

## गणितीय विवेचन



### 38.1 गणितीय विवेचन

इस अध्याय में हम गणितीय विवेचन से संबंधित कुछ मौलिक धारणाओं को सीखेंगे और विवेचन की प्रक्रिया की चर्चा विशेष रूप से गणित के संदर्भ में करेंगे। गणितीय भाषा में विवेचन दो प्रकार के होते हैं (i) आगमनात्मक (आगमिक) विवेचन (ii) निगमनात्मक (निगमनिक) विवेचन

आगमनात्मक विवेचन की चर्चा हम गणितीय आगमन में पहले ही कर चुके हैं। प्रस्तुत अध्याय में हम कुछ मूलभूत निगमनात्मक विवेचन पर चर्चा करेंगे।

### 38.2 कथन (अथवा साध्य)

गणितीय विवेचन की मौलिक इकाई गणितीय कथन की संकल्पना है।

एक वाक्य गणितानुसार कथन कहलाता है, यदि वह या तो सत्य है अथवा असत्य है परन्तु दोनों (सत्य एवं असत्य) न हो।

यदि कोई कथन सत्य है, तो वह वैध कथन कहलाता है और असत्य कथन को अमान्य कथन कहते हैं।

1 निम्नलिखित दो वाक्यों पर विचार कीजिए :

3 और 4 का योग 6 है

2 और 3 का योग 5 है।

इन वाक्यों को पढ़कर हम तुरन्त निर्णय कर सकते हैं कि प्रथम वाक्य गलत है और द्वितीय सही है। इनके बारे में कोई भ्रम नहीं है। इस तरह के वाक्यों को गणित में कथन कहते हैं।

1 अब निम्नलिखित वाक्यों पर चर्चा करते हैं :

गणित एक कौतुक है।

जो व्यक्ति गणित को पसन्द करते हैं उनके लिए यह एक कौतुक है जबकि अन्य किसी व्यक्ति के लिए यह असत्य हो सकता है। इसलिए दिया हुआ वाक्य सत्य और असत्य दोनों प्रकार का है। इसलिए यह वाक्य कथन नहीं है।

1 निम्नलिखित वाक्यों की चर्चा करते हैं :

(i) चन्द्रमा, पृथ्वी के इर्द-गिर्द घूमता है।

(ii) प्रत्येक वर्ग आयत होता है।

## मॉड्यूल - X

रैखिक प्रोग्रामन  
एवं गणितीय  
विवेचन

टिप्पणी

- (iii) सूर्य एक तारा है।
- (iv) प्रत्येक आयत एक वर्ग है।
- (v) नई दिल्ली पाकिस्तान में है।

इन सभी वाक्यों को पढ़कर हम कह सकते हैं कि प्रथम, द्वितीय एवं तृतीय वाक्य सत्य हैं। जबकि चौथा और पाँचवा वाक्य असत्य हैं। इसलिए इनमें से प्रत्येक वाक्य एक कथन है।

- निम्नलिखित वाक्यों पर चर्चा करते हैं :

- (i) मुझे एक गिलास पानी दीजिए
- (ii) बिजली शुरू कर दीजिए
- (iii) आप कहां जा रहे हैं?
- (iv) आप कैसे हैं?
- (v) कितना सुन्दर।
- (vi) भगवान् आपको लम्बी आयु प्रदान करें।
- (vii) कल बुधवार है।

उपर्युक्त वाक्यों में से किसी की भी सत्यता के विषय में निर्णय नहीं लिया जा सकता, इसलिए ये वाक्य कथन नहीं हैं।

**उदाहरण 38.1.** जाँचिए कि क्या निम्नलिखित वाक्य कथन हैं? अपने उत्तर के लिए कारण बताइए।

- (i) 12, 16 से छोटा है।
- (ii) प्रत्येक समुच्चय परिमित होता है।
- (iii)  $x + 5 = 11$ .
- (iv) बादलों के बिना कभी भी वर्षा नहीं होती
- (v) सभी पूर्णांक प्राकृत संख्याएं भी हैं।
- (vi) यहाँ से आगरा कितनी दूरी पर है?
- (vii) क्या आप कानपुर जा रहे हैं?
- (viii) सभी गुलाब सफेद होते हैं?

**हल :** (i) यह वाक्य सत्य है क्योंकि  $12 < 16$  है इसलिए यह वाक्य एक कथन है।

(ii) यह वाक्य असत्य है क्योंकि सभी समुच्चय परिमित नहीं होते। अतः यह वाक्य एक कथन है।

(iii)  $x + 5 = 11$  एक मुक्त वाक्य है। इसकी सत्यता तब तक नहीं जाँची जा सकती जब तक  $x$  का मान न दिया हुआ हो। इसलिए यह वाक्य कथन नहीं है।

(iv) यह वैज्ञानिक रूप से प्रमाणित प्राकृतिक तथ्य है कि वर्षा होने से पहले बादल बनते हैं। इसलिए यह वाक्य सदैव सत्य है। इसलिए यह एक कथन है।

(v) यह वाक्य असत्य है क्योंकि सभी पूर्णांक, प्राकृत संख्याएं नहीं होती। इसलिए यह एक कथन है।

(vi) यह प्रश्नवाचक वाक्य है। अतः यह कथन नहीं है।

(vii) इस वाक्य के लिए हमारे पास कोई निश्चित उत्तर नहीं हो सकता। इसलिए यह वाक्य कथन नहीं है।

(viii) यह वाक्य असत्य है क्योंकि सभी गुलाब सफेद नहीं होते। अतः यह एक कथन है।



देखें आपने कितना सीखा 38.1

1. निम्नलिखित में से कौन-सा वाक्य कथन है। अपने उत्तर का कारण भी लिखिए।
  - (i) आज एक तूफानी दिन है।
  - (ii) एक महीने में 40 दिन होते हैं।
  - (iii) 6 तथा 8 का योग 12 से बड़ा है।
  - (iv) एक संख्या का वर्ग सम संख्या होती है।
  - (v) गणित एक कठिन विषय है।
  - (vi) सभी वास्तविक संख्याएं सम्मिश्र संख्याएं होती हैं
  - (vii)  $-2$  और  $-5$  का गुणनफल  $-10$  है।
  - (viii) एक वर्ष में 14 महीने होते हैं।
  - (ix) वास्तविक संख्या 4,  $x$  से छोटी है।
  - (x) मोहन, मेरी बात सुनिए!
  - (xi) क्या सभी वृत्त गोल होते हैं?
  - (xii) सभी त्रिभुजों की तीन भुजाएं होती हैं।

38.3 किसी कथन का निषेधन

किसी कथन को नकारना उस कथन का निषेधन कहलाता है।

आइए निम्नलिखित कथन की चर्चा करते हैं :

$P$  : नई दिल्ली एक शहर है।

इस कथन का निषेधन निम्नलिखित प्रकार हो सकता है।

यह वस्तु स्थिति नहीं है कि नई दिल्ली एक शहर है

अथवा

यह असत्य है कि नई दिल्ली एक शहर है

अथवा

नई दिल्ली एक शहर नहीं है।

यदि  $p$  एक कथन है तो  $p$  का निषेधन भी एक कथन है और इसे  $\sim p$  से व्यक्त किया जाता है और इसे “ $p$  नहीं” पढ़ते हैं।

**उदाहरण 38.2.** निम्नलिखित कथनों का निषेधन लिखिए।

- (i) 2 तथा 3 का योग 6 है।
- (ii)  $\sqrt{7}$  एक परिमेय संख्या है
- (iii) आस्ट्रेलिया एक महाद्वीप है
- (iv) संख्या 8 संख्या 5 से छोटी है

**हल :** (i)  $P$  : 2 तथा 3 का योग 6 है।

$\sim P$  : 2 तथा 3 का योग 6 नहीं है।



## मॉड्यूल - X

रैखिक प्रोग्रामन  
एवं गणितीय  
विवेचन

टिप्पणी

- (ii)  $q$  :  $\sqrt{7}$  एक परिमेय संख्या है।  
 $\sim q$  :  $\sqrt{7}$  एक परिमेय संख्या नहीं है।
- (iii)  $r$  : आस्ट्रेलिया एक महाद्वीप है।  
 $\sim r$  : आस्ट्रेलिया एक महाद्वीप नहीं है।
- (iv)  $S$  : संख्या 8 संख्या 5 से छोटी है।  
 $\sim S$  : संख्या 8 संख्या 5 से छोटी नहीं है।

अथवा

यह असत्य है कि संख्या 8 संख्या 5 से छोटी है।

## 38.4 मिश्र कथन (संयुक्त कथन)

गणितीय विवेचन में, व्यापकतः दो प्रकार के कथन होते हैं।

- (1) **साधारण कथन:** ऐसा कथन जिसे दो अथवा अधिक कथनों में विभाजित नहीं किया जा सकता, साधारण कथन कहलाता है। उदाहरण के लिए :
- (i) प्रत्येक समुच्चय परिमित होता है।  
(ii) नई दिल्ली, भारत की राजधानी है।  
(iii) गुलाब सफेद होते हैं।  
(iv)  $\sqrt{2}$  एक अपरिमेय संख्या है।  
(v) वास्तविक संख्याओं का समुच्चय एक अपरिमित समुच्चय है।
- (2) **मिश्र कथन:** ऐसा कथन जो दो अथवा अधिक साधारण कथनों के संयोजन से बनता है, मिश्र कथन कहलाता है।

उदाहरण के लिए :

- (i) मोहन बहुत चतुर है अथवा वह बहुत भाग्यशाली है। वास्तव में यह कथन दो निम्नलिखित कथनों को "अथवा" संयोजक द्वारा जोड़कर बनाया गया है।  
 $p$  : मोहन बहुत चतुर है  
 $q$  : मोहन बहुत भाग्यशाली है
- (ii) सूर्य पृथ्वी से बड़ा है और पृथ्वी चाँद से बड़ी है।  
यह कथन निम्नलिखित दो कथनों को और संयोजक द्वारा जोड़कर बनाया गया है।  
 $p$  : सूर्य पृथ्वी से बड़ा है।  
 $q$  : पृथ्वी चाँद से बड़ी है।

**उदाहरण 38.3.** निम्नलिखित मिश्र कथनों के घटक कथन ज्ञात कीजिए।

- (i) आकाश नीला है और घास हरी है।  
(ii) सभी परिमेय संख्याएं वास्तविक संख्याएं हैं और सभी वास्तविक संख्याएं सम्मिश्र संख्याएं हैं।  
(iii) वर्षा हो रही है और ठण्ड है।  
(iv)  $\sqrt{2}$  एक परिमेय संख्या है अथवा अपरिमेय संख्या है।



- हल :**
- (i) घटक कथन निम्नलिखित हैं  
 $p$  : आकाश नीला है  
 $q$  : घास हरी है  
 "और" संयोजक है।
- (ii)  $p$  : सभी परिमेय संख्याएं वास्तविक हैं  
 $q$  : सभी वास्तविक संख्याएं सम्मिश्र संख्याएं हैं  
 घटक कथन हैं तथा संयोजक "और" है।
- (iii)  $p$  : वर्षा हो रही है।  
 $q$  : ठण्ड है।  
 घटक कथन है तथा "और" संयोजक है।
- (iv)  $p$  :  $\sqrt{2}$  एक परिमेय संख्या है।  
 $q$  :  $\sqrt{2}$  एक अपरिमेय संख्या है।  
 घटक कथन हैं तथा "अथवा" संयोजक है।

**उदाहरण 38.4.** निम्नलिखित मिश्र कथनों के घटक कथन ज्ञात कीजिए।

- (i) शून्य एक धनात्मक संख्या है अथवा ऋणात्मक संख्या  
 (ii) सभी अभाज्य संख्याएं या तो सम हैं अथवा विषम  
 (iii) चंडीगढ़ पंजाब और उ.प्र. की राजधानी है।  
 (iv) संख्या 12, संख्याओं 2, 3 और 4 की गुणज है।

- हल :**
- (i)  $P$  : 0 एक धनात्मक संख्या है।  
 $q$  : 0 एक ऋणात्मक संख्या है  
 घटक कथन हैं तथा "अथवा" संयोजक है।
- (ii)  $p$  : सभी अभाज्य संख्याएं सम संख्याएं हैं।  
 $q$  : सभी अभाज्य संख्याएं विषम संख्याएं हैं।  
 घटक कथन हैं तथा "अथवा" संयोजक है।
- (iii)  $p$  : चण्डीगढ़ पंजाब की राजधानी है।  
 $q$  : चण्डीगढ़ उत्तर प्रदेश की राजधानी है।  
 घटक कथन हैं तथा "और" संयोजक है।
- (iv)  $p$  : संख्या 12 संख्या 2 का गुणज है।  
 $q$  : संख्या 12 संख्या 3 का गुणज है।  
 $r$  : संख्या 12 संख्या 4 का गुणज है।

घटक कथन हैं और तीनों घटक कथन सत्य हैं। यहाँ पर "और" संयोजक है।

## मॉड्यूल - X

रैखिक प्रोग्रामन  
एवं गणितीय  
विवेचन

टिप्पणी

## 38.5 अंतर्भाव

इस खण्ड में, हम “यदि-तो”, “केवल यदि” और “यदि और केवल यदि” पर विचार-विमर्श करेंगे।

“यदि-तो” से युक्त कथनों का प्रयोग बहुत सामान्य है। उदाहरण के लिए नीचे लिखें कथनों पर विचार कीजिए :

$r$  : यदि आपका जन्म किसी देश में हुआ है, तो आप उस देश के नागरिक हैं। हम देखते हैं कि यह कथन निम्नलिखित दो कथनों के सदृश है।

$p$  : आपका जन्म किसी देश में हुआ है।

$q$  : आप उस देश के नागरिक हैं।

यदि  $p$  तथा  $q$ , अंतर्भाव “यदि  $p$  तो  $q$ ”, को बनाने वाले दो कथन हैं, तो इस अंतर्भाव को “ $p \Rightarrow q$ ” के रूप में व्यक्त किया जाता है।

अंतर्भाव “यदि  $p$  तो  $q$ ” को निम्न प्रकार भी समझा जा सकता है।

(i) यदि  $p$  और  $q$  दोनों सत्य हैं तो

$p \Rightarrow q$  भी सत्य है।

(ii) यदि  $p$  सत्य है और  $q$  असत्य है, तो

$p \Rightarrow q$  भी असत्य है।

(iii) यदि  $p$  असत्य है और  $q$  सत्य है, तो

$p \Rightarrow q$  भी सत्य है।

(iv) यदि  $p$  और  $q$  दोनों असत्य हैं, तो

$p \Rightarrow q$  सत्य है।

**निम्नलिखित कथनों पर विचार कीजिए :**

यदि कोई संख्या 9 की गुणज है, तो वह 3 की भी गुणज है यह एक ऐसा अंतर्भाव है जिसका पूर्वपद ( $p$ ) तथा परपद ( $q$ ) निम्नलिखित प्रकार हैं :

$p$  :  $a$  एक संख्या 9 की गुणज है।

$q$  :  $a$  एक संख्या 3 की गुणज है।

उपर्युक्त कथन के अनुसार

(i)  $p$  पर्याप्त प्रतिबंध है  $q$  के लिए। इसका अर्थ यह हुआ कि यह ज्ञात होना कि संख्या 9 की गुणज है, पर्याप्त है यह निष्कर्ष निकालने के लिए कि वह संख्या 3 की भी गुणज है।

(ii)  $p$  केवल यदि  $q$ .

इसका अर्थ हुआ कि कोई संख्या 9 की गुणज है, केवल यदि वह संख्या 3 की भी गुणज है।

(iii) ' $q$  अनिवार्य प्रतिबंध है  $p$  के लिए'

इसका अर्थ यह हुआ कि जब कोई संख्या 9 की गुणज है, तो वह संख्या अनिवार्य रूप से 3 की भी गुणज है।

(iv)  $\sim q$  अंतर्भाव  $\sim p$ .

इसका अर्थ यह हुआ कि यदि कोई संख्या 3 की गुणज नहीं है, तो वह संख्या 9 की भी गुणज नहीं है।

## 38.6 प्रतिधनात्मक और विलोम

**प्रतिधनात्मक:** यदि  $p$  और  $q$  दो कथन हैं—तो “यदि  $p$  तो  $q$ ” अंतर्भाव का प्रतिधनात्मक “यदि  $\sim q$  तो  $\sim p$ ” है।

**विलोम:** यदि  $p$  और  $q$  दो कथन हैं, तो “यदि  $p$  तो  $q$ ” अंतर्भाव का विलोम “यदि  $q$  तो  $p$ ”.

उदाहरण के लिए :

यदि एक संख्या 9 से विभाजित होती है, तो वह 3 से भी विभाजित होती है।

इसका अंतर्भाव निम्न प्रकार है :

$p$  : संख्या 9 से विभाजित है

$q$  : संख्या 3 से विभाजित है

इस कथन का प्रतिधनात्मक इस प्रकार है :

यदि कोई संख्या 3 से विभाजित नहीं है, तो वह 9 से भी विभाजित नहीं है।

इस कथन का विलोम इस प्रकार है :

यदि कोई संख्या 9 से विभाजित है, तो वह 3 से भी विभाजित है।

## 38.7 यदि और केवल यदि अंतर्भाव

यदि  $p$  और  $q$  दो कथन हैं, तो मिश्र कथन  $p \Rightarrow q$  तथा  $q \Rightarrow p$ , यदि और केवल यदि अंतर्भाव कहलाता है और इसे  $p \Leftrightarrow q$  से व्यक्त करते हैं।

उदाहरण के लिए

एक त्रिभुज समबाहु है यदि और केवल यदि यह समानकोणीय है। यह एक यदि और केवल यदि अंतर्भाव है जिसके घटक कथन इस प्रकार हैं :

$p$  : एक त्रिभुज समबाहु है।

$q$  : एक त्रिभुज समानकोणीय है।

**उदाहरण 38.5.** निम्नलिखित कथनों को “यदि तो” के रूप में लिखिए।

- आपको नौकरी मिलने का तात्पर्य है आपका प्रत्यय-पत्र अच्छा है।
- केले के पेड में अच्छे फूल लगेंगे यदि वातावरण एक माह तक गरम बना रहे।
- एक चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज है यदि उसके विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

**हल :** (i) हम जानते हैं कि “यदि  $p$  तो  $q$ ”, “ $p \Rightarrow q$ ” के समतुल्य है। इसलिए दिया हुआ कथन इस प्रकार लिखा जा सकता है।

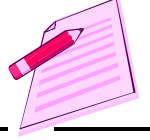
“यदि आपको नौकरी मिलती है, तो आपका प्रत्यय-पत्र अच्छा है।”

- हम जानते हैं कि “यदि  $p$  तो  $q$ ”, “ $p \Rightarrow q$ ” के समतुल्य है। इसलिए दिया हुआ कथन निम्न प्रकार लिखा जा सकता है।

“यदि एक महीने तक गरम मौसम रहता है, तो केले के पेडों में अच्छे फूल लगेंगे।”

- दिया हुआ कथन इस प्रकार लिखा जा सकता है :

“यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं, तो यह एक समान्तर चतुर्भुज है।”



मॉड्यूल - X  
रैखिक प्रोग्रामन  
एवं गणितीय  
विवेचन



टिप्पणी

**उदाहरण 38.6.** निम्नलिखित कथनों के प्रतिधनात्मक लिखिए :

- यदि एक त्रिभुज समबाहु है, तो यह समद्विबाहु है।
- यदि आपका जन्म भारत में हुआ है, तो आप भारत के नागरिक हैं।
- यदि  $x$  सम संख्या है, तो इसका तात्पर्य है कि  $x$ , 4 से विभाजित होती है।

**हल :** इन कथनों के प्रतिधनात्मक इस प्रकार हैं :

- यदि एक त्रिभुज समद्विबाहु नहीं है, तो वह समबाहु नहीं है।
- यदि आप भारत के नागरिक नहीं हैं, तो आपका जन्म भारत में नहीं हुआ है।
- यदि  $x$ , 4 से विभाजित नहीं होता है, तो  $x$  एक सम संख्या नहीं है।

**उदाहरण 38.7.** निम्नलिखित कथनों के विलोम लिखिए :

- यदि एक संख्या  $n$ , सम संख्या है, तो  $n^2$  सम संख्या है।
- यदि  $x$  एक सम संख्या है, तो  $x$ , 4 से विभाजित होता है।

**हल :** इन कथनों के विलोम इस प्रकार हैं :

- यदि  $n^2$  एक सम संख्या है, तो  $n$  एक सम संख्या है।
- यदि  $x$ , 4 से विभाजित होता है, तो  $x$  सम संख्या है।

**उदाहरण 38.8.** नीचे कथनों के दो युग्म दिए हुए हैं। “यदि और केवल यदि” की सहायता से प्रत्येक युग्म के कथनों को जोड़िए।

- $p$  : यदि एक आयत वर्ग है, तो इसकी चारों भुजाएं समान होती हैं।  
 $q$  : यदि आयत की चारों भुजाएं समान हैं, तो आयत एक वर्ग होता है।
- $p$  : यदि किसी संख्या के अंकों का योग 3 से विभाजित होता है, तो वह संख्या 3 से विभाजित होती है।  
 $q$  : यदि एक संख्या 3 से विभाजित है, तो उस संख्या के अंकों का योग भी 3 से विभाजित है।

**हल :** (i) एक आयत वर्ग है यदि और केवल यदि उसकी चारों भुजाओं की लम्बाई समान है।  
(ii) एक संख्या 3 से विभाजित है यदि और केवल यदि उसके अंकों का योगफल 3 से विभाजित है।



**देखें आपने कितना सीखा 38.2**

- निम्नलिखित कथन को “यदि-तो” के प्रयोग से पाँच विभिन्न रूपों में इस प्रकार लिखिए कि प्रत्येक रूप का अर्थ एक जैसा हो।  
यदि एक प्राकृत संख्या विषम है, तो इसका वर्ग भी विषम है।
- निम्नलिखित कथनों का प्रतिधनात्मक और विलोम लिखिए :
  - यदि आप कानपुर में रहते हैं, तो आपके पास सर्दी के कपड़े हैं।
  - यदि  $x$  एक अभाज्य संख्या है, तो  $x$  विषम संख्या है।
  - यदि दो रेखाएं समान्तर हैं, तो वे एक ही तल में प्रतिच्छेद नहीं करती।
  - $x$  सम संख्या होने का तात्पर्य है कि  $x$ ; 4 से विभाजित है।
  - ठंड होने का तात्पर्य है कि तापमान कम है।





3. निम्नलिखित में से प्रत्येक कथन को “यदि-तो” के रूप में लिखिए :
- कक्षा में  $A^+$  प्राप्त करने के लिए यह आवश्यक है कि आप पुस्तक की प्रश्नावलियों के सभी प्रश्नों को हल कर लें।
  - खेल तभी रद्द होगा यदि वर्षा हो रही है।
  - जब ठंड होती है तो कभी वर्षा नहीं होती।
4. निम्नलिखित कथनों को “यदि और केवल यदि” के रूप में लिखिए :
- यदि आप टेलीविजन देखते हैं आपका दिमाग स्वतंत्र है और यदि आपका दिमाग स्वतंत्र है तो आप टेलीविजन देखते हैं।
  - आपको  $A$  ग्रेड प्राप्त करने के लिए यह आवश्यक एवं पर्याप्त है कि अपना गृहकार्य नियमित रूप से करें।

### 38.8 कथनों की वैधता को प्रमाणित करना

इस अनुच्छेद में हम कथनों की वैधता की चर्चा करेंगे। कथन की वैधता जाँचने से अभिप्राय है कि कथन कब सत्य है और कब असत्य है। इस प्रश्न का उत्तर इस बात पर निर्भर करता है कि प्रदत्त-कथन में “और” तथा “या” में से संयोजक शब्द का अथवा “यदि और केवल यदि” तथा “यदि-तो” में से किस प्रतिबंध का अथवा “प्रत्येक के लिए” तथा “एक ऐसा का अस्तित्व है” में से किस परिणामवाचक वाक्यांश का प्रयोग किया गया है।

यहाँ हम किसी कथन की वैधता ज्ञात करने के लिए कुछ तकनीकों अथवा नियमों की चर्चा करेंगे।

**नियम 1:** “और” सहित कथन

यदि  $p$  और  $q$  गणितीय कथन हैं, तो यह दर्शाने के लिए कि कथन “ $p$  और  $q$ ” सत्य है हम निम्नलिखित चरणों का अनुसरण करते हैं।

**चरण 1 :** दर्शाइए कि कथन  $p$  सत्य है।

**चरण 2 :** दर्शाइए कि कथन  $q$  सत्य है।

**नियम 2:** “अथवा” सहित कथन

यदि  $p$  और  $q$  गणितीय कथन हैं, तो यह दर्शाने के लिए कि कथन “ $p$  अथवा  $q$ ” सत्य है, हम निम्नलिखित स्थितियों में से किसी एक को सत्य प्रमाणित करते हैं।

**स्थिति 1 :** हम मानते हुए कि  $p$  असत्य है,  $q$  को अनिवार्यतः सत्य प्रमाणित कीजिए।

**स्थिति 2 :** हम मानते हुए कि  $q$  असत्य है,  $p$  को अनिवार्यतः सत्य प्रमाणित कीजिए।

**नियम 3:** “यदि-तो” सहित कथनों की वैधता

यदि  $p$  और  $q$  दो गणितीय कथन हैं, तो यह सिद्ध करने के लिए कि कथन “यदि  $p$  तो  $q$ ” सत्य है हम निम्नलिखित स्थितियों में से किसी एक को सत्य प्रमाणित करते हैं।

**स्थिति 1 :** प्रत्यय विधि :

यह मानते हुए कि  $p$  सत्य है,  $q$  को अनिवार्यतः सत्य प्रमाणित कीजिए।

**स्थिति 2 :** प्रतिधनात्मक विधि :

यह मानते हुए कि  $q$  असत्य है,  $p$  को भी अनिवार्यतः सत्य प्रमाणित कीजिए।

**नियम 4:** “यदि और केवल यदि” सहित कथन :

कथन “ $p$  यदि और केवल यदि  $q$ ” को सत्य सिद्ध करने के लिए हमें यह प्रमाणित करने की आवश्यकता है कि

(i) यदि  $p$  सत्य हो तो  $q$  सत्य है।

(ii) यदि  $q$  सत्य है तो  $p$  सत्य है।

## मॉड्यूल - X

रैखिक प्रोग्रामन  
एवं गणितीय  
विवेचन

टिप्पणी

**उदाहण 38.9.** यदि  $p$  और  $q$  दो कथन इस प्रकार हैं कि

$p$  : 35, 5 का गुणज है

$q$  : 35, 6 का गुणज है

इन दो कथनों को "और" संयोजक से जोड़कर मिश्र कथन लिखिए और वैधता की जाँच कीजिए।

**हल :** मिश्र कथन इस प्रकार है : "35, 5 और 6 दोनों का गुणज है" क्योंकि 35, 5 का गुणज है और 6 का गुणज नहीं है। इसलिए  $p$  सत्य है लेकिन  $q$  असत्य है। इसलिए मिश्र कथन वैध नहीं है।

**उदाहण 38.10.** यदि  $p$  और  $q$  दो कथन इस प्रकार हैं कि

$p$  : 35, 5 का गुणज है।

$q$  : 35, 6 का गुणज है।

इन दो कथनों को "अथवा" संयोजक से जोड़कर एक मिश्र कथन लिखिए और वैधता की जाँच कीजिए।

**हल :** मिश्र कथन इस प्रकार है : "35, 5 अथवा 6 का गुणज है।"

यह मानते हुए कि कथन  $q$  असत्य है, तो  $p$  सत्य है

मिश्र कथन सत्य है अर्थात् वैध है।

**उदाहण 38.11.** जाँच कीजिए कि निम्नलिखित कथन सत्य है अथवा नहीं।

"यदि  $x$  और  $y$  विषम पूर्णांक हैं, तो  $xy$  एक विषम पूर्णांक है।

**हल :** मान लीजिए कथन  $p$  और  $q$  निम्न प्रकार हैं

$p$  :  $x$  और  $y$  विषम पूर्णांक हैं।

$q$  :  $xy$  एक विषम पूर्णांक है, तो दिया हुआ कथन

"यदि  $p$  तो  $q$ " के जैसा है।

प्रत्यक्ष विधि :  $p$  सत्य है, तो  $p$  सत्य है।

$\Rightarrow x$  और  $y$  विषम संख्याएं हैं

$\Rightarrow x = 2m + 1, y = 2n + 1$ , पूर्णांक  $m, n$  के लिए

$\Rightarrow xy = (2m + 1)(2n + 1)$

$\Rightarrow xy = 2(2mn + m + n) + 1$

$\Rightarrow xy$  एक विषम पूर्णांक है।

$\Rightarrow q$  सत्य है।

इस प्रकार,  $p$  सत्य है  $\Rightarrow q$  सत्य है

अतः "यदि  $p$ , तो  $q$ " एक सत्य कथन है।

## 38.8.1 प्रतिधनात्मक विधि

मान लीजिए  $q$  सत्य नहीं है, तो  $q$  सत्य नहीं है।

$\Rightarrow xy$  एक सम संख्या है

$\Rightarrow x$  सम संख्या है अथवा  $y$  सम संख्या है अथवा  $x$  और  $y$  दोनों सम संख्या है।

$\Rightarrow p$  सत्य नहीं है।

इस प्रकार  $q$  असत्य  $\Rightarrow p$  असत्य है

अतः "यदि  $p$ -तो  $q$ " एक सत्य कथन है।

### 38.8.2 विरोधोक्ति द्वारा कथनों की वैधता

इस विधि में यह सिद्ध करने के लिए कोई कथन  $p$  सत्य है हम यह मान लेते हैं कि  $p$  सत्य नहीं है अर्थात्  $\sim p$  सत्य है। इस प्रकार हम एक ऐसे निष्कर्ष पर पहुंचते हैं जो हमारी मान्यता का खंडन करता है। परिणामतः  $p$  को सत्य होना चाहिए।

**उदाहरण 38.12.** विरोधोक्ति द्वारा निम्नलिखित कथन को सत्यापित कीजिए :

$p$  :  $\sqrt{7}$  एक अपरिमेय संख्या है।

**हल :** मान लीजिए एक कथन  $p$  इस प्रकार है :

$p$  :  $\sqrt{7}$  एक अपरिमेय संख्या है।

हम मान लेते हैं कि  $\sqrt{7}$  एक परिमेय संख्या है।

$\Rightarrow \sqrt{7} = \frac{a}{b}$  जहाँ  $a$  और  $b$  ऐसे पूर्णांक हैं जिनका कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है।

$$\Rightarrow 7 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow a^2 = 7b^2$$

$\Rightarrow 7, a^2$  को विभाजित करता है।

$\Rightarrow 7, a$  को विभाजित करता है।

$\Rightarrow a = 7c$  किसी पूर्णांक  $c$  के लिए

$$\Rightarrow a^2 = 49c^2$$

$$\Rightarrow 7b^2 = 49c^2$$

$$\Rightarrow b^2 = 7c^2$$

$\Rightarrow 7, b^2$  को विभाजित करता है।

$\Rightarrow 7, b$  को विभाजित करता है।

अतः  $7, a$  तथा  $b$  का एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है। यह इस बात का खंडन करता है कि  $a$  और  $b$  का कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है। अतः हमारी यह मान्यता गलत है कि  $\sqrt{7}$  एक परिमेय संख्या है। अतः कथन " $\sqrt{7}$  एक अपरिमेय संख्या है" सत्य है।



### देखें आपने कितना सीखा 38.3

1. निम्नलिखित कथनों की वैधता की जाँच कीजिए :

(i)  $p$  : 80, 4 तथा 5 का गुणज है।

(ii)  $q$  : 115, 5 तथा 7 का गुणज है।

(iii)  $r$  : 60, 2 तथा 3 का गुणज है।



## मॉड्यूल - X

रैखिक प्रोग्रामन  
एवं गणितीय  
विवेचन

टिप्पणी

2. (i) प्रत्यक्ष विधि (ii) विरोधोक्ति विधि (iii) प्रतिधनात्मक विधि से दर्शाइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है :  
 $p$  : “एक वास्तविक संख्या  $x$  इस प्रकार है कि  $x^3 + 2x = 0$ , तो  $x$  का मान 0 है।”
3. प्रतिधनात्मक विधि से दर्शाइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है :  
 $p$  : “यदि  $x$  एक पूर्णांक है और  $x^2$  विषम है, तो  $x$  भी विषम है”
4. दर्शाइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है :  
 “पूर्णांक  $x$  सम है यदि और केवल यदि  $x^2$  सम है”
5. निम्नलिखित कथनों में कौन-सा कथन सत्य है और कौन-सा कथन असत्य है। प्रत्येक के लिए अपने उत्तर की वैधता के लिए उचित कारण बताइए।  
 (i)  $p$  : वृत्त की प्रत्येक त्रिज्या उसकी जीवा होती है।  
 (ii)  $q$  : किसी वृत्त का केन्द्र वृत्त की प्रत्येक जीवा को समद्विभाजित करता है।  
 (iii)  $r$  : एक वृत्त, किसी दीर्घवृत्त की एक विशेष स्थिति है।  
 (iv)  $s$  : यदि  $x$  और  $y$  ऐसे पूर्णांक हैं कि  $x > y$ , तो  $-x < -y$ .  
 (v)  $t$  :  $\sqrt{11}$  एक परिमेय संख्या है।



## सहायक वेबसाइट

- [http://www.cs.odu.edu/~toida/nerzic/content/set/math\\_reasoning.html](http://www.cs.odu.edu/~toida/nerzic/content/set/math_reasoning.html)
- <http://www.freencertsolutions.com/mathematical-reasoning>
- [www.basic-mathematics.com/examples-of-inductive-reasoning.html](http://www.basic-mathematics.com/examples-of-inductive-reasoning.html)



## आइए अभ्यास करें

1. ऐसे चार वाक्य लिखिए जो कथन नहीं है।
2. क्या कथनों के निम्नलिखित युग्म एक दूसरे के निषेधन हैं?  
 (i) संख्या  $x$  एक परिमेय संख्या नहीं है।  
 संख्या  $x$  एक अपरिमेय संख्या नहीं है।  
 (ii) संख्या  $x$  एक परिमेय संख्या है।  
 संख्या  $x$  एक अपरिमेय संख्या है।
3. निम्नलिखित कथनों के प्रतिधनात्मक एवं विलोम लिखिए :  
 (i) यदि दो रेखाएं समान्तर हैं, तो वे एक ही तल में प्रतिच्छेद नहीं करती।  
 (ii) यदि  $x$  एक अभाज्य संख्या है, तो  $x$  विषम है।
4. प्रत्युदाहरण द्वारा सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित कथन सत्य नहीं हैं  
 (i)  $p$  : यदि किसी त्रिभुज के सभी कोण समान हैं, तो त्रिभुज एक अधिक कोण त्रिभुज है।



(ii)  $q$  : समीकरण  $x^2 - 1 = 0$  के मूल 0 और 2 के बीच स्थित नहीं है।

5. मान लीजिए,  $p$  : 25, 5 का गुणज है।

$q$  : 25, 8 का गुणज है। दो कथन हैं।

संयोजक "और" तथा "अथवा" द्वारा मिश्र कथन लिखिए। दोनों दशाओं में प्राप्त मिश्र कथनों की वैधता जाँचिए।



### उत्तरमाला

#### देखें आपने कितना सीखा 38.1

1. (i), (ii), (iii), (iv), (vi), (vii), (viii), (xii) कथन हैं।

#### देखें आपने कितना सीखा 38.2

- $p \Rightarrow q$  i.e.,  $n$  एक विषम प्राकृत संख्या है  $\Rightarrow x^2$  एक विषम प्राकृत संख्या है।
  - $p, q$  के लिए पर्याप्त प्रतिबंध है।
  - $p$  केवल यदि  $q$  i.e एक प्राकृत संख्या विषम है केवल यदि उसका वर्ग विषम है।
  - $q, p$  का आवश्यक प्रतिबंध है।
  - $\sim q \Rightarrow \sim p$  i.e. यदि किसी प्राकृत संख्या का वर्ग विषम नहीं है, तो प्राकृत संख्या विषम नहीं है।
- प्रतिधनात्मक : यदि आपके पास सर्दी के कपड़े नहीं हैं, तो आप कानपुर में नहीं रहते हैं।  
विलोम : यदि आपके पास सर्दी के कपड़े हैं, तो आप कानपुर में रहते हैं।
  - प्रतिधनात्मक : यदि एक संख्या  $x$  विषम नहीं है, तो  $x$  अभाज्य नहीं है।  
विलोम : यदि एक संख्या  $x$  विषम है, तो  $x$  अभाज्य संख्या है।
  - प्रतिधनात्मक : यदि दो रेखाएं परस्पर एक ही समतल में प्रतिच्छेद नहीं करतीं, तो वे समान्तर नहीं हैं।  
विलोम : यदि दो रेखाएं एक ही समतल के परस्पर प्रतिच्छेद नहीं करती, तो वे समान्तर हैं।
  - प्रतिधनात्मक : यदि  $x, 4$  से विभाजित नहीं होता, तो  $x$  एक सम संख्या नहीं है।  
विलोम : यदि  $x, 4$  से विभाजित है, तो  $x$  एक सम संख्या है।
  - प्रतिधनात्मक : यदि किसी वस्तु का तापमान कम नहीं है, तो वह वस्तु ठंडी नहीं है।  
विलोम : यदि किसी वस्तु का तापमान कम है, तो वस्तु ठंडी है।
- "यदि आप कक्षा में  $A^+$  प्राप्त करते हैं, तो आप पुस्तक के सभी प्रश्नों को हल करते हैं।"
  - यदि वर्षा हो रही है तो खेल रद्द है।
  - यदि ठंड है तो वर्षा नहीं होती।

## मॉड्यूल - X

रैखिक प्रोग्रामन  
एवं गणितीय  
विवेचन

टिप्पणी

4. (i) आप टेलीविजन देखते हैं यदि और केवल यदि आपका दिमाग स्वतंत्र है।  
(ii) आपको A ग्रेड मिलता है यदि और केवल यदि आप सम्पूर्ण गृहकार्य नियमित रूप से करते हैं।

## देखें आपने कितना सीखा 38.3

1. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) सत्य  
5. (i) असत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) सत्य (v) असत्य

## आइए अभ्यास करें

1. (i) इस कमरे में प्रत्येक व्यक्ति गंजा है  
(ii) “ $\cos^2\theta$  का मान सदैव  $\frac{1}{2}$  से बड़ा होता है।  
(iii) गणित मुशिकल है।  
(iv) सोहन, मेरी बात सुनिए।
2. (i) हाँ (ii) हाँ
3. (i) प्रतिधनात्मक : यदि दो रेखाएं एक ही समतल में परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं तो वे समान्तर नहीं हैं।  
विलोम : यदि दो रेखाएं एक ही तल में प्रतिच्छेद नहीं करतीं, तो वे समान्तर हैं।  
(ii) प्रतिधनात्मक : यदि एक संख्या  $x$  विषम नहीं है, तो  $x$  एक अभाज्य संख्या नहीं है।  
विलोम : यदि एक संख्या  $x$  विषम है तो यह अभाज्य संख्या है।
5. “और” सहित मिश्र कथन : 25, 5 तथा 8 का गुणज है। यह एक असत्य कथन है।  
“अथवा” सहित मिश्र कथन : 25, 5 अथवा 8 का गुणज है। यह एक सत्य कथन है।

## प्रश्न पत्र का प्रारूप

विषय: गणित ( 311 )

उच्चतर माध्यमिक पाठ्यक्रम

अधिकतम अंक: 100

समय: 3 घंटे

### 1. उद्देश्यों के आधार पर भारिता

क्रम संख्या	उद्देश्य	अंक	कुल अंको का प्रतिशत
1.	ज्ञान	30	30%
2.	बोध	40	40%
3.	अनुप्रयोग	22	22%
4.	कौशल	08	8%

### 2. मॉड्यूलवार समय एवं अंक वितरण

क्रम संख्या	प्रश्नों का प्रकार	प्रश्नों की संख्या	अंक	अनुमानित समय ( मिनटों में )
1.	दीर्घ उत्तरीय प्रश्न ( 6 अंकीय प्रश्न )	5	30	$5 \times 10 = 50$
2.	लघु उत्तरीय प्रश्न ( 4 अंकीय प्रश्न )	12	48	$12 \times 6 = 72$
3.	अतिलघु उत्तरीय प्रश्न ( 2 अंकीय प्रश्न )	6	12	$6 \times 3 = 18$
4.	बहुविकल्पीय प्रश्न ( 1 अंकीय प्रश्न )	10	10	$10 \times 2 = 20$
कुल		33	100	160 मिनट

\* दोहराने के लिए 20 मिनट निर्धारित हैं।

### 3. विषय वस्तु के आधार पर भारिता

क्रम संख्या	मॉड्यूल का नाम	पाठ की संख्या	अंक
1.	बीजगणित -II	03	17
2.	संबंध एवं फलन -II	02	12
3.	कलन	08	45
4.	सदिश एवं त्रिविमीय ज्यामिति	04	17
5.	रैखिक प्रोग्रामन एवं गणितीय विवेचन	02	09
कुल		19	100

### 4. प्रश्नों की कठिनाई के स्तर के आधार पर भारिता

अनुमानित स्तर	अंक	अंकों का प्रतिशत
कठिन	20	20
औसत	50	50
आसान	30	30
कुल	100	100

## नमूना प्रश्न पत्र गणित ( 311 )

अधिकतम अंक: 100

समय: 3 घंटे

निर्देश:

- इस प्रश्न पत्र में कुल 33 प्रश्न हैं, जो चार खण्डों A, B, C तथा D में विभाजित हैं।
- खण्ड A में 1 से लेकर 10 तक बहुविकल्पीय प्रश्न हैं। जिनमें से प्रत्येक के लिए 1 अंक निर्धारित है। प्रत्येक प्रश्न में उत्तर के रूप में A, B, C तथा D चार विकल्प दिए हैं जिनमें से कोई एक सही है। आपको सही विकल्प चुनना है तथा अपनी उत्तर पुस्तिका में A, B, C तथा D में जो सही हो उत्तर के रूप में लिखना है।
- खण्ड B में प्रश्न संख्या 11 से 16 तक अति लघुउत्तरीय प्रश्न हैं तथा प्रत्येक के 2 अंक निर्धारित हैं।
- खण्ड C में प्रश्न संख्या 17 से 28 तक लघुउत्तरीय प्रश्न हैं तथा प्रत्येक के 4 अंक निर्धारित हैं।
- खण्ड D में प्रश्न संख्या 29 से 33 तक दीर्घउत्तरीय प्रश्न हैं तथा प्रत्येक के 6 अंक निर्धारित हैं।
- सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। पूर्ण प्रश्न पत्र में विकल्प नहीं है फिर भी कुछ प्रश्नों में आंतरिक विकल्प हैं। ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है।

### खण्ड - A

1. यदि A एक  $3 \times 3$  क्रम का वर्ग आव्यूह है, तब  $|KA|$  बराबर होगा:
 

(a) $K A $	(b) $3.K A $	(c) $K^2 A $	(d) $K^3 A $
------------	--------------	--------------	--------------
2. यदि  $\tan^{-1} x = y, x \in R$ , तब
 

(a) $0 \leq y \leq \pi$	(b) $0 < y < \pi$	(c) $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	(d) $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
-------------------------	-------------------	--	--
3. मूल बिन्दु से समतल  $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 3$  की दूरी है:
 

(a) 3	(b) $\sqrt{3}$	(c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$	(d) 0
-------	----------------	--------------------------	-------
4. निम्न में से कौन सा वाक्य कथन नहीं है:
 

(a) 5, 12 से बड़ा है।	(b) प्रत्येक समुच्चय एक परमित होता है।
(c) सूर्य एक तारा है।	(d) यहाँ से आगरा कितनी दूर है?
5. यदि समुच्चय  $\{1, 2, 3, 4\}$  पर संबंध  $R = \{(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)\}$  परिभाषित है, तब:
 

(a) R स्वतुल्य तथा सममित है परन्तु संक्रमक नहीं।	(b) R सममित एवं संक्रमक है परन्तु स्वतुल्य नहीं।
(c) R स्वतुल्य एवं संक्रमक है परन्तु सममित नहीं।	(d) R एक तुल्यता संबंध है।
6.  $x$  के मान, जिनके लिए, फलन  $f(x) = |x| + |x + 5| + |x - 6|$ , अवकलित नहीं है, है:
 

(a) 0, 5, 6	(b) 0, -5, -6	(c) 0, -5, 6	(d) 0, 5, -6
-------------	---------------	--------------	--------------
7. यदि  $y = \log(x \cdot e^x)$ , तब  $\frac{dy}{dx}$  का मान है:



नमूना प्रश्न पत्र

(a)  $\frac{x+1}{x}$  (b)  $\frac{x+1}{x \cdot e^x}$  (c)  $e^x(x+1)$  (d)  $\frac{1}{x \cdot e^x}$

8. यदि  $\int e^x(\operatorname{cosec}^2 x - \cot x)dx = P \cdot e^x + c$ , तब P का मान है:

(a)  $\operatorname{cosec}^2 x$  (b)  $\cot x$  (c)  $-\cot x$  (d)  $\operatorname{cosec} x \cdot \cot x$

9.  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x| dx$  का मान है:

(a) -2 (b) 0 (c) 1 (d) 2

10. अवकलन समीकरण  $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 4y = 0$  की डिग्री है:

(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) परिभाषित नहीं

खण्ड-B

11. यदि  $X+Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$  तथा  $X-Y = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ , तब X तथा Y का मान ज्ञात कीजिए।

अथवा

एक  $2 \times 2$  आव्यूह की रचना कीजिए जिसके  $i^{\text{th}}$  पंक्ति एवं  $j^{\text{th}}$  स्तम्भ का मान  $a_{ij} = \frac{3i-j}{2}$  है।

12. यदि  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  तथा  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  फलन  $f(x) = x + 1$  तथा  $g(x) = x - 1$ , पर परिभाषित है तब दिखाइए कि  $f \circ g = g \circ f$

13. मान ज्ञात कीजिए:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

14. यदि  $y = \sin^{-1} x$ , तब दिखाइए कि  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$

15. उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी आसन्न भुजाएं  $2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$  तथा  $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$  हैं।

16. जांच कीजिए कि निम्न कथन सत्य है या असत्य।

“यदि  $x, y \in Z$  इस प्रकार हैं कि  $x$  तथा  $y$  विषम हैं, तब  $xy$  भी विषम है।”

खण्ड-C

17. नीचे दिए गए आव्यूह को सममित आव्यूह एवं विषम सममित आव्यूह के योग के रूप में व्यक्त कीजिए:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -6 & 8 & 3 \\ -4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

18. यदि  $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$  तथा  $\vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$  है, तब निम्न का मान ज्ञात कीजिए:

(i)  $\vec{a} + \vec{b}$  (ii)  $\vec{a} - \vec{b}$

(iii)  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$  (iv)  $\vec{a} + \vec{b}$  तथा  $\vec{a} - \vec{b}$  के बीच कोण

19. सारणिक के गुणों का उपयोग करके सिद्ध कीजिए:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

अथवा

यदि  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  तथा  $A^2 + kA - 5I = 0$ , जहाँ  $k$  एक वास्तविक संख्या है, तब  $k$  का मान ज्ञात कीजिए।

20. सिद्ध कीजिए:  $\sin^{-1} \frac{12}{13} + \cos^{-1} \frac{4}{5} + \tan^{-1} \frac{63}{16} = \pi$

21. यदि  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  फलन  $f(x) = 4x + 3$  पर परिभाषित है तो सिद्ध कीजिए कि फलन  $f$  एकैकी एवं आच्छादक है। फलन  $f$  का प्रतिलोम भी ज्ञात कीजिए।

22.  $a$  तथा  $b$  के मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए फलन

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{यदि } x \leq 2 \\ ax + b & \text{यदि } 2 < x < 10 \\ 21 & \text{यदि } x \geq 10 \end{cases} \text{ एक सतत फलन है।}$$

23. यदि  $y = x^{\cos x} + \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ , तब  $\frac{dy}{dx}$  का मान ज्ञात कीजिए।

24. उन अंतरालों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए दिया गया फलन  $f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$ , (i) आरोही या वर्धमान है (ii) अवरोही या हासमान है।

अथवा

$x = 3$  पर वक्र  $y = x^2 + 4x + 1$  के लिए स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। वह बिन्दु भी कीजिए जहाँ वक्र की स्पर्श रेखा  $x$ -अक्ष के समान्तर है।

25. मान ज्ञात कीजिए:  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}}$

26. दी गई अवकल समीकरण को हल कीजिए:

$$(x - y) \frac{dy}{dx} = x + 3y$$

27. सदिश  $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$  का सदिशों  $2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$  तथा  $\lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$  के योग के सापेक्ष इकाई सदिश के गुणनफल का परिमाण  $2\sqrt{26}$  के बराबर है तो  $\lambda$  का मान ज्ञात कीजिए।

28. मान ज्ञात कीजिए:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2x-3)}}$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए:

$$\int \frac{3x+2}{(x-1)(2x+3)} dx$$

**खण्ड-D**

29. आव्यूह विधि का प्रयोग करके निम्न रैखिक समीकरणों के निकाय को हल कीजिए।

$$x - y + 2z = 7, \quad 3x + 4y - 5z = -5, \quad 2x - y + 3z = 12$$

अथवा

प्रारंभिक स्थानांतरण विधि (Elementary Transformation Method) का प्रयोग करके आव्यूह  $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$  का प्रतिलोम ज्ञात

कीजिए।

30. दर्शाइए कि एक वृत्त के अन्तर्गत जितने भी आयत बनाए जा सकते हैं, उनमें वर्ग का क्षेत्रफल अधिकतम होता है।

अथवा

45 सेमी. × 24 सेमी. आयताकार टिन की शीट के कोनों में से वर्गाकार टुकड़े काटकर शेष भुजाओं को इस प्रकार मोड़ा गया है कि एक खुला बक्सा बन जाए। काटे गए वर्ग की भुजा ज्ञात कीजिए ताकि बक्से का आयतन अधिकतम हो।

31. समाकलन का प्रयोग करके, दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

32. बिन्दु (1, 2, -4) से गुजरने वाली तथा रेखाओं  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+4}{6}$  एवं  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-5}{1}$  के समांतर समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

33. एक उत्पाद कम्पनी नट एवं बोल्ट का उत्पादन करती है। कंपनी 1 घंटा मशीन A तथा 3 घंटा मशीन B के साथ कार्य करने पर नट का एक पैकेज का उत्पादन करती है। कंपनी 3 घंटा मशीन A तथा 1 घंटा मशीन B के साथ कार्य करने पर बोल्ट का एक पैकेज उत्पादन करती है। कंपनी नट के एक पैकेज पर ₹20 तथा बोल्ट के एक पैकेज पर ₹10 का लाभ कमाती है। एक दिन में 12 घंटे के लिए दोनों मशीनों का चलाकर प्रत्येक के कितने पैकेजों का उत्पादन प्रतिदिन किया जाए ताकि लाभ अधिकतम हो। उपरोक्त से एक रैखिक प्रोग्रामिंग समस्या का निर्माण कीजिए तथा आलेखन विधि द्वारा हल कीजिए।

**अंक निर्धारण योजना (Marking Scheme)**

प्रश्न सं.	Value Points	अंक वितरण	कुल अंक
1	D		1
2	D		1
3	B		1
4	D		1
5	C		1
6	C		1
7	A		1
8	C		1
9	D		1
10	B		1
11	$X = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ $Y = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ <p align="center">or</p> $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 5/2 & 2 \end{bmatrix}$	<p align="center">1</p> <p align="center">1</p> <p align="center">प्रत्येक सही अवयव के लिए <math>\frac{1}{2}</math> अंक</p>	2
12	$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x-1) = x-1+1 = x$ $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x+1) = x+1-1 = x$	<p align="center">1</p> <p align="center">1</p>	2
13	$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \times \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ $= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{1+x-1+x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ $= \frac{2}{1+1} = 1$	<p align="center"><math>\frac{1}{2}</math></p> <p align="center">1</p> <p align="center"><math>\frac{1}{2}</math></p>	2

14.	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$ $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}-1}(-2x)$ $= \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$	1	2
15.	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ $= -22\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$ $ \vec{a} \times \vec{b}  = \sqrt{(-22)^2 + (-1)^2 + (8)^2}$ $= \sqrt{549} = 3\sqrt{61}$ <p>∴ समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = <math>3\sqrt{61}</math> वर्ग इकाई</p>	1	2
16.	<p>मान लीजिए <math>p: x \cdot y \in Z</math> इस प्रकार हैं कि <math>x</math> तथा <math>y</math> विषम है।  <math>q: xy</math> विषम हैं।                      मान लीजिए कि यदि <math>p</math> सत्य हैं, तो <math>q</math> भी सत्य है। <math>p</math> सत्य होने का तात्पर्य है मान लीजिए <math>x = 2m + 1, y = 2n + 1</math> जहां <math>m, n</math> पूर्णांक हैं।</p> $\therefore xy = (2m+1)(2n+1)$ $= 2(2mn + m + n) + 1$ <p>यह दर्शाता है कि <math>xy</math> विषम है i.e., <math>q</math> सत्य है।</p>	$\frac{1}{2}$	2
17.	<p>मान लीजिए <math>A = \begin{bmatrix} 1 &amp; 3 &amp; 5 \\ -6 &amp; 8 &amp; 3 \\ -4 &amp; 6 &amp; 5 \end{bmatrix} \therefore A' = \begin{bmatrix} 1 &amp; -6 &amp; -4 \\ 3 &amp; 8 &amp; 6 \\ 5 &amp; 3 &amp; 5 \end{bmatrix}</math></p> $A + A' = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 16 & 9 \\ 1 & 9 & 10 \end{bmatrix}$	1	$\frac{1}{2}$

	$\frac{A+A^1}{2} = \begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 1/2 \\ -3/2 & 8 & 9/2 \\ 1/2 & 9/2 & 5 \end{bmatrix}$ $A-A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 9 \\ -9 & 0 & -3 \\ -9 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ $\frac{A-A^1}{2} = \begin{bmatrix} 0 & 9/2 & 9/2 \\ -9/2 & 0 & -3/2 \\ -9/2 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$ <p>हम जानते हैं कि <math>\frac{A+A^1}{2}</math> सममित है तथा <math>\frac{A-A^1}{2}</math> प्रतिसमित है।</p> $\therefore A = \begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 1/2 \\ -3/2 & 8 & 9/2 \\ 1/2 & 9/2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 9/2 & 9/2 \\ -9/2 & 0 & -3/2 \\ -9/2 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}$  $\frac{1}{2}$  $\frac{1}{2}$  $\frac{1}{2}$  $\frac{1}{2}$	4
18.	<p>(i) <math>\vec{a} + \vec{b} = 4\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}</math>.</p> <p>(ii) <math>\vec{a} + \vec{b} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}</math></p> <p>(iii) <math>(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = -8 + 3 + 5 = 0</math></p> <p>(iv) <math>(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0</math></p> <p><math>\Rightarrow \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}</math> पर लम्बवत् है।</p>	1  1  1  1	4
19.	<p>बायाँ पक्ष = <math>\begin{vmatrix} 1 &amp; a &amp; a^2 \\ 1 &amp; b &amp; b^2 \\ 1 &amp; c &amp; c^2 \end{vmatrix}</math></p> <p><math>R_1 \rightarrow R_1 - R_2</math> &amp; <math>R_2 \rightarrow R_2 - R_3</math> का प्रयोग करने पर</p> <p>दायाँ पक्ष = <math>\begin{vmatrix} 0 &amp; a-b &amp; a^2-b^2 \\ 0 &amp; b-c &amp; b^2-c^2 \\ 1 &amp; c &amp; c^2 \end{vmatrix}</math></p>	$1 \frac{1}{2}$	

<p><math>R_1</math> में से <math>a-b</math> तथा <math>R_2</math> में से <math>(b-c)</math> बाहर निकालने पर हम प्राप्त करते हैं</p> $\text{LHS} = (a-b)(b-c) \begin{vmatrix} 0 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & b+c \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ <p>अब <math>c_1</math> की सहायता से प्रसारित करने पर</p> $\begin{aligned} \text{बायाँ पक्ष} &= (a-b)(b-c)[0-0+1(b+c-a-b)] \\ &= (a-b)(b-c)(c-a) = \text{RHS} \end{aligned}$ <p style="text-align: center;"><b>अथवा</b></p> $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ $KA = K \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 2k & 2k \\ 2k & k & 2k \\ 2k & 2k & k \end{bmatrix}$ $5I = 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ <p>अब <math>A^2 + KA - 5I = 0</math></p> $\Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 2k & 2k \\ 2k & k & 2k \\ 2k & 2k & k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} 4+k & 8+2k & 8+2k \\ 8+2k & 4+k & 8+2k \\ 8+2k & 8+2k & 4+k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow 4+k=0 \quad \text{ie} \quad k=-4$	<p style="text-align: center;"><math>1 \frac{1}{2}</math></p> <p style="text-align: center;">1</p> <p style="text-align: center;">1</p> <p style="text-align: center;">1</p> <p style="text-align: center;"><math>\frac{1}{2}</math></p> <p style="text-align: center;">1</p> <p style="text-align: center;"><math>\frac{1}{2}</math></p>	<p style="text-align: center;">4</p>
---	---	--------------------------------------

20	$\operatorname{cosec}^{-1}(5\sqrt{2}) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$ $\therefore \text{बायाँ पक्ष} = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) + \operatorname{cosec}^{-1}(5\sqrt{2}) + \tan^{-1}\left(\frac{16}{63}\right)$ $= \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{16}{63}\right)$ $= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{5}{12} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{7}}\right] + \tan^{-1}\left(\frac{16}{63}\right)$ $= \tan^{-1}\left(\frac{47}{79}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{16}{63}\right)$ $= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{47}{79} + \frac{16}{63}}{1 - \frac{47}{79} \cdot \frac{16}{63}}\right]$ $= \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} = \text{दायाँ पक्ष}$	<p>1</p> <p>1</p> <p><math>\frac{1}{2}</math></p> <p>1</p> <p><math>\frac{1}{2}</math></p>	4
21	<p>(i) मान लीजिए कि <math>x_1, x_2</math> प्रान्त के ऐसे दो अवयव हैं कि</p> $f(x_1) = f(x_2)$ $\Rightarrow 4x_1 + 3 = 4x_2 + 3$ $\Rightarrow x_1 = x_2$ <p><math>\therefore</math> f एकैकी फलन है।</p> <p>(ii) मान लीजिए कि <math>y</math> परिसर का एक ऐसा अवयव है कि <math>f(x) = y</math></p> $\Rightarrow 4x + 3 = y, \Rightarrow x = \frac{y-3}{4}$ <p>स्पष्टतः प्रत्येक <math>y \in</math> परिसर के लिए हमेशा <math>x \in</math> प्रान्त है।</p> <p><math>\therefore</math> प्रत्येक <math>y \in</math> परिसर के लिए एक-एक पूर्व प्रतिबिम्ब का</p> $x = \frac{y-3}{4} \in \text{प्रान्त है।}$ <p><math>\therefore</math> f आच्छादक फलन है।</p>	<p><math>1\frac{1}{2}</math></p> <p><math>1\frac{1}{2}</math></p>	



	<p>(iii) क्योंकि <math>f</math> एकैकी और आच्छादाक फलन है इसलिए इसका प्रतिलोम ज्ञात किया जा सकता है।</p> <p><math>\therefore f^{-1} : R \rightarrow R</math> होगा और <math>f^{-1}(y) = \frac{y-3}{4}</math> द्वारा परिभाषित है।</p>	1	4
22	<p><math>\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 5 = 5</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax + b) = 2a + b.</math></p> <p>क्योंकि <math>f</math> एक सतत फलन है।</p> <p><math>\therefore 2a + b = 5 \quad \dots(i)</math></p> <p>अब <math>\lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10^-} (ax + b) = 10a + b</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10^+} 21 = 21</math></p> <p>क्योंकि <math>f</math> एक सतत फलन है।</p> <p><math>\therefore 10a + b = 21 \quad \dots(ii)</math></p> <p>(i) तथा (ii) हल करने पर <math>a = 2</math> and <math>b = 1</math></p>	<p><math>1\frac{1}{2}</math></p> <p><math>1\frac{1}{2}</math></p> <p>1</p>	4
23.	<p><math>y = x^{\cos x} + \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}</math></p> <p><math>\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{\cos x}) + \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right) \quad \dots(i)</math></p> <p>मान लीजिए <math>u = x^{\cos x}</math></p> <p><math>\therefore \log u = \cos x \cdot \log x</math></p> <p><math>\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} = \cos x \cdot \frac{1}{x} + \log x (-\sin x)</math></p> <p><math>\Rightarrow \frac{du}{dx} = x^{\cos x} \left[ \frac{\cos x}{x} - \sin x \cdot \log x \right] \quad \dots(ii)</math></p> <p><math>\frac{d}{dx} \left[ \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right]</math></p> <p><math>= \frac{(x^2 - 1)(2x) - (x^2 + 1)(2x)}{(x^2 - 1)^2}</math></p> <p><math>= \frac{4x}{(x^2 - 1)^2} \quad \dots(iii)</math></p>	<p><math>\frac{1}{2}</math></p> <p>2</p> <p>1</p>	

	(i), (ii) तथा (iii) से हम प्राप्त करते हैं: $\frac{dy}{dx} = x^{\cos x} \left[ \frac{\cos x}{x} - \sin x \cdot \log x \right] - \frac{4x}{(x^2 - 1)^2}$	$\frac{1}{2}$	4												
24.	$f'(x) = -6x^2 - 18x - 12$ $= -6(x^2 + 3x + 2) = -6(x+2)(x+1)$ <p>वर्धमान तथा ह्रासमान फलन के लिए</p> $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -2, -1.$ <p><math>\therefore</math> अन्तराल हैं <math>(-\infty, -2], (-2, -1], (-1, \infty]</math></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>अन्तराल</th> <th><math>f'(x)</math> का चिन्ह</th> <th>निष्कर्ष</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>(-\infty, -2]</math></td> <td><math>(-)(-)(-) = -ve</math></td> <td>f ह्रासमान है</td> </tr> <tr> <td><math>[-2, -1)</math></td> <td><math>(-)(+)(-) = +ve</math></td> <td>f वर्धमान है</td> </tr> <tr> <td><math>[-1, \infty)</math></td> <td><math>(-)(+)(+) = -ve</math></td> <td>f ह्रासमान है</td> </tr> </tbody> </table> <p><math>\therefore</math> f <math>[-2, -1)</math> में वर्धमान है तथा <math>(-\infty, -2] \cup [-1, \infty)</math> में ह्रासमान</p> <p style="text-align: center;"><b>अथवा</b></p> <p>जब <math>x = 3, y = 22.</math></p> $\frac{dy}{dx} = 2x + 4.$ $\frac{dy}{dt} \text{ at } x = 3 \text{ पर} = 10$ <p><math>\therefore</math> स्पर्श रेखा का समीकरण हैं:</p> $(y - 22) = 10(x - 3)$ $\Rightarrow 10x - y = 8.$ <p>स्पर्श रेखा को x-अक्ष के समांतर होने के लिए</p>	अन्तराल	$f'(x)$ का चिन्ह	निष्कर्ष	$(-\infty, -2]$	$(-)(-)(-) = -ve$	f ह्रासमान है	$[-2, -1)$	$(-)(+)(-) = +ve$	f वर्धमान है	$[-1, \infty)$	$(-)(+)(+) = -ve$	f ह्रासमान है	$\frac{1}{2}$  $\frac{1}{2}$  1  $\frac{1}{2}$  $\frac{1}{2}$  $\frac{1}{2}$  1	
अन्तराल	$f'(x)$ का चिन्ह	निष्कर्ष													
$(-\infty, -2]$	$(-)(-)(-) = -ve$	f ह्रासमान है													
$[-2, -1)$	$(-)(+)(-) = +ve$	f वर्धमान है													
$[-1, \infty)$	$(-)(+)(+) = -ve$	f ह्रासमान है													



	$\Rightarrow v + x \frac{dv}{dx} = \frac{1+3v}{1-v}$ $\Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{1+3v}{1-v} - v = \frac{(1+v)^2}{1-v}$ $\Rightarrow \frac{1-v}{(1+v)^2} dv = \frac{dx}{x}$ $\therefore \int \frac{1-v}{(1+v)^2} dv = \int \frac{dx}{x}$ $\Rightarrow 2 \int \frac{1}{(1+v)^2} dv - \int \frac{1}{(1+v)} dv = \log x + c_1$ $\Rightarrow \frac{-2}{1+v} - \log 1+v  = \log x + c_1$ $\frac{-2x}{x+y} - \log \left  \frac{x+y}{x} \right  - \log x = c_1$ $\frac{-2x}{x+y} - \left[ \log \left  \frac{x+y}{x} \cdot x \right  \right] = c$ $\Rightarrow \frac{2x}{x+y} + \log x+y  = c_1 \text{ (जहाँ } c_1 = -c \text{)}$	1	1	1	4
27.	<p>मान लीजिए <math>\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}</math></p> $\vec{b} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ $\vec{c} = \lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ <p><math>\therefore \vec{b} + \vec{c} = (2 + \lambda)\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}</math>.</p> $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 + \lambda & 6 & -2 \end{vmatrix}$ $= \hat{i}(-2-6) - \hat{j}(-2-2-\lambda) + \hat{k}(6-2-\lambda)$ $= -8\hat{i} + (4+\lambda)\hat{j} + (4-\lambda)\hat{k}$	$\frac{1}{2}$	1		

	$ \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})  = \sqrt{(-8)^2 + (4+x)^2 + (4-1)^2}$ $= \sqrt{2\lambda^2 + 96}.$ <p>अब <math>\sqrt{2\lambda^2 + 96} = 2\sqrt{26}.</math></p> $\Rightarrow \sqrt{2\lambda^2 + 96} = 104$ $\Rightarrow 2\lambda^2 = 8$ $\Rightarrow \lambda^2 = 4$ $\Rightarrow \lambda = \pm 2$	<p>1</p> <p>1</p> <p><math>\frac{1}{2}</math></p>	<p>4</p>
<p>28.</p>	$I = \int \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3}} dx$ $= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}}} dx$ $= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{(x - 5/4)^2 - (1/4)^2}} dx.$ $= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \log \left  \left( x - \frac{5}{4} \right) + \sqrt{x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}} \right  + c_1$ $= \frac{1}{\sqrt{2}} \log  4x - 5 + 2\sqrt{2} \sqrt{2x^2 - 5x + 3}  + C$ <p>जहाँ <math>C = c_1 - \log 4</math></p> <p><b>अथवा</b></p> $I = \int \frac{3x+2}{(x-1)(2x+3)}$ <p>पुनः मान लीजिए <math>\frac{3x+2}{(x-1)(2x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{2x+3}</math></p> $\Rightarrow 3x+2 = A(2x+3) + B(x-1)$ <p><math>x = -3/2</math> रखने पर हमें <math>B = 1</math> प्राप्त होता है।</p> <p>और <math>x = 1</math>, रखने पर <math>A = 1</math> प्राप्त होता है।</p> $\therefore I = \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{2x+3} dx$	<p><math>\frac{1}{2}</math></p> <p><math>1\frac{1}{2}</math></p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p>	

	$= \log x-1  + \frac{\log 2x+3 }{2} + c.$	2	4
29.	<p>मान लीजिए <math>A = \begin{bmatrix} 1 &amp; -1 &amp; 2 \\ 3 &amp; 4 &amp; -5 \\ 2 &amp; -1 &amp; 3 \end{bmatrix}</math>, <math>x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}</math>, <math>B = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 12 \end{bmatrix}</math></p> <p><math>\therefore AX = B</math></p> <p>i.e <math>X = A^{-1}B.</math> (i)</p> <p><math> A  = \begin{vmatrix} 1 &amp; -1 &amp; 2 \\ 3 &amp; 4 &amp; -5 \\ 2 &amp; -1 &amp; 3 \end{vmatrix} = 1(12-5) + 1(9+10) + 2(-3-8)</math></p> <p><math>= 7 + 19 - 22 = 4 \neq 0.</math></p> <p><math>\therefore A^{-1}</math> का अस्तित्व है।</p> <p>A का सहखंडज <math>= \begin{bmatrix} 7 &amp; 1 &amp; -3 \\ -19 &amp; -1 &amp; 11 \\ -11 &amp; -1 &amp; 7 \end{bmatrix}</math></p> <p><math>\therefore A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 7 &amp; 1 &amp; -3 \\ -19 &amp; -1 &amp; 11 \\ -11 &amp; -1 &amp; 7 \end{bmatrix}</math></p> <p><math>\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 7 &amp; 1 &amp; -3 \\ -19 &amp; -1 &amp; 11 \\ -11 &amp; -1 &amp; 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}</math></p> <p><math>= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}</math></p> <p><math>\Rightarrow x = 2, \quad y = 1, \quad z = 3,</math></p> <p><b>अथवा</b></p> <p>मान लीजिए <math>A = \begin{bmatrix} 2 &amp; 3 &amp; 1 \\ 2 &amp; 8 &amp; 1 \\ 3 &amp; 7 &amp; 2 \end{bmatrix}</math></p> <p>मान लीजिए <math>A = IA</math></p>	1	1
		2	
		$\frac{1}{2}$	
		1	
		$\frac{1}{2}$	
		$\frac{1}{2}$	

$$\text{i.e. } \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A.$$

$R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1$  का उपयोग करने पर

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$\frac{1}{2}$

$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$  और  $R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1$  का प्रयोग करते हुए

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 5/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

1

$R_2 \rightarrow \frac{1}{5}R_2$  के प्रयोग से

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/5 & 1/5 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

1

$R_1 \rightarrow R_1 - \frac{3}{2}R_2$  और  $R_3 \rightarrow R_3 - \frac{5}{2}R_2$  के प्रयोग से

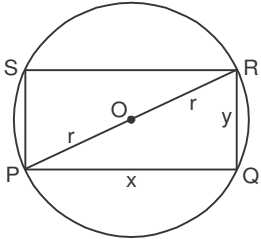
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/10 & 0 \\ -1/5 & 1/5 & 0 \\ -1 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} A$$

1

$R_3 \rightarrow 2R_3$  के प्रयोग से

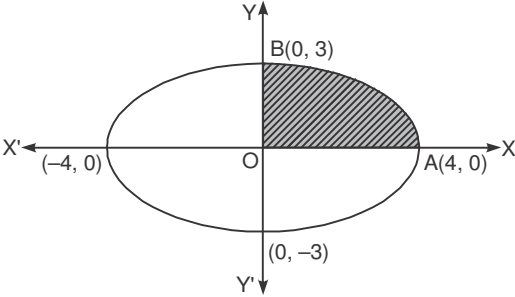
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/10 & 0 \\ -1/5 & 1/5 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} A$$

1

	<p><math>R_1 \rightarrow R_1 - \frac{1}{2}R_3</math> के प्रयोग से</p> $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} & \frac{1}{5} & -1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} A$ <p>अतः <math>A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} &amp; \frac{1}{5} &amp; -1 \\ -\frac{1}{5} &amp; \frac{1}{5} &amp; 0 \\ -2 &amp; -1 &amp; 2 \end{bmatrix}</math></p>	1	6
30.	 <p>A (आयत का क्षेत्रफल) = <math>x \cdot y</math> ... (i)</p> <p><math>\Delta PQR</math> में, <math>x^2 + y^2 = 4r^2</math></p> $\Rightarrow y = \sqrt{4r^2 - x^2}$ ... (ii) $\therefore A = x\sqrt{4r^2 - x^2}$ <p>मान लीजिए <math>Z = A^2 = x^2(4r^2 - x^2)</math></p> <p>i.e <math>Z = 4r^2x^2 - x^4</math></p> $\frac{dZ}{dx} = 8r^2x - 4x^3$ <p>उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ के लिए</p> $8r^2x - 4x^3 = 0$ $4x(2r^2 - x^2) = 0$ $\Rightarrow x = 0 \quad \text{or} \quad x = \sqrt{2}.r$ <p><math>x = 0</math> सम्भव नहीं हैं</p>	<p>सही आकृति के लिए</p> <p><math>\frac{1}{2}</math> अंक</p> <p><math>\frac{1}{2}</math></p> <p><math>\frac{1}{2}</math></p> <p>1</p> <p>1</p>	



	$\frac{d^2Z}{dx^2} = 8r^2 - 12x^2$ <p><math>x = \sqrt{2}.r</math> के लिए <math>\frac{d^2Z}{dx^2}</math> ऋणात्मक है।</p> <p><math>x = \sqrt{2}.r</math> के लिए <math>Z = A^2</math> अधिकतम (उच्चिष्ठ) है।</p> <p>(ii) से हम प्राप्त करते हैं <math>y = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = \sqrt{2}.r</math></p> <p>अतः क्षेत्रफल अधिकतम होगा यदि <math>x = y</math></p> <p style="text-align: center;"><b>अथवा</b></p> <p>मान लीजिए कि सीट के प्रत्येक कोने से कटे जाने वाले वर्ग की भुजा <math>x</math> है।</p> <p><math>V</math> (बॉक्स का आयतन) = <math>(45 - 2x)(24 - 2x)(x)</math></p> $V = 4x^3 - 138x^2 + 1080x.$ $\frac{dV}{dx} = 12x^2 - 276x + 1080$ <p>अधिकतम अथवा न्यूनतम के लिए</p> $\frac{dV}{dx} = 0$ $\Rightarrow 12x^2 - 276x + 1080 = 0$ $\Rightarrow x^2 - 23x + 90 = 0$ $\Rightarrow (x - 18)(x - 5) = 0$ $\Rightarrow x = 5 \text{ or } x = 18 \text{ (सम्भव नहीं हैं)}$ $\frac{d^2V}{dx^2} = 24x - 276$ <p><math>x = 5</math> के लिए <math>\frac{d^2V}{dx^2}</math> ऋणात्मक है।</p> <p><math>\therefore x = 5</math> के लिए <math>V</math> अधिकतम है।</p> <p>अतः काटे जाने वाले वर्ग की अभीष्ट भुजा 5 सेमी है।</p>	<p>1</p> <p><math>\frac{1}{2}</math></p> <p><math>\frac{1}{2}</math></p> <p>1</p> <p><math>\frac{1}{2}</math></p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p><math>\frac{1}{2}</math></p>	<p>1</p> <p>6</p>
--	---	--	-------------------

<p>31.</p>	 <p>वांछित क्षेत्रफल = 4 × क्षेत्रफल OAB</p> $= 4 \int_0^4 \frac{3}{4} \sqrt{16-x^2} dx.$ $= 3 \left[ \frac{x}{2} \sqrt{16-x^2} + 8 \sin^{-1} \left( \frac{x}{4} \right) \right]_0^4$ $= 3 \left[ 0 + 8 \sin^{-1}(1) - 0 + 8 \sin^{-1}(0) \right]$ $= 3 \left[ \frac{8\pi}{2} \right]$ $= 12\pi \text{ वर्ग इकाई}$	<p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p>	<p>6</p>
<p>32.</p>	<p>मान लीजिए <math>a(x-1)+b(y-2)+c(z+4)=0</math> (1) ... (i)</p> <p>वांछित समतल की समीकरण है, क्योंकि समतल दी हुई रेखाओं के साथ लम्बवत् है।</p> $\therefore 2a+3b+6c=0 \quad \dots(\text{ii})$ $a+b-c=0 \quad \dots(\text{iii})$ $\frac{a}{-3-6} = \frac{b}{6+2} = \frac{c}{2-3}$ $\Rightarrow \frac{a}{-9} = \frac{b}{8} = \frac{c}{-1}$ $\frac{a}{9} = \frac{b}{-8} = \frac{c}{1} = \lambda \text{ (मान लीजिए)}$ $\therefore a=9\lambda, \quad b=-8\lambda, \quad c=\lambda$ <p>a, b, c का मान (i) में प्रतिस्थापित करने पर</p> $9\lambda(x-1)-8\lambda(y-2)+\lambda(z+4)=0$ $\Rightarrow 9x-8y+z+11=0.$	<p>2</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p>	<p>6</p>
<p>33.</p>	<p>मान लीजिए कि <math>x</math> नटों के पैकेटों और 4 बोल्टों के पैकेटों की संख्या को दर्शाता है।</p>		

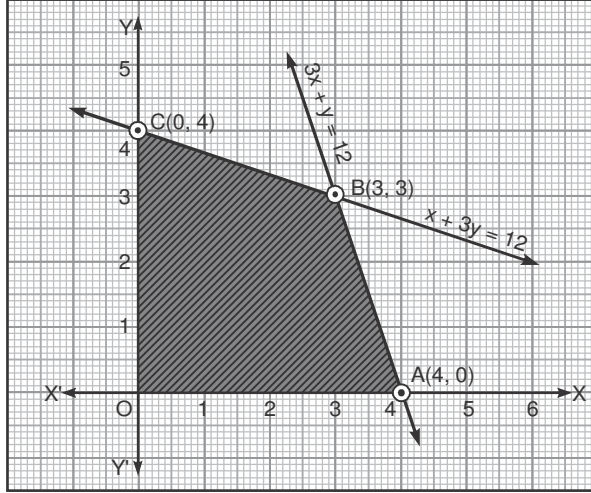
निम्न प्रतिबंधों के अन्तर्गत,  $z = 20x + 10y$

का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।

$$x + 3y \leq 12$$

$$3x + y \leq 12$$

$$x > 0, y > 0.$$



सुसंगत क्षेत्र के कोनों के बिन्दु हैं।

$$O(0,0), A(4,0), B(3,3), C(0,4)$$

$$O(0,0) \text{ पर } Z = 0 + 0 = 0$$

$$A(4,0) \text{ पर } Z = 20 \times 4 + 10 \times 0 = 80$$

$$B(3,3) \text{ पर } Z = 20 \times 3 + 10 \times 3 = 60 + 30 = 90.$$

$$Z \text{ at } (0,4) = 20 \times 0 + 10 \times 4 = 0 + 40 = 40$$

अतः अधिकतम लाभ के लिए नट और बोल्ट दोनों के तीन-तीन

पैकेट बनाने चाहिए।

$$\frac{1}{2}$$

$$1\frac{1}{2}$$

सही ग्राफ 2 अंक

$$\frac{1}{2}$$

1

$$\frac{1}{2}$$

6