्नों को आलेखीय विधि से हल कीजिए :

1. $z = 3x_1 + 4x_2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$$x_1 + x_2 \le 40$$
$$x_1 + 2x_2 \le 60$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

2. $z = 2x_1 + 3x_2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$$x_1 + x_2 \le 400$$
$$2x_1 + x_2 \le 600$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

3. $z = 60x_1 + 40x_2$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए, निम्न प्रतिबन्धों के अर्न्गत

$$3x_1 + x_2 \ge 24$$
$$x_1 + x_2 \ge 16$$
$$x_1 + 3x_2 \ge 24$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

4. $z = 20x_1 + 30x_2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए निम्न प्रतिबन्धों के अर्न्गत

$$x_1 + x_2 \le 12,$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 50$$
$$x_1 + 3x_2 \le 30,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

5. $z = 50x_1 + 15x_2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$$5x_1 + x_2 \le 100$$
$$x_1 + x_2 \le 60$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

6. $z = 4000x_1 + 7500x_2$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$$4x_1 + 3x_2 \ge 40$$
$$2x_1 + 3x_2 \ge 8$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

आइये दोहराएँ

- रैखिक प्रोग्रामन–गणितज्ञों द्वारा इष्टतम प्रश्नों को हल करने के लिए अपनाई गई तकनीक है।
- रैखिक प्रोग्रामन समस्या के चरों के मानों का एक समुच्चय जो दिए गए प्रतिबन्धों और ऋणेतर प्रतिबन्ध को संतुष्ट करता है, **सम्भावित हल** कहलाता है।
- रैखिक प्रोग्रामन समस्या का एक सम्भावित मान जो अपने वस्तुनिष्ठ फलन का इष्टतम मान देता है समस्या का **इष्टतम हल** कहलाता है।
- यदि कोई भी सम्भावित हल वस्तुनिष्ठ फलन का अधिकतम (या न्यूनतम) मान नहीं है या उसके सम्भावित हल नहीं हैं तो रैखिक प्रोग्रामन समस्या का कोई भी हल नहीं होगा।
- यदि रैखिक प्रोग्रामन समस्या का एक हल है तो यह सम्भावित क्षेत्र के कोने पर स्थित होता है।

- यदि रैखिक प्रोग्रामन समस्या के अनेक हल हैं तो उनमें से कम–से–कम एक हल सम्भावित क्षेत्र के कोने पर स्थित होता है। लेकिन सभी स्थितियों में वस्तुनिष्ठ फलन का मान वही रहता है।

सहायक वेबसाइट

- *http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/morelp.html*
- *http://en.wikipedia.org/wiki/Simplex_algorithm*
- *http://www.youtube.com/watch?v=XbGM4LjM52k*

आइए अभ्यास करें

1. एक व्यापारी के पास चावल और गेहूँ खरीदने के लिए केवल ₹ 15,000 हैं। चावल के एक बोरे का मूल्य ₹ 1,500 तथा गेहूँ के एक बोरे का मूल्य ₹ 1,200 है। उसके पास केवल 10 बोरे रखने के लिए जगह उपलब्ध है। व्यापारी चावल और गेहूँ के प्रत्येक बोरे पर क्रमशः ₹ 100 तथा ₹ 80 लाभ प्राप्त करता है। अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाइए।

2. एक व्यापारी के पास ₹ 6,00,000 हैं। व्यापार चालू करने के लिए वह गाय तथा भैंस खरीदना चाहता है। एक गाय का मूल्य ₹ 20,000 तथा एक भैंस का मूल्य ₹ 60,000 है। वह आदमी प्रत्येक सप्ताह 40 क्विंटल तक पशुओं के लिए चारा एकत्रित कर सकता है। एक गाय प्रति दिन 10 लीटर दूध तथा एक भैंस प्रतिदिन 20 लीटर दूध देती है। गाय के प्रत्येक लीटर दूध पर ₹ 5 लाभ तथा भैंस के प्रत्येक लीटर दूध पर ₹ 7 लाभ होता है। प्रत्येक सप्ताह एक गाय पर एक क्विंटल चारा तथा एक भैंस पर 2 क्विंटल चारा प्रयुक्त होता है। अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए उस व्यक्ति द्वारा खरीदे गए प्रत्येक प्रकार के पशुओं की संख्या ज्ञात करने के लिए रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाइए। मान लीजिए कि पशुओं से प्राप्त पूरे दूध को वह बेच सकता है।

3. एक कारखाने में दो प्रकार के साबुन बनते हैं जिनमें प्रत्येक दो मशीनों A तथा B से बनता है। पहले प्रकार के साबुन को बनाने के लिए मशीन A दो मिनट तथा मशीन B तीन मिनट चलाई जाती है। दूसरे प्रकार के साबुन को बनाने के लिए मशीन A तीन मिनट तथा मशीन B पाँच मिनट चलाई जाती है। प्रत्येक मशीन एक दिन में अधिक–से–अधिक 8 घंटे चलाई जा सकती है। दोनों प्रकार के साबुन क्रमशः 25 पैसे तथा 50 पैसे के लाभ पर बेचे जाते हैं। मान लीजिए कि निर्माता सभी बने हुए साबुनों को बेच सकता है। कारखाने में प्रतिदिन प्रत्येक प्रकार के कितने साबुन बनाए जाने चाहिएँ, जिससे कि अधिकतम लाभ प्राप्त हो। समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाइए।

4. दो ऐसी ऋणेतर परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिये, जिनका योग अधिकतम हो यदि उनका अन्तर चार है तथा पहली संख्या के तीन गुने और दूसरी संख्या का योग 9 के बराबर या उससे कम है। समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाइए।

5. दो विभिन्न प्रकार के आहारों E तथा F में विटामिन A तथा B पाये जाते हैं। आहार E की प्रत्येक इकाई में 2 इकाई विटामिन A तथा 3 इकाई विटामिन B की हैं। आहार F की प्रत्येक इकाई में 4 इकाई विटामिन A तथा 2 इकाई विटामिन B की है। आहार E तथा F की प्रत्येक इकाई का मूल्य क्रमशः 5.00 रुपये तथा 2.50 रुपये है। एक व्यक्ति के लिए प्रत्येक दिन विटामिन A तथा B की क्रमशः न्यूनतम 40 इकाई तथा 50 इकाई की आवश्यकता होती है। मान लीजिए कि विटामिन A तथा B की प्रतिदिन की न्यूनतम आवश्यकता से अधिकता हानिकारक नहीं है। न्यूनतम मूल्य पर आहार E तथा F का उचित मिश्रण ज्ञात कीजिए जिससे विटामिन A तथा B की प्रतिदिन की न्यूनतम आवश्यकता की पूर्ति होती हो। इसे रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाइए।

6. एक मशीन उत्पादों A तथा B में से प्रत्येक का उत्पादन कर सकती है। A के उत्पादन के लिए 2 इकाई रसायन तथा 1 इकाई यौगिक प्रयुक्त होते हैं और B के उत्पादन के लिए 1 इकाई रसायन तथा 2 इकाई यौगिक प्रयुक्त होते हैं। केवल 800 इकाई रसायन तथा 1000 इकाई यौगिक उपलब्ध हैं। उत्पादों A तथा B की प्रति इकाई पर क्रमशः 30 रुपये तथा 20 रुपये लाभ मिलता है। कुल लाभ को अधिकतम बनाने के लिए A तथा B के बीच इकाइयों का इष्टतम नियतन प्राप्त कीजिए।

7. निम्नलिखित प्रश्नों को आलेखीय विधि से हल कीजिए :

(a) अधिकतम $z = 25x_1 + 20x_2$

निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$3x_1 + 6x_2 \le 50$
$x_1 + 2x_2 \le 10$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

(b) अधिकतम $z = 9x_1 + 10x_2$

निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$11x_1 + 9x_2 \le 9900$
$7x_1 + 12x_2 \le 8400$
$3x_1 + 8x_2 \le 4800$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

(c) अधिकतम $z = 22x_1 + 18x_2$

निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$x_1 + x_2 \le 20,$
$3x_1 + 2x_2 \le 48$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

मॉड्यूल - X

रैखिक प्रोग्रामन एवं गणितीय विवेचन

टिप्पणी

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 37.1

1. $z = 3x_1 + 8x_2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिये

   निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

   $3x_1 + 4x_2 \leq 18$

   $4x_1 + 5x_2 \leq 21$

   $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

2. $z = 50x_1 + 15x_2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिये

   निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

   $5x_1 + x_2 \leq 100$

   $x_1 + x_2 \leq 60$

   $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

3. $z = 4000x_1 + 7500x_2$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिये

   निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

   $4x_1 + 3x_2 \geq 40$

   $2x_1 + 3x_2 \geq 8$

   $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

4. $z = 5x_1 + 4x_2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिये

   निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

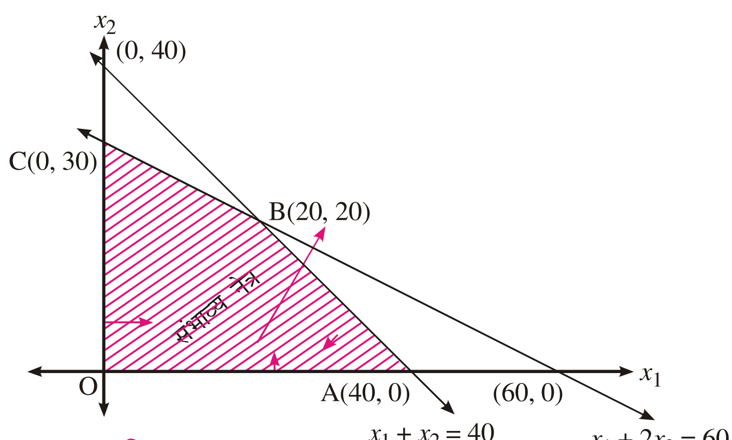
   $1.5x_1 + 2.5x_2 \leq 80$

   $2x_1 + 1.5\ x_2 \leq 70$

   $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

देखें आपने कितना सीखा 37.2

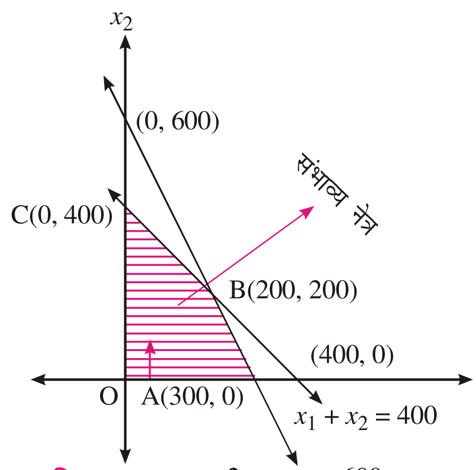
1.



चित्र 37.17

$B(20,20)$ पर अधिकतम $z = 140$

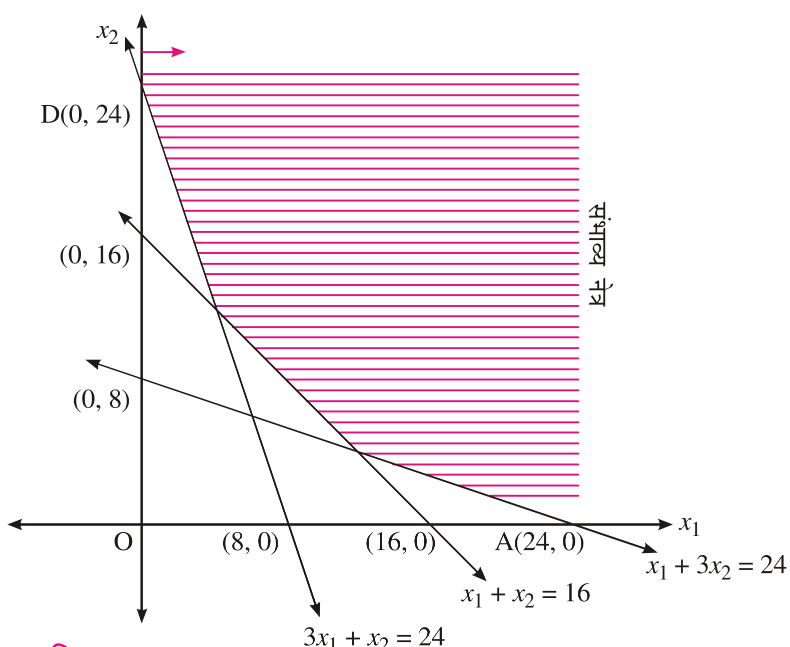
2.



चित्र 37.18

$C(0,400)$ पर अधिकतम $z = 1200$

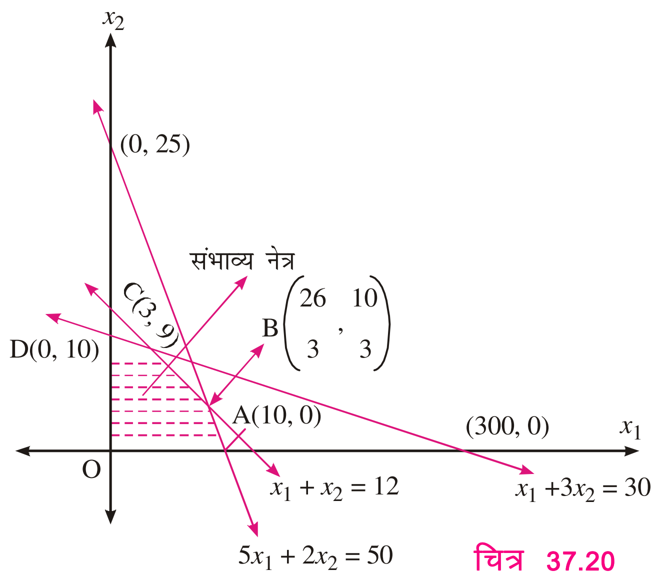
3.



चित्र 37.19

$C(4,12)$ पर न्यूनतम $z = 720$. $x_1 = 4$, $x_2 = 12$

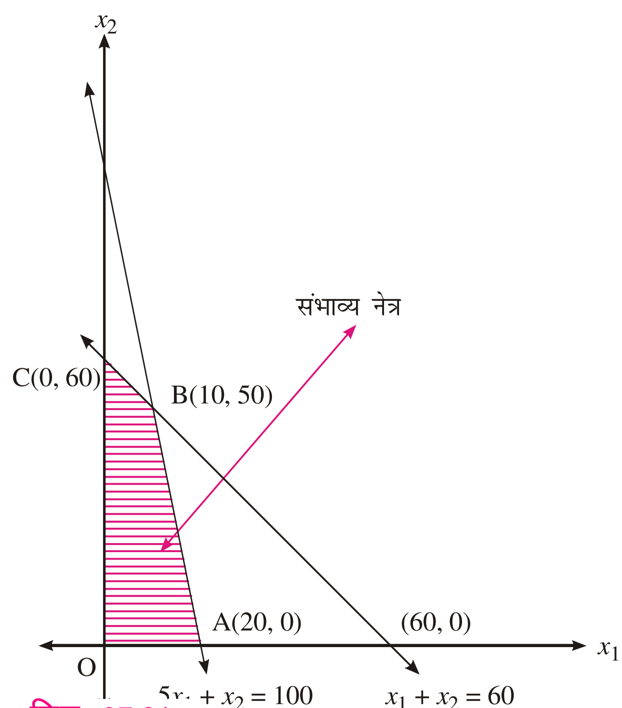
4.



चित्र 37.20

$C(3,9)$ पर अधिकतम $z = 330$; $x_1 = 3$, $x_2 = 9$

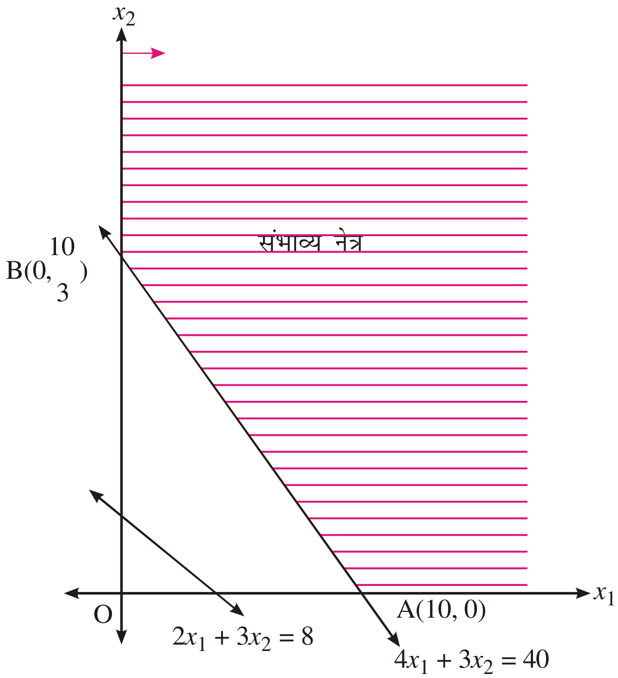
5.



चित्र 37.21

$B(10,50)$ पर अधिकतम $z = 1250$ $x_1 = 10$, $x_2 = 50$

6.



चित्र 37.22

A (10,0) पर अधिकतम z = 40,000; $x_1 = 10$, $x_2 = 0$

आइए अभ्यास करें

1. $z = 100x_1 + 80x_2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए

   निम्न शर्तों के अन्तर्गत

   $5x_1 + 4x_2 \le 50$
   $x_1 + x_2 \le 10$
   $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

2. $z = 150x_1 + 980x_2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए

   निम्न शर्तों के अन्तर्गत

   $x_1 + 3x_2 \le 30$
   $7x_1 + 14x_2 \le 40$
   $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

3. $z = 25x_1 + 50x_2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए

निम्न शर्तों के अन्तर्गत

$2x_1 + 3x_2 \leq 480$
$3x_1 + 5x_2 \leq 480$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

4. $z = x_1 + x_2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए

निम्न शर्तों के अन्तर्गत

$x_1 - x_2 \geq 4$
$3x_1 + x_2 \leq 9$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

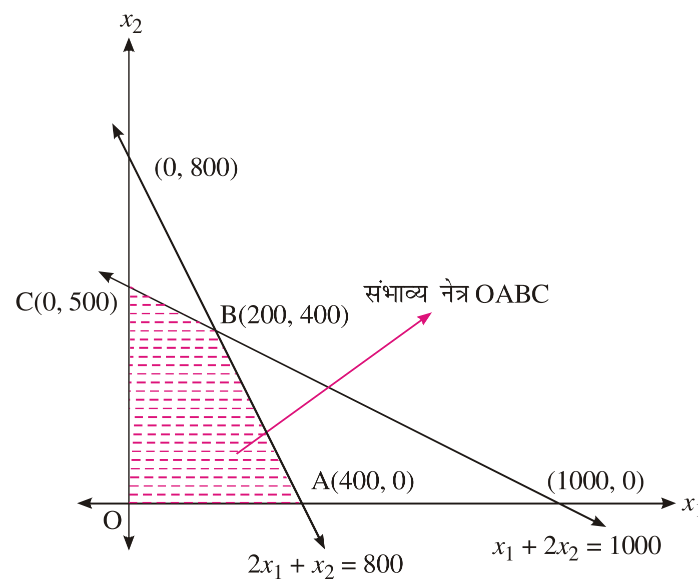
5. $z = 5x_1 + 2.5x_2$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए

निम्न शर्तों के अन्तर्गत

$x_1 + 2x_2 \geq 20$
$3x_1 + 2x_2 \geq 50$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

6. $z = 30x_1 + 20x_2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए
प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

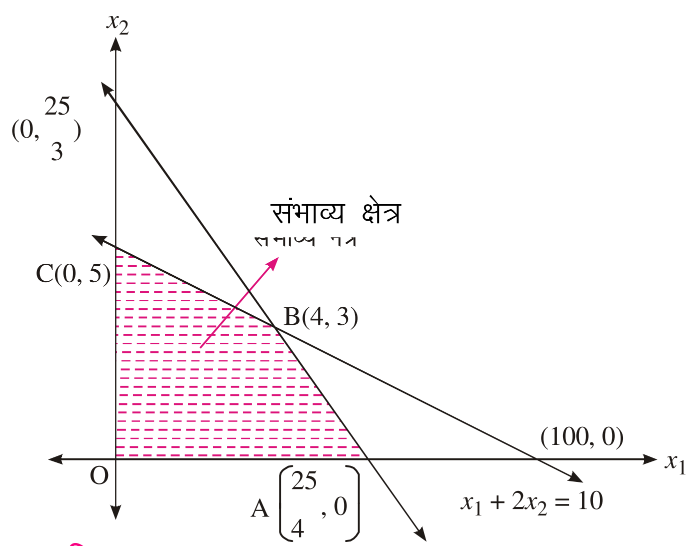
$2x_1 + x_2 \leq 800$
$x_1 + 2x_2 \leq 1000$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$



चित्र 37.23

B (200, 400) पर अधिकतम $z = 14000; x_1 = 200, x_2 = 400$

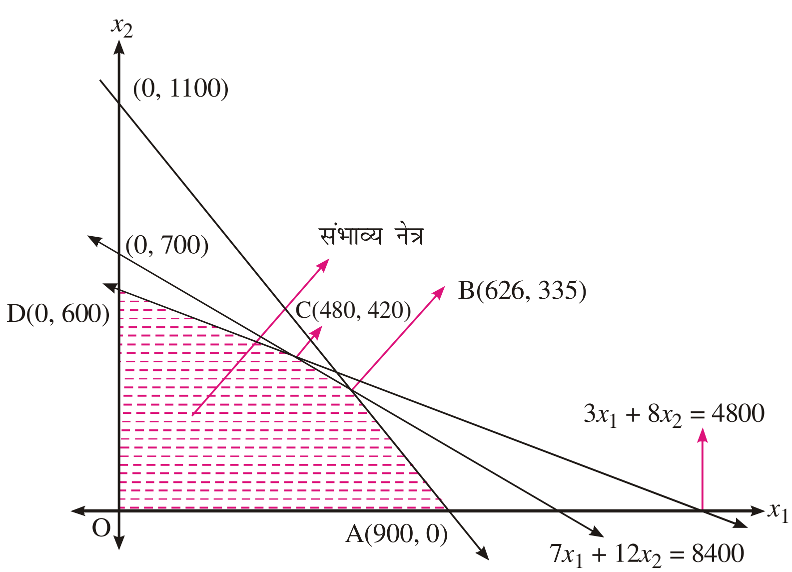
7. (a)



चित्र 37.24

B (4, 3) पर अधिकतम z = 160, $x_1 = 4$ $x_2 = 3$

(b)

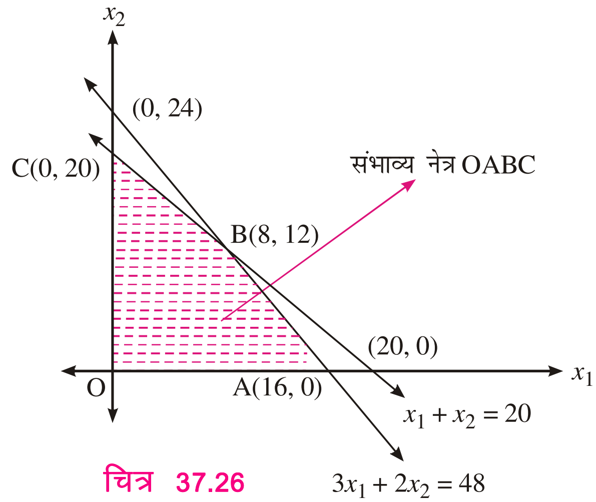


चित्र 37.25

A (900,0) D(0,600) B (626, 335), O(0, 0) तथा C (480, 420)

B (626, 335) पर अधिकतम z = 8984; $x_1 = 626$, $x_2 = 335$

(c)



चित्र 37.26

B (8, 12) पर अधिकतम $z = 392, x_1 = 8, x_2 = 12$