7

कुछ विशेष श्रेणियाँ

मान लीजिए कि आपको प्रत्येक दिन इस प्रकार पत्थर इकट्ठे करने को कहा जाता है कि पहले दिन एक पत्थर लेना है, दूसरे दिन पहले दिन के पत्थरों से दुगुने पत्थर इकट्ठे करने हैं। तीसरे दिन दूसरे दिन के पत्थरों से दुगुने पत्थर इकट्ठे करने हैं तथा इसी प्रकार आगे भी। फिर इन पत्थरों को तिथिनुसार व्यवस्थित करना है तो आपको एक

$1, 2, 2^2, 2^3, ...$ जैसा अनुक्रम प्राप्त होगा

अनुक्रम से हमें एक श्रेणी प्राप्त होती है। उपरोक्त अनुक्रम की संगत श्रेणी $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ...$

एक जानी मानी श्रेणी है जिसे फिबोनाशी (Fibonacci) श्रेणी कहते हैं $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + ...$

इस पाठ में हम कुछ विशेष प्रकार के अनुक्रमों का विस्तार से अध्ययन करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे:

- श्रेणी को परिभाषित करना
- t_n से दिए हुए मान n के लिए श्रेणी के पदों की गणना करना
- अन्तर और गणितीय आगमन के सिद्धान्त का उपयोग करके $\sum n, \sum n^2, \sum n^3$ का मान ज्ञात करना
- साधारण श्रेणी जैसे $1.3 + 3.5 + 5.7 + ...$ n पदों तक, का मान ज्ञात करना

पूर्वज्ञान

- श्रेणी (अनुक्रम) की अवधारणा
- समान्तर श्रेणी तथा गुणोत्तर श्रेणी के n वां पद तथा n पदों तक के योग का ज्ञान
- गुणोत्तर श्रेणी का उपयोग कर आवर्त दशमलव भिन्न को भिन्न संख्या में परिवर्तित करने का ज्ञान

7.1 श्रेणी

$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$ के रूप का व्यंजक श्रेणी कहलाता है, जहां $u_1, u_2, u_3 ..., u_n ...$ सख्याओं का अनुक्रम है। उपर्युक्त श्रेणी को $\sum_{r=1}^{n} u_r$ से निरूपित किया जाता है। यदि n परिमित

हो, तो श्रेणी एक परिमित श्रेणी कहलाती है, अन्यथा अपरिमित कहलाती है। इस प्रकार हम देखते हैं कि एक श्रेणी किसी अनुक्रम से सम्बन्धित होती है।

इस प्रकार श्रेणी एक विशेष नियम के अनुसार व्यवस्थित पदों के योग का अनुक्रम है।

निम्नलिखित संख्याओं के समूहों पर विचार कीजिए–

(a) $1, 6, 11, \ldots$ (b) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \cdots$ (c) $48, 24, 12, \ldots$ (d) $1^2, 2^2, 3^2, \ldots.$

(a), (b), (c), (d) सभी अनुक्रम है, क्योंकि ये पद एक नियम के अनुसार जुड़े हुए हैं। इनकी संगत श्रेणियां इस प्रकार हैं:

$$1 + 6 + 11 + \ldots, \ \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \ldots, \ 48 + 24 + 12 + \ldots, \ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots$$

उदाहरण 7.1. निम्नलिखित प्रत्येक अनुक्रम के प्रथम 6 पदों को लिखिए, जिसका nवां पद है:

(a) $T_n = 2n + 1$, (b) $a_n = n^2 - n + 1$ (c) $f_n = (-1)^n . 5^n$

तत्पश्चात उस अनुक्रम से सम्बन्धित श्रेणी ज्ञात कीजिए।

हल: (a) $T_n = 2n + 1$

$n = 1$ के लिए, $T_1 = 2.1 + 1 = 3$ $n = 2$ के लिए, $T_2 = 2.2 + 1 = 5$

$n = 3$ के लिए, $T_3 = 2.3 + 1 = 7$ $n = 4$ के लिए, $T_4 = 2.4 + 1 = 9$

$n = 5$ के लिए, $T_5 = 2.5 + 1 = 11$ $n = 6$ के लिए, $T_6 = 2.6 + 1 = 13$

इस प्रकार उपरोक्त अनुक्रम से सम्बन्धित श्रेणी है: $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + \ldots$

(b) $a_n = n^2 - n + 1$

$n = 1$ के लिए, $a_1 = 1^2 - 1 + 1 = 1$ $n = 2$ के लिए, $a_2 = 2^2 - 2 + 1 = 3$

$n = 3$ के लिए, $a_3 = 3^2 - 3 + 1 = 7$ $n = 4$ के लिए, $a_4 = 4^2 - 4 + 1 = 13$

$n = 5$ के लिए, $a_5 = 5^2 - 5 + 1 = 21$ $n = 6$ के लिए, $a_6 = 6^2 - 6 + 1 = 31$

इस प्रकार उपरोक्त अनुक्रम से सम्बन्धित श्रेणी है: $1 + 3 + 7 + 13 + \ldots$

(c) यहां $f_n = (-1)^n 5^n$

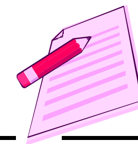
$n = 1$ के लिए, $f_1 = (-1)^1 5^1 = -5$ $n = 2$ के लिए, $f_2 = (-1)^2 5^2 = 25$

$n = 3$ के लिए, $f_3 = (-1)^3 5^3 = -125$ $n = 4$ के लिए, $f_4 = (-1)^4 5^4 = 625$

$n = 5$ के लिए, $f_5 = (-1)^5 5^5 = -3125$ $n = 6$ के लिए, $f_6 = (-1)^6 5^6 = 15625$

अनुक्रम से सम्बन्धित संगत श्रेणी है:

$$-5 + 25 - 125 + 625 - 3125 + 15625 -$$



उदाहरण 7.2. निम्नलिखित प्रत्येक अनुक्रम का 'n' वां पद लिखिए:

(a) $-2 + 4 - 6 + 8 - ....$ (b) $1 - 1 + 1 - 1 + ...$

(c) $4 + 16 + 64 + 256 + ...$ (d) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{5} + ...$

हल: (a) श्रेणी है: $-2 + 4 - 6 + 8 ....$

यहां विषम पद की संख्याएं ऋणात्मक हैं तथा सम पद की संख्याएं धनात्मक हैं। उपरोक्त श्रेणी अनुक्रम

$-1 + 2 - 3 + 4 - ....$ को 2 से गुणा करने पर प्राप्त होती है।

$\therefore$ $T_n = 2(-1)^n n = (-1)^n 2n$

(b) श्रेणी है: $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - ......$ $\therefore T_n = (-1)^{n+1}$

(c) श्रेणी है: $4 + 16 + 64 + 256 + ...$

उपरोक्त श्रेणी को इस प्रकार लिख सकते हैं। $4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + ...$

अर्थात् n वॉ पद $T_n = 4^n$.

(d) श्रेणी है: $\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{5} + ...$ अर्थात् $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + ...$

इसलिए n वॉ पद $T_n = \sqrt{n+1}$.

देखें आपने कितना सीखा 7.1

1. जिस अनुक्रम का nवाँ पद निम्नलिखित है उसके प्रथम 6 पद लिखिए:

(a) $T_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ (b) $a_n = \dfrac{n^2 - 1}{2n - 3}$

2. यदि $A_1 = 1$ और $A_2 = 2$ हो, तो A_6 ज्ञात कीजिए जबकि $A_n = \dfrac{A_{n-1}}{A_{n-2}}, (n > 2)$

3. निम्नलिखित अनुक्रम का nवाँ पद लिखिए:

(a) $-1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \cdots$ (b) $3 - 6 + 9 - 12 + ...$

7.2 प्रथम n प्राकृत संख्याओं के घातांकों का योग ज्ञात करना

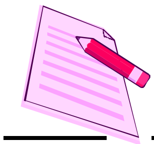
(a) प्रथम n प्राकृत संख्याओं का अनुक्रम है–

$1 + 2 + 3 + 4 + ... + n.$

माना $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$

यह एक समान्तर श्रेणी है जिसका प्रथम पद 1, सार्व अन्तर 1 तथा पदों की संख्या n है।

$\therefore$ $S_n = \dfrac{n}{2}[2.1 + (n-1)1] = \dfrac{n}{2}[2 + n - 1]$ अर्थात् $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$



$\therefore$ हम लिख सकते हैं कि $\sum n = \frac{n(n+1)}{2}$

(b) प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग ज्ञात करना।

माना $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

सर्वसमिका, $n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$ का उपयोग करने पर उपरोक्त सर्वसमिका में $n = 1, 2, 3, ..., n-1, n$ आदि मान रखने पर हमें प्राप्त होता है:–

$1^3 - 0^3 = 3.1^2 - 3.1 + 1$

$2^3 - 1^3 = 3.2^2 - 3.2 + 1$

$3^3 - 2^3 = 3.3^2 - 3.3 + 1$

....

....

$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$

इसका योग करने पर हमें प्राप्त होता है:

$n^3 - 0^3 = 3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) - 3\,(1 + 2 + 3 + ... + n) + (1 + 1 + 1 + ...$ n पदों तक)

या $n^3 = 3\,S_n - 3\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] + n \qquad \cdots\left[\because \sum n = \frac{n(n+1)}{2}\right]$

या $3\,S_n = n^3 + \frac{3n\,(n+1)}{2} - n$

$$= n\,(n^2 - 1) + \frac{3n}{2}(n+1) = n\,(n+1)\left(n - 1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{2}$$

$\therefore$ $S_n = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$ अर्थात् $\sum n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$

(c) प्रथम n प्राकृत संख्याओं के घनों का योग ज्ञात करना

यहां $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$

सर्वसमिका $n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$ का उपयोग करने पर

n के स्थान पर 1, 2, 3, ... आदि रखने पर हमें प्राप्त होता है:

$1^4 - 0^4 = 4.1^3 - 6.1^2 + 4.1 - 1$

$2^4 - 1^4 = 4.2^3 - 6.2^2 + 4.2 - 1$

$3^4 - 2^4 = 4.3^3 - 6.3^2 + 4.3 - 1$

... ...

$n^4 - (n-1)^4 = 4.n^3 - 6.n^2 + 4.n - 1$

योग करने पर

$n^4 - 0^4 = 4(1^3 + 2^3 + ... + n^3) - 6(1^2 + 2^2 + ... + n^2) + 4\,(1 + 2 + 3 + ... + n)$
$- (1 + 1 + ...$ n बार)

$$\Rightarrow \quad n^4 = 4.S_n - 6\left[\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}\right] + 4n\,\frac{n+1}{2} - n$$

$$\Rightarrow \quad 4S_n = n^4 + n(n+1)\,(2n+1) - 2n\,(n+1) + n$$

$$= n^4 + n\,(2n^2 + 3n + 1) - 2n^2 - 2n + n$$

$$= n^4 + 2n^3 + 3n^2 + n - 2n^2 - 2n + n = n^4 + 2n^3 + n^2 = n^2\,(n^2 + 2n + 1)$$

अर्थात् $4S_n = n^2\,(n+1)^2$

$$\therefore \quad S_n = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4} = \left\{\frac{n\,(n+1)}{2}\right\}^2$$

$$\therefore \quad \sum n^3 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2 \text{ या } \sum n^3 = \left(\sum n\right)^2$$

टिप्पणी: प्रश्नों में श्रेणी का योग ज्ञात करने के लिए, पहले हम श्रेणी का nवॉ पद ज्ञात करेंगे। उसके पश्चात् $S_n = \sum t_n$ का उपयोग करेंगे।

उदाहरण 7.3. श्रेणी $1.3 + 3.5 + 5.7 + \ldots$ के प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल: माना $S_n = 1.3 + 3.5 + 5.7 + \ldots$

श्रेणी का nवॉ पद

$$t_n = \{1, 3, 5, \ldots \text{ का } n\text{वॉ पद}\} \times \{3, 5, 7, \ldots \text{ का } n\text{वॉ पद}\}$$

$$= (2n-1)\,(2n+1) = 4n^2 - 1$$

$$S_n = \sum t_n = \sum\left[4n^2 - 1\right] = 4\sum n^2 - \sum(1)$$

$$= 4\,\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} - n = \frac{2n\,(n+1)\,(2n+1) - 3n}{3}$$

$$= \frac{n}{3}\left[2\,(2n^2 + 3n + 1) - 3\right] = \frac{n}{3}\left[4n^2 + 6n - 1\right]$$

उदाहरण 7.4. श्रेणी $1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + \ldots \ldots$ के प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल: यहां $t_n = n\,\{2 + (n-1)\}^2 = n\,(n+1)^2 = n.\,(n^2 + 2n + 1)$

अर्थात् $t_n = n^3 + 2n^2 + n$

माना $S_n = 1.2^2 + 2.3^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + \ldots. + n.\,(n+1)^2$.

$$\therefore \quad S_n = \sum t_n = \sum\,(n^3 + 2n^2 + n) = \sum n^3 + 2\,\sum n^2 + \sum n.$$

$$= \left\{\frac{n\,(n+1)}{2}\right\}^2 + 2\left[\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}\right] + \frac{n\,(n+1)}{2}$$

$$= n(n+1)\left[\frac{n(n+1)}{4} + \frac{2n+1}{3} + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}(3n^2 + 11n + 10) = \frac{1}{12} n(n+1)(n+2)(3n+5)$$

उदाहरण 7.5. श्रेणी 2. 3. 5 + 3. 5. 7 + 4. 7. 9 + ... के प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल: माना $S_n = 2.\ 3.\ 5. + 3.\ 5.\ 7 + 4.\ 7.\ 9 + ...$

श्रेणी का nवॉं पद t_n

= {2, 3, 4, ... का nवॉं पद} × {3, 5, 7, ... का nवॉं पद } × {5, 7, 9, ... का nवॉं पद}

$= (n + 1) \times (2n + 1) \times (2n + 3) = (n + 1)\ [4n^2 + 8n + 3]$

$= 4n^3 + 12n^2 + 11n + 3$

$\therefore \quad S_n = \sum t_n = \sum [4n^3 + 12n^2 + 11n + 3] = 4 \sum n^3 + 12 \sum n^2 + 11 \sum n + \sum(3)$

$$= 4\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{12\,n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{11\,n(n+1)}{2} + 3n$$

$$= n^2(n+1)^2 + 2n(n+1)(2n+1) + \frac{11n(n+1)}{2} + 3n$$

$$= \frac{n}{2}\left[2n(n+1)^2 + 4(n+1)(2n+1) + 11(n+1) + 6\right]$$

$$= \frac{n}{2}\left[2n(n^2 + 2n + 1) + 4(2n^2 + 3n + 1) + 11n + 17\right]$$

$$= \frac{n}{2}\left[2n^3 + 12n^2 + 25n + 21\right]$$

उदाहरण 7.6. निम्नलिखित श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात कीजिए: $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \ldots$

हल: $$t_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

क्रमशः $n = 1, 2, 3, ...$ रखने पर

$$t_1 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{3}\right],\ t_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right],\ t_3 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right]$$

$\cdots \quad \cdots$

$$t_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2n-1)} - \frac{1}{(2n+1)}\right]$$

योग करने पर, $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2n+1}\right] = \frac{n}{(2n+1)}$

देखें आपने कितना सीखा 7.2

1. निम्नलिखित श्रेणियों में प्रत्येक के n पदों का योग ज्ञात कीजिए:

   (a) $1 + (1 + 3) + (1 + 3 + 5) + \ldots$ (b) $\frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \cdots$

   (c) $(1) + (1 + 3) + (1 + 3 + 3^2) + (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + \ldots$

2. उस श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसका nवाँ पद $n(n + 1)\,(n + 4)$ है।

3. निम्नलिखित श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात कीजिए: $1.\,2.\,3 + 2.\,3.\,4. + 3.\,4.\,5 + \cdots$

आइये दोहराएँ

- $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots.. + u_n + \ldots$ के रूप का व्यंजक श्रेणी कहलाता है,
  जहां $u_1, u_2, u_3 \ldots. u_n, \ldots.$ सख्यांओं का अनुक्रम है।
- $$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n\,(n+1)}{2}$$
- $$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$
- $$\sum_{r=1}^{n} r^3 = \left\{\frac{n\,(n+1)}{2}\right\}^2$$
- $S_n = \sum t_n$

सहायक वेबसाइट

- *http://en.wikipedia.org/wiki/Sequence_and_series*
- *http://mathworld.wolfram.com/Series.html*

आइए अभ्यास करें

1. निम्नलिखित श्रेणियों में प्रत्येक का योग ज्ञात कीजिए:

   (a) $2 + 4 + 6 + \ldots$ का 40 पदों तक (b) $2 + 6 + 18 + \ldots$ का 6 पदों तक।

2. निम्नलिखित श्रेणियों में प्रत्येक का n पदों तक योग ज्ञात कीजिए:

   (a) $1 + 3 + 7 + 15 + 31 + \ldots..$ (b) $\frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{5.7.9} + \ldots..$

   (c) $\frac{3}{1.4} + \frac{5}{4.9} + \frac{7}{9.16} + \frac{9}{16.25} + \ldots.$

3. श्रेणी $1^2 + 3^2 + 5^2 + ...$ के प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

4. श्रेणी $5 + 7 + 13 + 31 + ...$ के n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

5. श्रेणी $1+\frac{4}{5}+\frac{7}{5^2}+\frac{10}{5^3}+\cdots$ के n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

6. $2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (2n)^2$ का योग ज्ञात कीजिए।

7. दिखाइए कि $\frac{1\times 2^2+2\times 3^2+......+n\times (n+1)^2}{1^2\times 2+2^2\times 3+......+n^2\times (n+1)}=\frac{3n+5}{3n+1}$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 7.1

1. (a) $1, 4, 10, 20, 35, 56$ (b) $0, 3, \frac{8}{3}, 3, \frac{24}{7}, \frac{35}{9}$

2. $\frac{1}{2}$

3. (a) $(-1)^n \frac{1}{n}$ (b) $(-1)^{n+1}\, 3n$

देखें आपने कितना सीखा 7.2

1. (a) $\frac{1}{6}n\,(n+1)\,(2n+1)$ (b) $\frac{n}{3n+1}$ (c) $\frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)$

2. $\frac{n\,(n+1)}{12}\left[3n^2+23n+34\right]$

3. $\frac{1}{4}n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)$

आइए अभ्यास करें

1. (a) 1640 (b) 728

2. (a) $2^{n+1}-n-2$

   (b) $\frac{1}{12}-\frac{1}{4\,(2n+1)\,(2n+3)}$ (c) $1-\frac{1}{(n+1)^2}$

3. $\frac{n}{3}(4n^2-1)$ 4. $\frac{1}{2}(3^n+8n-1)$

5. $\frac{5}{4}+\frac{15}{16}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right)-\frac{3n-2}{4.\,(5^{n-1})}$ 6. $\frac{2n\,(n+1)\,(2n+1)}{3}$