# 5

# त्रिभुज की भुजाओं एवं कोणों में संबंध

पिछले पाठ में हमने वास्तविक संख्याओं के त्रिकोणमितीय फलन और उनके सम्बन्धों के विषय में सीखा है। हमने त्रिकोणमितीय फलनों का ग्राफ खींचना और उनके आलेखों से उनके गुणों का अध्ययन करना भी सीखा है। हमने त्रिकोणमितीय फलनों के योग व अन्तर तथा वास्तविक संख्याओं के गुणजों तथा अपवर्तकों के त्रिकोणमितीय फलनों का भी अध्ययन किया है।

इस अध्याय में हम कुछ परिणामों को स्थापित करने का प्रयास करेंगे जो एक त्रिभुज की भुजाओं तथा कोणों के बीच सम्बन्धों को बतायेंगे जो त्रिभुजों के अज्ञात भागों को ज्ञात करने में सहायता करेंगे।

## उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- साइन-सूत्र, कोसाइन-सूत्र तथा प्रक्षेप-सूत्र का व्युत्पन्न करना
- इन सूत्रों को प्रश्नों को हल करने में उपयोग करना

## पूर्व ज्ञान

- त्रिकोणमितीय फलन की जानकारी
- त्रिकोणमितीय फलनों के योग व अन्तर के सूत्र
- वास्तविक संख्याओं के गुणज व अपवर्तक के त्रिकोणमितीय फलन

## 5.1 ज्या सूत्र

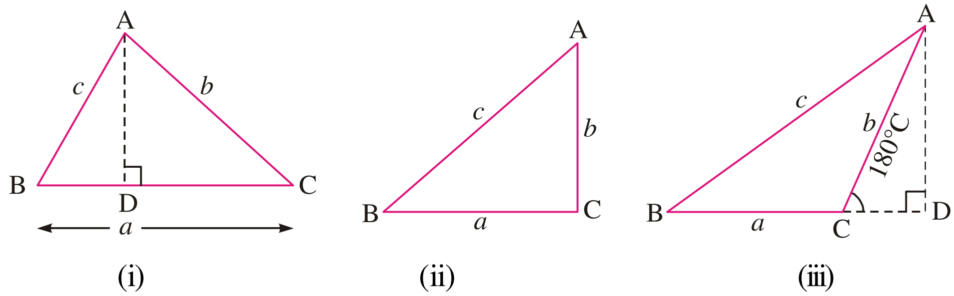
$\Delta ABC$ में, शीर्ष A, B और C के संगत कोणों को A, B तथा C से प्रदर्शित किया जाता है और इसके शीर्षों की सम्मुख भुजाओं को क्रमशः a, b तथा c से प्रदर्शित करते हैं।

यह कोण तथा भुजाएँ मिलकर त्रिभुज के छः अवयव कहलाते हैं।

सिद्ध कीजिए कि किसी त्रिभुज में, भुजाओं की लम्बाईयां सम्मुख भुजाओं के कोणों के साइन के अनुपात में होती है

अर्थात् $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

**उपपत्तिः** $\Delta ABC$ में, चित्र 5.1 [ (i), (ii) और (iii)] में $BC = a, CA = b$ और $AB = c$ और $\angle C$ चित्र (i) में एक न्यूनकोण, (ii) में समकोण तथा (iii) में अधिक कोण है।




चित्र 5.1

AD, BC पर लम्ब खींचिए (अथवा BC को, आवश्यकता होने पर, बढ़ाइए)

चित्र 5.1 (i) में $\Delta ABC$ में, $\frac{AD}{AB} = \sin B$ या $\frac{AD}{c} = \sin B \Rightarrow AD = c \sin B$ .....(i)

$\Delta ADC, \frac{AD}{AC} = \sin C$ [चित्र 5.1 (i)] या $\frac{AD}{b} = \sin C \Rightarrow AD = b \sin C$ ....(ii)

और चित्र 5.1 (ii) में, $\frac{AD}{AC} = 1 = \sin\frac{\pi}{2} = \sin C$ और $\frac{AD}{AB} = \sin B$

$AD = b \sin C$ और $AD = c \sin B$

और चित्र 5.1 (iii) में, $\frac{AD}{AC} = \sin(\pi - C) = \sin C$ और $\frac{AD}{AB} = \sin B$

या $\frac{AD}{b} = \sin C$ या $AD = b \sin C$ और $AD = C \sin B$

अत: इन तीनों चित्रों में, $AD = b \sin C$ और $AD = c \sin B$ ....(iii)

अत: (iii) से हमें प्राप्त हुआ

$$c \sin B = b \sin C \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad ....(iv)$$

इसी प्रकार, c से AB पर लम्ब खींच कर हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad .....(v)$$

(iv) और (v) से हमें प्राप्त हुआ

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad .....(A)$$

(A) ज्या-सूत्र कहलाता है।

**टिप्पणी:** (A) को प्राय: इस प्रकार भी लिखा जाता है :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad ....(A')$$

(A) तथा (A') के संबंध अज्ञात कोणों और भुजाओं को ज्ञात करने में हमारी सहायता करते हैं जब कुछ दूसरे कोण या भुजाएं दी हुई हों।

आइए कुछ उदाहरण लें।

**उदाहरण 5.1.** ज्या-सूत्र का उपयोग करके सिद्ध कीजिए कि $a\cos\frac{B-C}{2}=(b+c)\sin\frac{A}{2}$

**हल :** हम जानते हैं कि $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$ (माना)

$\Rightarrow \quad a=k\sin A,\ b=k\sin B,\ c=k\sin C$

$\therefore$ दायाँ पक्ष $=k(\sin B+\sin C)\cdot\sin\frac{A}{2}=k\cdot 2\sin\frac{B+C}{2}\cdot\cos\frac{B-C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}$

अब $\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2} \qquad (\because\ A+B+C=\pi)$

$\therefore \quad \sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2}$

$\therefore$ दायाँ पक्ष $=2k\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B-C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}=k\cdot\sin A\cdot\cos\frac{B-C}{2}=a\cdot\cos\frac{B-C}{2}=$ बायाँ पक्ष

**उदाहरण 5.2.** ज्या-सूत्र का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि $a(\cos C-\cos B)=2(b-c)\cos^2\frac{A}{2}$

**हल :** हम जानते हैं कि $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$ (माना)

$\Rightarrow \quad a=k\sin A,\ b=k\sin B,\ c=k\sin C$

$\therefore$ दायाँ पक्ष $=2k(\sin B-\sin C)\cdot\cos^2\frac{A}{2}=2k\cdot 2\cos\frac{B+C}{2}\cdot\sin\frac{B-C}{2}\cdot\cos^2\frac{A}{2}$

$$=4k\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B-C}{2}\cdot\cos^2\frac{A}{2}=2a\sin\frac{B-C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}$$

$$=2a\sin\frac{B+C}{2}\cdot\sin\frac{B-C}{2}=a(\cos C-\cos B)=$$ बायाँ पक्ष

**उदाहरण 5.3.** $\Delta ABC$ में, सिद्ध कीजिए कि $a\sin A-b\sin B=c\sin(A-B)$

**हल :** हम जानते हैं कि $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$ (माना)

बायाँ पक्ष $=k\sin A\cdot\sin A-k\sin B\cdot\sin B=k\left[\sin^2 A-\sin^2 B\right]$

$$=k\sin(A+B)\cdot\sin(A-B)$$

$A+B=\pi-C\Rightarrow \sin(A+B)=\sin C$

$\therefore$ बायाँ पक्ष $=k\sin C\cdot\sin(A-B)=c\sin(A-B)=$ दायाँ पक्ष

**उदाहरण 5.4.** किसी त्रिभुज में, सिद्ध कीजिए कि $a(b\cos C-c\cos B)=b^2-c^2$

हल: हम जानते हैं कि $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$ (माना)

बायाँ पक्ष $=k\sin A(k\sin B\cos C-k\sin C\cos B)=k^2\cdot\sin A[\sin(B-C)]$

$$= k^2 \cdot \sin(B+C) \cdot \sin(B-C) \qquad [\because \sin A = \sin(B+C)]$$

$$= k^2(\sin^2 B - \sin^2 C) = k^2 \sin^2 B - k^2 \sin^2 C = b^2 - c^2 = \text{ दायाँ पक्ष}$$

## देखें आपने कितना सीखा 5.1

1. साइन-सूत्र का उपयोग करके सिद्ध कीजिए कि :

(i) $\dfrac{\tan \dfrac{A-B}{2}}{\tan \dfrac{A+B}{2}} = \dfrac{a-b}{a+b}$ (ii) $b\cos B + c\cos C = a\cos(B-C)$

(iii) $a\sin \dfrac{B-C}{2} = (b-c)\cos \dfrac{A}{2}$ (iv) $\dfrac{b+c}{b-c} = \tan \dfrac{B+C}{2} \cdot \cot \dfrac{B-C}{2}$

(v) $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2a\sin B \sin C$

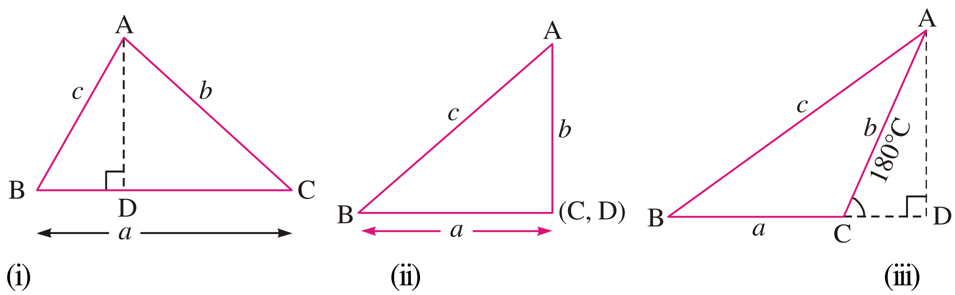
2. किसी त्रिभुज में, यदि $\dfrac{a}{\cos A} = \dfrac{b}{\cos B}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज है।

## 5.2 कोज्या-सूत्र

किसी त्रिभुज में सिद्ध कीजिए कि

(i) $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ (ii) $\cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$ (iii) $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

**उपपत्तिः**




चित्र 5.2

तीन स्थितियां उत्पन्न होती हैं जब

(i) $\angle C$ न्यून कोण है (ii) $\angle C$ एक समकोण है (iii) $\angle C$ एक अधिक कोण है।

आइए प्रत्येक स्थिति पर विचार करें।

**स्थिति (i)** जब $\angle C$ एक न्यून कोण है

$$\frac{AD}{AC} = \sin C \quad \Rightarrow \quad AD = b\sin C$$

और $BD = BC - DC = a - b\cos C$ $\left[\because \dfrac{DC}{b} = \cos C\right]$

चित्र 5.2 (i) से, $c^2 = (b \sin C)^2 + (a - b\cos C)^2$

$$= b^2 \sin^2 C + a^2 + b^2 \cos^2 C - 2ab\cos C = a^2 + b^2 - 2\,ab\,\cos C$$

$$\Rightarrow \qquad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab}$$

**स्थिति (ii)** जब $\angle C = \frac{\pi}{2}$, $c^2 = AD^2 + BD^2 = b^2 + a^2$

क्योंकि $\qquad C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos C = 0$

$$\therefore \qquad c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos C \;\Rightarrow\; \cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}$$

**स्थिति (iii)** जब $\angle C$ एक अधिक कोण है

$$\frac{AD}{AC} = \sin(\pi - C) = \sin C \qquad \therefore\; AD = b \sin C$$

और $\qquad BD = BC + CD = a + b\cos(180° - C) = a - b\cos C$

$$\therefore \qquad c^2 = (b\sin C)^2 + (a - b\cos C)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$\Rightarrow \qquad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$\therefore$ सभी तीनों स्थितियों में, $\quad \cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

इसी प्रकार, यह भी सिद्ध किया जा सकता है कि $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$ और $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

आइए कुछ उदाहरण लें और इनकी उपयोगिता को देखें।

**उदाहरण 5.5.** त्रिभुज ABC में, सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{\cos A}{a} + \dfrac{\cos B}{b} + \dfrac{\cos C}{c} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$

**हल :** हम जानते हैं कि $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$, $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

$\therefore$ बायाँ पक्ष $= \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,abc} + \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2\,abc} + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,abc}$

$= \dfrac{1}{2\,abc}\left[b^2 + c^2 - a^2 + c^2 + a^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2\right] = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2\,abc} =$ दायाँ पक्ष

**उदाहरण 5.6.** यदि $\angle A = \frac{\pi}{3}$, सिद्ध कीजिए कि $\Delta ABC$ में $(a + b + c)(b + c - a) = 3bc$

**हल :** $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad$ .....(i)

$$A=\frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos A=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

(i) को हम लिख सकते हैं : $\frac{1}{2}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad \Rightarrow \quad b^2+c^2-a^2=bc$

या $\quad b^2+c^2+2bc-a^2=3bc$ या $(b+c)^2-a^2=3bc$

या $\quad (b+c+a)(b+c-a)=3bc$.

**उदाहरण 5.7.** यदि एक त्रिभुज की भुजाएँ 3 सेमी, 5 सेमी और 7 सेमी हों, तो त्रिभुज का सबसे बड़ा कोण ज्ञात कीजिए।

**हल :** यहाँ पर, $a = 3$ सेमी, $b = 5$ सेमी, $c = 7$ सेमी

हम जानते हैं कि एक त्रिभुज में सबसे बड़ी भुजा का सम्मुख कोण सबसे बड़ा होता है।

$\therefore \quad \angle C$ सबसे बड़ा कोण है

$$\therefore \quad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{9+25-49}{30}=\frac{-15}{30}=\frac{-1}{2}$$

$$\therefore \quad \cos C=\frac{-1}{2} \quad \Rightarrow \quad C=\frac{2\pi}{3}$$

$\therefore$ त्रिभुज का सबसे बड़ा कोण $\frac{2\pi}{3}$ अथवा $120°$ है।

**उदाहरण 5.8.** $\Delta ABC$ में, यदि $\angle A=\frac{\pi}{3}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$.

हल: $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ या $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$\therefore \quad b^2+c^2-a^2=bc$$

या
$$b^2+c^2=a^2+bc \qquad \text{.....(i)}$$

बायाँ पक्ष $=\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{ab+b^2+c^2+ac}{(c+a)(a+b)}=\frac{ab+a^2+bc+ac}{(c+a)(a+b)}$ [(i) के उपयोग से]

$$=\frac{ab+a^2+ac+bc}{(c+a)(a+b)}=\frac{a(a+b)+c(a+b)}{(a+c)(a+b)}=\frac{(a+c)(a+b)}{(a+c)(a+b)}=1$$ = दायाँ पक्ष

## देखें आपने कितना सीखा 5.2

1. $\Delta ABC$ में सिद्ध कीजिए कि

(i) $\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=0$

(ii) $(a^2-b^2+c^2)\tan B=(b^2-c^2+a^2)\tan C=(c^2-a^2+b^2)\tan A$

(iii) $\frac{k}{2}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$ जहाँ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$

(iv) $\left(b^2-c^2\right)\cot A+\left(c^2-a^2\right)\cot B+\left(a^2-b^2\right)\cot C=0$

2. एक त्रिभुज की भुजाएं क्रमशः $a = 9$ सेमी, $b = 8$ सेमी $c = 4$सेमी है। सिद्ध कीजिए कि

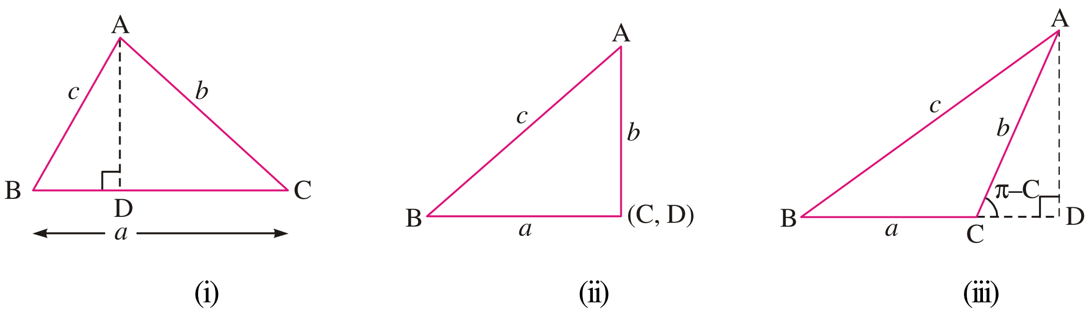
$$6\cos C=4+3\cos B$$

## 5.3 प्रक्षेप सूत्र

$\Delta ABC$ में, यदि $BC=a, CA=b$ और $AB=c$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $a=b\cos C+c\cos B$ (ii) $b=c\cos A+a\cos C$ (iii) $c=a\cos B+b\cos A$

**उपपत्तिः**




चित्र 5.3

पिछले परिणाम की तरह, यहां पर भी तीन स्थितियां उत्पन्न होती हैं। हम एक-एक करके प्रत्येक स्थिति का वर्णन करेंगे।

स्थिति (i) जब $\angle C$ न्यून कोण है:

$\Delta ADB$ में, $\frac{BD}{c}=\cos B \quad\Rightarrow\quad BD=c\cos B$

$\Delta\ ADC$ में, $\frac{DC}{b}=\cos C \quad\Rightarrow\quad DC=b\cos C$

$a = BD + DC = c\cos B + b\cos C$

$\therefore \quad a = c\cos B + b\cos c$

स्थिति (ii) जब $\angle C=\frac{\pi}{2}$

$$a=BC=\frac{BC}{AB}\cdot AB=\cos B\cdot c$$

$$=c\cos B+0 \quad =c\cos B+b\cos\frac{\pi}{2} \qquad \left(\because \cos\frac{\pi}{2}=0\right)$$

$$=c\cos B+b\cos C$$

स्थिति (iii) जब $\angle C$ अधिक कोण है:

$\Delta\ ADB$ में, $\frac{BD}{c}=\cos B \Rightarrow BD=c\cos B$

$\Delta$ ADC में, $\dfrac{CD}{b} = \cos(\pi - C) = -\cos C \Rightarrow CD = -b\cos C$

चित्र 5.3 (iii) में, $BC = BD - CD$

$$a = c\cos B - (-b\cos C) = c\cos B + b\cos C$$

अतः सभी स्थितियों में, $a = b\cos C + c\cos B$

इसी प्रकार, हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$b = c\cos A + a\cos C \quad \text{और} \quad c = a\cos B + b\cos A$$

आइए कुछ उदाहरण लेकर इन परिणामों का उपयोग दिखाएँ।

**उदाहरण 5.9.** किसी त्रिभुज ABC में, सिद्ध कीजिए कि

$$(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C = a+b+c$$

**हल :** बायाँ पक्ष $= b\cos A + c\cos A + c\cos B + a\cos B + a\cos C + b\cos C$

$= (b\cos A + a\cos B) + (c\cos A + a\cos C) + (c\cos B + b\cos C)$

$= c + b + a \quad = a + b + c =$ दायाँ पक्ष

**उदाहरण 5.10.** किसी $\Delta ABC$ में, सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{\cos 2A}{a^2} - \dfrac{\cos 2B}{b^2} = \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}$

**हल :** बायाँ पक्ष $= \dfrac{1-2\sin^2 A}{a^2} - \dfrac{1-2\sin^2 B}{b^2} = \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{2\sin^2 A}{a^2} - \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{2\sin^2 B}{b^2}$

$= \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2} - 2k^2 + 2k^2 \qquad \left(\because \dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = k\right)$

$= \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2} =$ दायाँ पक्ष

**उदाहरण 5.11.** $\Delta ABC$ में, यदि $a\cos A = b\cos B$ जहां $a \neq b$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\Delta ABC$ एक समकोण त्रिभुज है।

**हल :** दिया है : $a\cos A = b\cos B$

$$\therefore \quad a\left[\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right] = b\left[\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right]$$

या $\quad a^2(b^2+c^2-a^2) = b^2(a^2+c^2-b^2)$ या $a^2b^2 + a^2c^2 - a^4 = a^2b^2 + b^2c^2 - b^4$

या $\quad c^2(a^2-b^2) = (a^2-b^2)(a^2+b^2) \Rightarrow c^2 = a^2+b^2$

$\therefore \quad \Delta ABC$ एक समकोण त्रिभुज है।

**उदाहरण 5.12.** यदि $a=2, b=3, c=4$ हो, तो $\cos A, \cos B$ और $\cos C$ का मान ज्ञात कीजिए।

**हल :** $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{9+16-4}{2\times3\times4} = \dfrac{21}{24} = \dfrac{7}{8}$

$\cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ac} = \dfrac{16+4-9}{2\times4\times2} = \dfrac{11}{16}$ और $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \dfrac{4+9-16}{2\times2\times3} = \dfrac{-3}{12} = \dfrac{-1}{4}$

## देखें आपने कितना सीखा 5.3

1. यदि $a=3, b=4$ और $c=5$ हो, तो $\cos A, \cos B$ तथा $\cos C$ का मान ज्ञात कीजिए।

2. एक त्रिभुज की भुजाएँ क्रमशः 7 सेमी, $4\sqrt{3}$ सेमी, तथा $\sqrt{13}$ सेमी है। त्रिभुज के सबसे छोटे कोण का माप ज्ञात कीजिए।

3. यदि $a : b : c = 7 : 8 : 9$, तो सिद्ध कीजिए कि $\cos A : \cos B : \cos C = 14 : 11 : 6$

4. यदि एक त्रिभुज की भुजाएँ क्रमशः $x^2+x+1$, $2x+1$ और $x^2-1$ हैं, तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज का सबसे बड़ा कोण $\dfrac{2\pi}{3}$ है।

5. एक त्रिभुज में, $b\cos A = a\cos B$, सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज है।

6. प्रक्षेप-सूत्र से साइन-सूत्र को व्युत्पन्न (deduce) कीजिए।

## आइये दोहराएँ

निम्न सूत्रों की सहायता से एक त्रिभुज के अज्ञात अवयवों को ज्ञान कर पाना सम्भव है यदि त्रिभुज के अनुरूप अवयव दिए हुए हों।

**ज्या सूत्र**

(i) $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

**कोज्या सूत्र**

(ii) $$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

**प्रक्षेप सूत्र**

$$a = b\cos C + c\cos B, \quad b = c\cos A + a\cos C, \quad c = a\cos B + b\cos A$$

## सहायक वेबसाइट

- *www.mathopenref.com/trianglesideangle.html*
- *http://en.wikipedia.org/wiki/Solution_of_triangles*
- *www.themathpage.com/abookI/propI-18-19.htm*

## आइए अभ्यास करें

एक त्रिभुज ABC में, निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए (1-10)

1. $a\sin(B-C) + b\sin(C-A) + c\sin(A-B) = 0$

2. $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2a\sin B\sin C$

3. $\dfrac{b^2-c^2}{a^2}\cdot\sin 2A + \dfrac{c^2-a^2}{b^2}\cdot\sin 2B + \dfrac{a^2-b^2}{c^2}\cdot\sin 2C = 0$

4. $\dfrac{c^2+a^2}{b^2+c^2} = \dfrac{1+\cos B\cos(C-A)}{1+\cos A\cos(B-C)}$

5. $\dfrac{c-b\cos A}{b-c\cos A} = \dfrac{\cos B}{\cos C}$

6. $\dfrac{a-b\cos C}{c-b\cos A} = \dfrac{\sin C}{\sin A}$

7. $(a+b+c)\left[\tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2}\right] = 2c\ \cot\dfrac{C}{2}$

8. $\sin\dfrac{A-B}{2} = \dfrac{a-b}{c}\cos\dfrac{C}{2}$

9. (i) $b\cos B + c\cos C = a\cos(B-C)$

   (ii) $a\cos A + b\cos B = c\cos(A-B)$

10. $b^2 = (c-a)^2\cos^2\dfrac{B}{2} + (c+a)^2\sin^2\dfrac{B}{2}$

11. एक त्रिभुज में यदि $b=5, c=6, \tan\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $a=\sqrt{41}$.

12. $\Delta ABC$ में सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{\cos A}{\cos B} = \dfrac{b-a\cos C}{a-b\cos C}$

## उत्तरमाला

### देखें आपने कितना सीखा 5.3

1. $\cos A = \dfrac{4}{5}$, $\cos B = \dfrac{3}{5}$, $\cos C =$ शून्य

2. त्रिभुज का सबसे छोटा कोण $\dfrac{\pi}{6}$ है।