8

सम्मिश्र संख्याएँ

हमने प्राकृत संख्याओं से संख्याओं के निकाय का अध्ययन प्रारंभ किया, तदुपरांत पूर्ण संख्याओं का निकाय बनाने के लिए, उनमें शून्य को सम्मिलित किया तथा अगले चरण में ऋणात्मक संख्याएँ परिभाषित की गयीं। इस प्रकार, हमने अपने संख्या–निकाय का पूर्ण संख्याओं तथा पूर्णांकों तक विस्तार किया। $p \div q$ के रूप वाली समस्याओं के समाधान हेतु हमने पूर्णांकों के निकाय में परिमेय संख्याओं को सम्मिलित किया। परिमेय संख्याओं के निकाय को आगे अपरिमेय संख्याओं तक बढ़ाया गया, क्योंकि सभी लम्बाइयों का परिमेय संख्याओं द्वारा मापना संभव नहीं था। परिमेय तथा अपरिमेय संख्याओं को मिलाकर वास्तविक संख्याएँ कहा गया। किन्तु वास्तविक संख्याओं का निकाय सभी बीजगणितीय समीकरणों को हल करने के लिए पर्याप्त नहीं है। ऐसी कोई वास्तविक संख्या नहीं है जो समीकरण $x^2 = -1$ को सन्तुष्ट कर सके। ऐसी समस्याओं को हल करने के लिए, अर्थात ऋणात्मक संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात करने के लिए, हम वास्तविक संख्याओं के निकाय को आगे एक नये संख्या–निकाय तक ले जाते हैं जिसे सम्मिश्र संख्याओं का निकाय कहा जाता है। इस पाठ में, शिक्षार्थी को सम्मिश्र संख्याओं, उनके निरूपण तथा उन पर बीजगणितीय संक्रियाओं से अवगत कराया जायेगा।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाएँगे:

- वास्तविक संख्याओं के समुच्चय का सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय तक विस्तार करने की आवश्यकता को बताना
- सम्मिश्र संख्या को परिभाषित करना तथा उसके उदाहरण देना
- किसी दी हुई संख्या के वास्तविक तथा काल्पनिक भागों को पहचानना
- दो सम्मिश्र संख्याओं के समान होने के प्रतिबन्ध को बताना
- इस तथ्य को जानना तथा पहचानना कि ऑरगंड तल में बिन्दु $P(x, y)$ से संबद्ध एक अद्वितीय सम्मिश्र संख्या $x + iy$ है एवम विलोमतः प्रत्येक सम्मिश्र संख्या $x + iy$ से संबद्ध ऑरगंड तल में एक अद्वितीय बिन्दु $P(x, y)$ है
- एक सम्मिश्र संख्या के संयुग्मी को परिभाषित करना तथा ज्ञात करना
- एक सम्मिश्र संख्या के मापांक (निरपेक्ष मान) तथा कोणांक को परिभाषित करना तथा ज्ञात करना
- एक सम्मिश्र संख्या को ध्रुवीय रूप में प्रदर्शित करना

- सम्मिश्र संख्याओं में बीजगणितीय संक्रियाओं (योग, घटा, गुणा तथा भाग) का उपयोग करना
- बीजगणितीय संक्रियाओं के गुणों (गुणधर्मों) (संवृतता, क्रमविनिमेयता, सहचारिता, तत्समक, विलोम एवं वितरणता) को बताना एवं उनका उपयोग करना
- समस्याओं के हल करने में सम्मिश्र संख्याओं के निम्नलिखित गुणों को बताना एवं उनका उपयोग करना

(i) $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$ और $z_1 = z_2 \Rightarrow |z_1|=|z_2|$

(ii) $|z|=|-z|=|\bar{z}|$ (iii) $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

(iv) $|z_1 . z_2|=|z_1|.|z_2|$ (v) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}, (z_2 \neq 0)$

- सम्मिश्र संख्याओं का वर्गमूल ज्ञात करना

पूर्व ज्ञान

- वास्तविक संख्याओं के गुण
- रैखिक एवं द्विघात समीकरणों के हल
- वास्तविक संख्याओं का संख्या–रेखा पर निरूपण
- एक तल में बिन्दुओं का निरूपण

8.1 सम्मिश्र संख्याएँ

समीकरण $x^2 + 1 = 0$ ...(A) पर विचार कीजिए।

इसे लिखा जा सकता है: $x^2 = -1$ अथवा $x = \pm\sqrt{-1}$

किन्तु ऐसी कोई वास्तविक संख्या नहीं है जो $x^2 = -1$ को सन्तुष्ट करती हो। दूसरे शब्दों में, हम कह सकते हैं कि ऐसी कोई वास्तविक संख्या नहीं है जिसका वर्ग – 1 हो। ऐसे समीकरणों को हल करने के लिए, आइए हम कल्पना करें कि एक संख्या 'i' हमारे संख्या निकाय में है जो $\sqrt{-1}$ के बराबर है।

वर्ष 1748 में, महान गणितज्ञ एल. ऑयलर ने संख्या 'i' को आयोटा (*Iota*) नाम दिया, जिसका वर्ग –1 है। इस आयोटा अथवा 'i' को काल्पनिक इकाई के रूप में परिभाषित किया गया। नये संकेत चिन्ह 'i' के लेने से, हम ऋणात्मक संख्याओं के वर्गमूल को एक वास्तविक संख्या तथा 'i' के गुणनफल के रूप में प्रकट कर सकते हैं।

अतएव, हम समीकरण (A) के हल को $x = \pm i$ के रूप में प्रदर्शित कर सकते हैं।

इस प्रकार, $-4 = 4(-1)$

$$\therefore \quad \sqrt{-4}=\sqrt{(-1)(4)}=\sqrt{i^2 . 2^2}=2i$$

इसे परम्परागत रूप में $2i$ लिखा जाता है।

इस प्रकार, हम प्राप्त करते हैं: $\sqrt{-4}=2i,\qquad \sqrt{-7}=\sqrt{7}i$

$\sqrt{-4}$, $\sqrt{-7}$ सम्मिश्र संख्याओं के उदाहरण हैं।

एक अन्य द्विघात समीकरण $x^2 - 6x + 13 = 0$ पर विचार कीजिए।

इसे निम्नलिखित रूप में हल किया जा सकता है:

$(x-3)^2 + 4 = 0$ या, $(x-3)^2 = -4$

या, $x - 3 = \pm 2i$ या, $x = 3 \pm 2i$

हमें $x + yi$ के रूप वाली संख्याएँ प्राप्त होती हैं जिनमें x तथा y वास्तविक संख्याएँ हैं तथा $i = \sqrt{-1}$ है।

कोई भी संख्या, जिसे $a + bi$ के रूप में प्रकट किया जा सकता हो, जबकि a तथा b वास्तविक संख्याएँ एवं $i = \sqrt{-1}$ हो, एक सम्मिश्र संख्या कहलाती है।

प्रायः एक सम्मिश्र संख्या को अक्षर z द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है। अर्थात् $z = a + bi$, 'a' को z का वास्तविक भाग कहा जाता है, जिसे Re $(a+bi)$ लिखा जाता है तथा b को z का काल्पनिक भाग कहा जाता है जिसे Im $(a + bi)$ लिखा जाता है।

यदि $a = 0$ तथा $b \neq 0$ हो, तो सम्मिश्र संख्या bi हो जाती है, जो कि एक पूर्णतः काल्पनिक सम्मिश्र संख्या है। $-7i$, $\frac{1}{2}i$, $\sqrt{3}\,i$ πi पूर्णतः काल्पनिक संख्याओं के उदाहरण हैं।

यदि $a \neq 0$ तथा $b = 0$ हो, तो सम्मिश्र संख्या 'a' हो जाती है, जो कि एक वास्तविक संख्या है। 5, 2.5 तथा $\sqrt{7}$ सभी वास्तविक संख्याओं के उदाहरण हैं।

यदि $a = 0$ तथा $b = 0$ हो, तो सम्मिश्र संख्या 0 (शून्य) हो जाती है। अतः वास्तविक संख्याएँ सम्मिश्र संख्याओं की विशेष दशाएँ हैं।

उदाहरण 8.1. 'i' का उपयोग करते हुए, निम्नलिखित में से प्रत्येक को सरल कीजिए:

(i) $\sqrt{-36}$ (ii) $\sqrt{25}.\sqrt{-4}$

हल: (i) $\sqrt{-36} = \sqrt{36(-1)} = 6i$ (ii) $\sqrt{25}.\sqrt{-4} = 5 \times 2i = 10i$

8.2 i की धनात्मक पूर्णांकीय घातें

हम जानते हैं कि

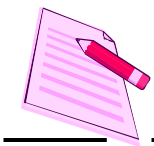
$i^2 = -1,\ i^3 = i^2.i = -1.i = -i,\ i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1,\ i^5 = (i^2)^2.i = 1.i = i$

$i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 = -1,\ i^7 = (i^2)^3(i) = -i,\ i^8 = (i^2)^4 = 1$

इस प्रकार, हम देखते हैं कि 'i' की किसी भी बड़ी घात को चार मानों $i, -1, -i$ तथा 1 में से किसी एक के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

यदि n एक ऐसा धनात्मक पूर्णांक है कि $n > 4$ है, तो i^n को ज्ञात करने के लिए हम पहले n को 4 से भाग देते हैं। उस दशा में, मान लीजिए कि m भागफल तथा r शेष मिलता है। तब,

$n = 4m + r$ जहाँ $0 \leq r < 4$ है।



टिप्पणी

इस प्रकार,

$i^n = i^{(4m+r)} = i^{4m}.i^r = (i^4)^m.i^r = i^r \qquad (\because i^4=1)$

टिप्पणी: किन्ही दो वास्तविक संख्याओं a तथा b के लिए, $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ केवल उसी दशा में सत्य होगा जबकि a तथा b में से कम से कम एक शून्य अथवा धनात्मक हो।

वास्तव में, $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = i\sqrt{a} \times i\sqrt{b} = i^2\sqrt{ab}$

$= -\sqrt{ab}$, जहाँ a तथा b धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं।

उदाहरण 8.2. $1 + i^{10} + i^{20} + i^{30}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $1 + i^{10} + i^{20} + i^{30}$

$= 1 + (i^2)^5 + (i^2)^{10} + (i^2)^{15} = 1 + (-1)^5 + (-1)^{10} + (-1)^{15}$

$= 1 + (-1) + 1 + (-1) = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$

इस प्रकार, $1 + i^{10} + i^{20} + i^{30} = 0$

उदाहरण 8.3. $8i^3 + 6i^{16} - 12i^{11}$ को $a + bi$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल: $8i^3 + 6i^{16} - 12i^{11}$ को लिखा जा सकता है:

$8(i^2).i + 6(i^2)^8 - 12(i^2)^5.i$

$= 8(-1).i + 6(-1)^8 - 12(-1)^5.i = -8i + 6 - 12(-1).i$

$= -8i + 6 + 12i = 6 + 4i$

जो $a + bi$ के रूप में है, जहाँ 'a' = 6 तथा 'b' = 4

देखें आपने कितना सीखा 8.1

1. 'i' का उपयोग करते हुए, निम्नलिखित में से प्रत्येक को सरल कीजिए:

   (a) $\sqrt{-27}$ (b) $-\sqrt{-9}$ (c) $\sqrt{-13}$

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक को $a + bi$ के रूप में व्यक्त कीजिए:

   (a) 5 (b) $-3i$ (c) 0

3. सरल कीजिए: $10i^3 + 6i^{13} - 12i^{10}$

4. सभी $m \in N$ के लिए, दिखाइए कि: $i^m + i^{m+1} + i^{m+2} + i^{m+3} = 0$

8.3 एक सम्मिश्र संख्या का संयुग्मी

किसी सम्मिश्र संख्या $z = a + bi$ का सम्मिश्र संयुग्मी (अथवा केवल संयुग्मी) $a - bi$ के रूप में परिभाषित किया जाता है तथा $\bar{z}$ के द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है।

इस प्रकार, यदि $z = a + bi$, तो $\bar{z} = a - bi$

टिप्पणी: किसी सम्मिश्र संख्या में उसके काल्पनिक भाग के चिन्ह को बदल देने से उसका संयुग्मी प्राप्त होता है।

टिप्पणी

नीचे कुछ सम्मिश्र संयुग्मियों के उदाहरण दिए गए हैं:

(i) यदि $z = 2 + 3i$ हो, तो $\bar{z} = 2 - 3i$

(ii) यदि $z = 1 - i$ हो, तो $\bar{z} = 1 + i$

(iii) यदि $z = -2 + 10i$ हो, तो $\bar{z} = -2 - 10i$

8.3.1 सम्मिश्र संयुग्मियों के गुण

(i) यदि z एक वास्तविक संख्या है, तो $z = \bar{z}$, अर्थात् एक वास्तविक संख्या का संयुग्मी स्वयं वह संख्या ही होती है। उदाहरणार्थ, मान लीजिए $z = 5$ इसे लिखा जा सकता है:

$$z = 5 + 0i \therefore \bar{z} = 5 - 0i = 5 \therefore z = 5 = \bar{z}$$

(ii) यदि z एक पूर्णतः काल्पनिक संख्या है, तो $\bar{z} = -z$

उदाहरणार्थ, यदि $z = 3i$ है, तो इसे लिखा जा सकता है:

$$z = 0 + 3i \therefore \bar{z} = 0 - 3i = -3i = -z \therefore \bar{z} = -z$$

(iii) किसी सम्मिश्र संख्या के संयुग्मी का संयुग्मी स्वयं वह संख्या ही होती है। अर्थात् $\overline{(\bar{z})} = z$

उदाहरणार्थ, यदि $z = a + bi$ है, तो $\bar{z} = a - bi$

पुनः $\overline{(\bar{z})} = \overline{(a - bi)} = a + bi = z$

$$\therefore \overline{(\bar{z})} = z$$

उदाहरण 8.4. निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं में से प्रत्येक का संयुग्मी ज्ञात कीजिए:

(i) $3 - 4i$ (ii) $(2 + i)^2$

हल:

(i) मान लीजिए कि $z = 3 - 4i$ तब, $\bar{z} = \overline{(3 - 4i)} = 3 + 4i$

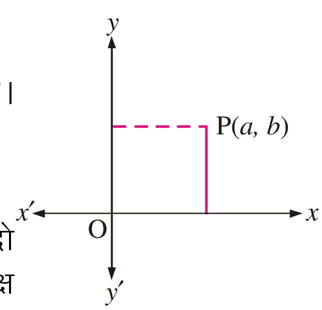
अतः, $3 - 4i$ का संयुग्मी $3 + 4i$ है।

(ii) मान लीजिए $z = (2 + i)^2$ है।

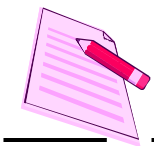
अर्थात्, $z = (2)^2 + (i)^2 + 2(2)(i) = 4 - 1 + 4i = 3 + 4i$

तब, $\bar{z} = \overline{(3 + 4i)} = 3 - 4i$ अतः, $(2 + i)^2$ का संयुग्मी $3 - 4i$ है।

8.4 एक सम्मिश्र संख्या का ज्यामितीय निरूपण



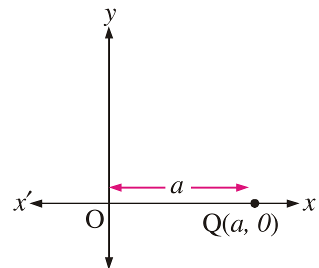
मान लीजिए कि $\mathbf{z} = a + bi$ एक सम्मिश्र संख्या है। मान लीजिए दो परस्पर लम्ब रेखाओं XOX' तथा YOY' को क्रमशः x-अक्ष तथा y-अक्ष लिया गया है जिनका उभयनिष्ठ बिन्दु O मूलबिन्दु है।



टिप्पणी

मान लीजिए कि P कोई बिन्दु है जिसके निर्देशांक (a,b) हैं। हम कहते हैं कि सम्मिश्र संख्या $z = a + bi$ को बिन्दु P (a , b) द्वारा निरूपित किया जाता है, जैसा कि चित्रा 8.1 में दर्शाया गया है।

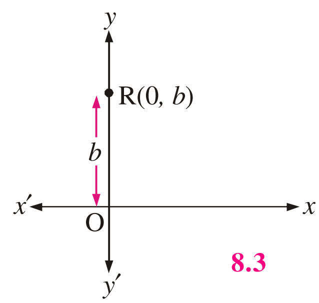
यदि $b = 0$ हो, तो z एक वास्तविक संख्या होगी तथा सम्मिश्र संख्या $z = a + 0i$ को निरूपित करने वाला बिन्दु (a, 0) द्वारा निर्दिष्ट किया जायेगा। यह बिन्दु (a, 0) x-अक्ष पर स्थित है।



8.2

इसलिए XOX' को वास्तविक अक्ष कहा जाता है। चित्रा 8.8 में, बिन्दु Q (a, 0) सम्मिश्र संख्या $z = a + 0i$ को निरूपित करता है।

यदि $a = 0$ हो, तो z एक पूर्णतः काल्पनिक संख्या होगी तथा सम्मिश्र संख्या $z = 0 + bi$ को निरूपित करने वाले बिन्दु को (0, b) से निर्दिष्ट किया जायेगा। बिन्दु (0, b) y-अक्ष पर स्थित है।



8.3

इसलिए YOY' को काल्पनिक अक्ष कहा जाता है। चित्रा 8.8 में, R (0,b) सम्मिश्र संख्या $z = 0 + bi$ को निरूपित करता है।

सम्मिश्र संख्याओं को बिन्दुओं के रूप में निरूपित करने वाले दो अक्षों के तल को सम्मिश्र तल अथवा ऑरगंड तल कहा जाता है।

जो आरेख ऑरगंड तल में सम्मिश्र संख्या को निरूपित करता है, उसे ऑरगंड आरेख कहा जाता है।

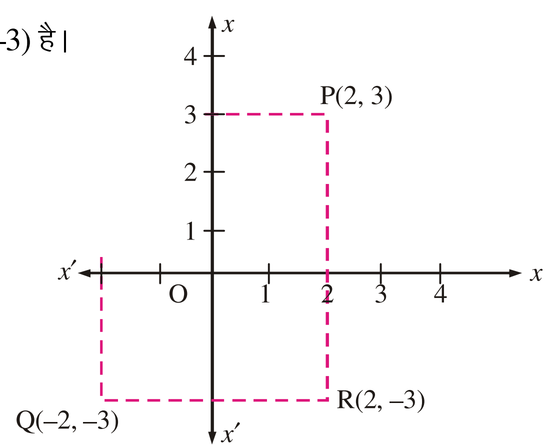
उदाहरण 8.5. सम्मिश्र संख्याओं $2 + 3i$, $-2-3i$ तथा $2-3i$ को एक ही आरगंड ऑरेख में निरूपित कीजिए।

हलः

(a) 2+3i को निरूपित करने वाला बिन्दु P (2, 3) है।

(b) $-2-3i$ को निरूपित करने वाला बिन्दु Q (–2,–3) है।

(c) $2-3i$ को निरूपित करने वाला बिन्दु R (2, –3) है।



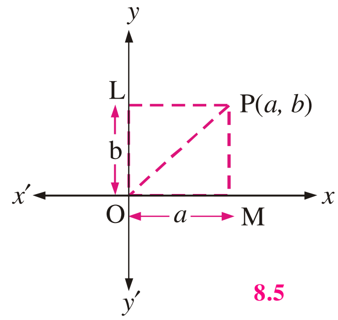
चित्र 8.4

8.5 एक सम्मिश्र संख्या का मापांक

हमने देखा कि किसी भी सम्मिश्र संख्या को आरगंड तल में एक बिन्दु के द्वारा निरूपित किया जा सकता है। उस बिन्दु की मूलबिन्दु से दूरी हम कैसे ज्ञात करेंगे? मान लीजिए कि तल में $a + bi$ को निरूपित करने वाला बिन्दु P(a, b) है। x-अक्ष तथा y-अक्ष पर क्रमशः लम्ब PM तथा PL खींचिए। मान लीजिए कि $OM = a$ तथा $OL = MP = b$ हमें मूलबिन्दु से P की दूरी ज्ञात करनी है।

$$\therefore OP = \sqrt{OM^2 + MP^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

OP को सम्मिश्र संख्या $a+bi$ का मापांक अथवा निरपेक्ष मान कहा जाता है।



8.5

$\therefore$ किसी सम्मिश्र संख्या z, जबकि $z=a+bi, a\in R, b\in R$ है, का मापांक $|z|$ द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है तथा $\sqrt{a^2+b^2}$ के बराबर होता है।

$$\therefore \quad |z|=|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$$

8.5.1 मापांक के गुण

(a) $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$

उपपत्तिः मान लीजिए कि $z=a+bi,\ a\in R,\ b\in R$ है। तब, $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$|z|=0 \Leftrightarrow a^2+b^2=0$

$\Leftrightarrow$ $a=0$ और $b=0$ (क्योंकि a^2 तथा b^2 दोनों धनात्मक हैं) $\Leftrightarrow z=0$

(b) $|z|=|\bar{z}|$

उपपत्तिः मान लीजिए कि $z=a+bi$ है। तब, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

अब, $\bar{z}=a-bi \quad \therefore \quad |\bar{z}|=\sqrt{a^2+(-b^2)}=\sqrt{a^2+b^2}$

इस प्रकार, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=|\bar{z}|$ ...(i)

(c) $|z|=|-z|$

उपपत्तिः मान लीजिए कि $z=a+bi$ है। तब $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

$\therefore \quad -z=-a-bi$ है। तब, $|-z|=\sqrt{(-a)^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$

इस प्रकार, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=|-z|$ ...(ii)

उपर्युक्त (i) और (ii) से सिद्ध किया जा सकता है कि

$|z|=|-z|=|\bar{z}|$ ...(iii)

उदाहरण 8.6. यदि $z=1+2i$, तब $z, -z$ तथा $\bar{z}$ के मापांक ज्ञात कीजिए।

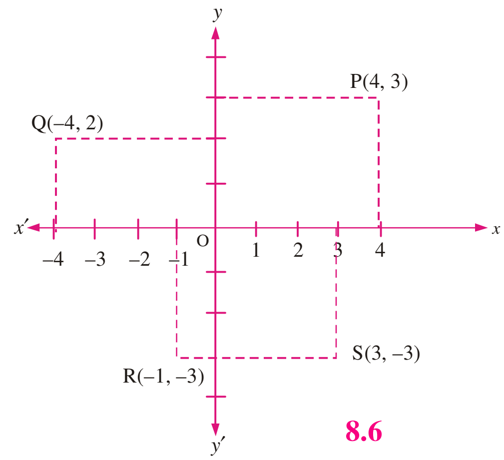
हलः $z=1+2i$ है। तब, $-z=-1-2i$ तथा $\bar{z}=1-2i$

$$|z|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5},\ |-z|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$$

तथा $|\bar{z}|=\sqrt{(1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

इस प्रकार, $|z|=|-z|=\sqrt{5}=|\bar{z}|$

उदाहरण 8.7. आरगंड तल (चित्र. 8.6) में दिखाई गई सम्मिश्र संख्याओं के मापांक ज्ञात कीजिए।



8.6

हल: (i) P(4, 3) सम्मिश्र संख्या $z = 4 + 3i$ को निरूपित करता है।

$\therefore \quad |z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25}$

$|z| = 5$

(ii) Q(– 4, 2) सम्मिश्र संख्या $z = -4 + 2i$ को निरूपित करता है।

$\therefore \quad |z| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

अथवा $|z| = 2\sqrt{5}$

(iii) R (–1, –3) सम्मिश्र संख्या $z = -1 - 3i$ को निरूपित करता है।

$\therefore \quad |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9}$

$|z| = \sqrt{10}$

(iv) S(3, –3) सम्मिश्र संख्या $z = 3 - 3i$ को निरूपित करता है।

$\therefore \quad |z| = \sqrt{(3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9}$

$|z| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

देखें आपने कितना सीखा 8.2

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक का संयुग्मी ज्ञात कीजिए:

   (a) $-2i$ (b) $-5 - 3i$ (c) $-\sqrt{2}$ (d) $(-2 + i)^2$

2. निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं को आरगंड तल में निरूपित कीजिए:

   (a) (i) $2 + 0i$ (ii) $-3 + 0i$ (iii) $0 - 0i$ (iv) $3 - 0i$

   (b) (i) $0 + 2i$ (ii) $0 - 3i$ (iii) $4i$ (iv) $-5i$

   (c) (i) $2 + 5i$ तथा $5 + 2i$ (ii) $3 - 4i$ तथा $-4 + 3i$
   (iii) $-7 + 2i$ तथा $2 - 7i$ (iv) $-2 - 9i$ तथा $-9 - 2i$

   (d) (i) $1 + i$ तथा $-1 - i$ (ii) $6 + 5i$ तथा $-6 - 5i$
   (iii) $-3 + 4i$ तथा $3 - 4i$ (iv) $4 - i$ तथा $-4 + i$

   (e) (i) $1 + i$ तथा $1 - i$ (ii) $-3 + 4i$ तथा $-3 - 4i$
   (iii) $6 - 7i$ तथा $6 + 7i$ (iv) $-5 - i$ तथा $-5 + i$

3. (a) निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं के मापांक ज्ञात कीजिए:

(i) 3 (ii) $(i+1)(2-i)$ (iii) $2-3i$ (iv) $4+\sqrt{5}\,i$

(b) निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं के लिए सत्यापित कीजिए कि $|z| = |\bar{z}|$

(i) $-6+8i$ (ii) $-3-7i$

(c) निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं के लिए सत्यापित कीजिए कि $|z| = |-z|$

(i) $14+i$ (ii) $11-2i$

(d) निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं के लिए सत्यापित कीजिए कि $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

(i) $2-3i$ (ii) $-6-i$ (iii) $7-2i$

8.6 दो सम्मिश्र संख्याओं की समता

दो सम्मिश्र संख्याएँ बराबर होंगी यदि और केवल यदि उनके वास्तविक भाग तथा काल्पनिक भाग अलग–अलग परस्पर बराबर हों। व्यापक रूप में, $a + bi = c + di$ होगा यदि और केवल यदि $a = c$ तथा $b = d$ हो।

उदाहरण 8.8. x तथा y के किन मानों के लिए, सम्मिश्र संख्याएँ $5x + 6yi$ तथा $10 + 18i$ समान होंगी?

हल: यह दिया है कि $5x + 6yi = 10 + 18i$

वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$5x = 10$ अथवा $x = 2$ तथा $6y = 18$ अथवा $y = 3$

$x = 2$ तथा $y = 3$ के लिए दी हुई सम्मिश्र संख्याएँ समान हैं।

8.7 सम्मिश्र संख्याओं का योग

यदि $z_1 = a + bi$ तथा $z_2 = c + di$ दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं, तो उनका योग

$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ द्वारा परिभाषित किया जाता है। उदाहरणार्थ,

यदि $z_1 = 2 + 3i$ तथा $z_2 = -4 + 5i$ तो $z_1 + z_2 = [2 + (-4)] + [3 + 5]i = -2 + 8i$

उदाहरण 8.9. सरल कीजिए:

(i) $(3 + 2i) + (4 - 3i)$ (ii) $(2 + 5i) + (-3 - 7i) + (1 - i)$

हल: (i) $(3 + 2i) + (4 - 3i) = (3 + 4) + (2 - 3)i = 7 - i$

(ii) $(2 + 5i) + (-3 - 7i) + (1 - i) = (2 - 3 + 1) + (5 - 7 - 1)\, i = 0 - 3i$

अथवा, $(2 + 5i) + (-3 - 7i) + (1 - i) = -3i$

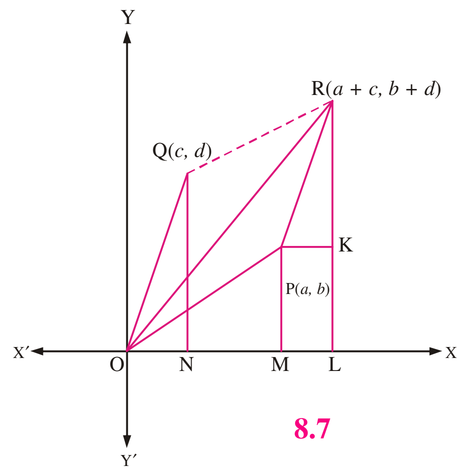
8.9.1 दो सम्मिश्र संख्याओं के योग का ज्यामितीय निरूपण

मान लीजिए कि दो सम्मिश्र संख्याएँ z_1 तथा z_2 बिन्दुओं P(a, b) तथा Q(c, d) द्वारा निरूपित होती हैं। उसी आरगंड तल में उनका योग $z_1 + z_2$ बिन्दु R (a + c, b + d) द्वारा निरूपित होता है।

OP, OQ, OR, PR तथा QR को मिलाइए।

बिन्दुओं P, Q, R से x-अक्ष पर क्रमशः लम्ब PM, QN, RL खींचिए।

RL पर लम्ब PK खींचिए।



8.7

ΔQON में, ON = c तथा QN = d है।

ΔROL तथा ΔPOM में,

RL = b + d   PM = b

OL = a + c तथा OM = a

साथ ही, PK = ML

$$= OL - OM = a + c - a = c = ON$$

$$RK = RL - KL = RL - PM = b + d - b = d = QN$$

ΔQON तथा ΔRPK में,

ON = PK, QN = RK तथा $\angle QNO = \angle RKP = 90^\circ$

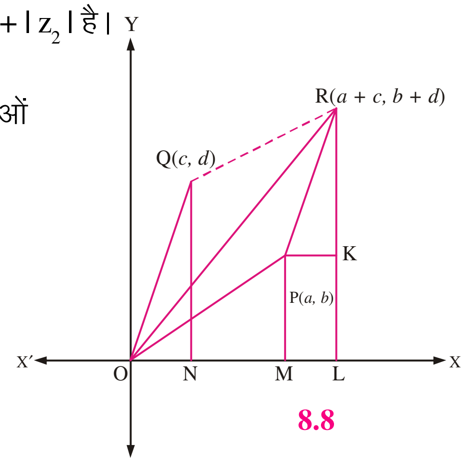
$\therefore$ $\Delta QON \cong \Delta RPK$

$\therefore$ OQ = PR तथा OQ || PR

$\Rightarrow$ OPRQ एक समान्तर चतुर्भुज है तथा OR उसका विकर्ण है। अतः, हम कह सकते हैं कि सम्मिश्र संख्याओं का योग एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण द्वारा निरूपित होता है।

उदाहरण 8.10. सिद्ध कीजिए कि $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ है।

हलः हमने सिद्ध किया है कि दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 तथा z_2 का योग एक समान्तर चतुर्भुज OPRQ (चित्र 8.11 देखिए) के विकर्ण द्वारा निरूपित होता है।

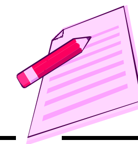


8.8

ΔOPR में, $OR \le OP + PR$

अथवा, $OR \le OP + OQ$ (क्योंकि OQ = PR)

अथवा, $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$



उदाहरण 8.11. यदि $z_1 = 2 + 3i$ तथा $z_2 = 1 + i$ हो, तो सत्यापित कीजिए कि $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

हल: $z_1 = 2 + 3i$ तथा $z_2 = 1 + i$ क्रमशः बिन्दुओं (2, 3) तथा (1, 1) द्वारा निरूपित किये जाते हैं। उनका योग $(z_1 + z_2)$ बिन्दु (2+1, 3+1), अर्थात् (3, 4) द्वारा निरूपित होगा।

सत्यापन $|z_1| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = 3.6$ लगभग $|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1.41$ लगभग

$|z_1 + z_2| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$, $|z_1| + |z_2| = 3.6 + 1.41 = 5.01$

$\therefore \quad |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

8.7.2 सम्मिश्र संख्याओं का घटाना

मान लीजिए कि दो सम्मिश्र संख्याएँ $z_1 = a + bi$ तथा $z_2 = c + di$ क्रमशः बिन्दुओं (a, b) तथा (c, d) द्वारा निरूपित होती हैं।

$\therefore \quad (z_1) - (z_2) = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

जो बिन्दु $(a - c, b - d)$ को निरूपित करती है।

$\therefore$ अन्तर, अर्थात् $z_1 - z_2$ बिन्दु $(a - c, b - d)$ द्वारा निरूपित होता है। इस प्रकार, एक सम्मिश्र संख्या में से दूसरी संख्या घटाने के लिए, हम संगत वास्तविक तथा काल्पनिक भागों को अलग – अलग घटाते हैं।

उदाहरण 8.12. $z_1 - z_2$ ज्ञात कीजिए यदिः

$z_1 = 3 - 4i, \quad z_2 = -3 + 7i$

हल: (a) $z_1 - z_2 = (3 - 4i) - (-3 + 7i) = (3 - 4i) + (3 - 7i)$

$= (3 + 3) + (-4 - 7)i = 6 + (-11i) = 6 - 11i$

उदाहरण 8.13. $5 + 4i$ प्राप्त करने के लिए, i में कौन–सी संख्या जोड़ी जायेगी?

हल: मान लीजिए कि, $z = a + bi$ को i में जोड़ने से $5 + 4i$ प्राप्त होगी।

$\therefore \quad i + (a + bi) = 5 + 4i$ अथवा, $a + (b + 1)i = 5 + 4i$

वास्तविक एवम् काल्पनिक भागों को समतुल्य करने पर, हमें प्राप्त होता हैः $a = 5$ तथा $b + 1 = 4$ अथवा $b = 3$

$\therefore$ i में $z = 5 + 3i$ जोड़ने पर $5 + 4i$ प्राप्त होगी।

8.8 सम्मिश्र संख्याओं के योग के संदर्भ में गुण

1. संवरक गुणः दो सम्मिश्र संख्याओं का योग सदा एक सम्मिश्र संख्या होगी।

मान लीजिए $z_1 = a_1 + b_1 i$ तथा $z_2 = a_2 + b_2 i$, जहां $a_1, b_1, a_2, b_2 \in R$

अब, $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ है, जो पुनः एक सम्मिश्र संख्या है।

इससे सम्मिश्र संख्याओं का संवरक गुण सिद्ध हो जाता है।

2. क्रमविनिमेय गुणः यदि z_1 तथा z_2 दो सम्मिश्र संख्याएं हैं, तो $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

मान लीजिए $z_1 = a_1 + b_1 i$ तथा $z_2 = a_2 + b_2 i$

अब, $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

$= (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)i$ [वास्तविक संख्याओं का क्रमविनिमेय गुण]

$= (a_2 + b_2 i) + (a_1 + b_1 i) = z_2 + z_1$

अर्थात् $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ अतएव, सम्मिश्र संख्याओं का योग क्रमविनिमेय है।

3. साहचर्य गुण

यदि $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ तथा $z_3 = a_3 + b_3 i$ तीन सम्मिश्र संख्याएँ हों, तो

$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

अब, $z_1 + (z_2 + z_3)$

$= (a_1 + b_1 i) + \{(a_2 + b_2 i) + (a_3 + b_3 i)\} = (a_1 + b_1 i) + \{(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i\}$

$= \{a_1 + (a_2 + a_3)\} + \{b_1 + (b_2 + b_3)\}i = \{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i\} + (a_3 + b_3 i)$

$= \{(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)\} + (a_3 + b_3 i) = (z_1 + z_2) + z_3$

अतएव, सम्मिश्र संख्याओं के योग में साहचर्य गुण लागू होता है।

4. योग के तत्समक (Identity) अवयव का अस्तित्व

यदि $z = a + bi$ कोई सम्मिश्र संख्या है, तो

$(a + bi) + (0 + 0i) = a + bi$

अर्थात् $(0 + 0i)$, $a + ib$ योज्य तत्समक है।

5. योज्य व्युत्क्रम (प्रतिलोम) का अस्तित्व

प्रत्येक सम्मिश्र संख्या $a + bi$ के लिए एक ऐसी अद्वितीय सम्मिश्र संख्या $-a - bi$ का अस्तित्व है, ताकि

$(a + bi) + (-a - bi) = 0 + 0i$ हो। $-a - ib$ को $a + ib$ का योज्य व्युत्व्रफम कहते हैं।

व्यापक रूप में, एक सम्मिश्र संख्या का योज्य प्रतिलोम उसके वास्तविक तथा काल्पनिक भागों के चिन्ह बदलने से प्राप्त होता है।

देखें आपने कितना सीखा 8.3

1. सरल कीजिए: (a) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\,i\right)+\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\,i\right)$ (b) $\frac{2+i}{3}+\frac{2-i}{6}$

   (c) $(1+i)-(1-6i)$ (d) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}i\right)-(-2-7i)$

2. यदि $z_1 = (5+i)$ तथा $z_2 = (6+2i)$, तो

   (a) $z_1 + z_2$ ज्ञात कीजिए। (b) $z_2 + z_1$ ज्ञात कीजिए। (c) क्या $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$?

   (d) $z_1 - z_2$ ज्ञात कीजिए। (e) $z_2 - z_1$ ज्ञात कीजिए। (f) क्या $z_1 - z_2 = z_2 - z_1$?

3. यदि $z_1 = (1+i)$, $z_2 = (1-i)$ तथा $z_3 = (2+3i)$, तो

   (a) $z_1 + (z_2 + z_3)$ ज्ञात कीजिए। (b) $(z_1 + z_2) + z_3$ ज्ञात कीजिए।

   (c) क्या $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$? (d) $z_1 - (z_2 - z_3)$ ज्ञात कीजिए।

   (e) $(z_1 - z_2) - z_3$ ज्ञात कीजिए। (f) क्या $z_1 - (z_2 - z_3) = (z_1 - z_2) - z_3$?

4. निम्नलिखित में से प्रत्येक का योज्य प्रतिलोम ज्ञात कीजिए:

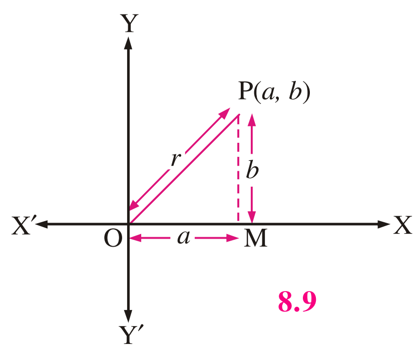
   (a) $12 - 7i$ (b) $4 - 3i$

5. $(3-2i)$ प्राप्त करने के लिए $(-15+4i)$ में क्या जोड़ा जाना चाहिए?

6. दिखाइए कि $\left\{\overline{(3+7i)-(5+2i)}\right\} = \overline{(3+7i)} - \overline{(5+2i)}$

8.9 एक सम्मिश्र संख्या का कोणांक (Argument)

मान लीजिए कि बिन्दु $P(a, b)$ सम्मिश्र संख्या $z = a + bi$, $a \in R$, $b \in R$ को निरूपित करता है तथा OP, x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ कोण θ बनाती है।



8.9

$PM \perp OX$ खींचिए।

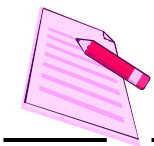
मान लीजिए $OP = r$

समकोण त्रिभुज OMP में, $OM = a;\ MP = b$

$\therefore \quad r\cos\theta = a,\ r\sin\theta = b$

तब $z = a + bi$ को लिख सकते हैं:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \text{...(i)}$$



टिप्पणी

जबकि $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ तथा $\tan\theta = \frac{b}{a}$, अथवा $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ है।

(i) को सम्मिश्र संख्या z का ध्रुवीय रूप कहते हैं तथा r और θ को सम्मिश्र संख्या के क्रमशः मापांक तथा कोणांक कहते हैं।

8.10 दो सम्मिश्र संख्याओं का गुणन

दो सम्मिश्र संख्याओं को योग तथा गुणा के सामान्य नियमों के अनुसार ही गुणा किया जा सकता है, जैसा कि वास्तविक संख्याओं में किया जाता है।

मान लीजिए $z_1 = (a + bi)$ तथा $z_2 = (c + di)$ तब,

$$z_1.z_2 = (a + bi).(c + di) = a\,(c + di) + bi\,(c + di)$$

या $= ac + adi + bci + bdi^2$ या $= (ac - bd) + (ad + bc)i$ [क्योंकि $i^2 = -1$]

यदि (a + bi) तथा (c + di) दो सम्मिश्र संख्याएं हों, तो उनके गुणनफल को सम्मिश्र संख्या $(ac - bd) + (ad + bc)i$

के रूप में परिभाषित किया जाता है।

उदाहरण 8.14. मान ज्ञात कीजिए: (i) $(1 + 2i)(1 - 3i)$ (ii) $(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)$ (iii) $(3 - 2i)^2$

हल: (i) $(1 + 2i)(1 - 3i) = \{1 - (-6)\} + (-3 + 2)i = 7 - i$

(ii) $\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right) = \{3 - (-1)\} + \left(-\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)i = 4 + 0i$

(iii) $(3 - 2i)^2 = (3 - 2i)(3 - 2i) = (9 - 4) + (-6 - 6)i = 5 - 12i$

8.10.1 सिद्ध कीजिए कि

$$|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$$

मान लीजिए कि $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ तथा $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$\therefore \quad |z_1| = r_1\sqrt{\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1} = r_1$

इसी प्रकार, $|z_2| = r_2$

अब, $z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1).\, r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$= r_1 r_2\,[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + (\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)i]$

$= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$

[क्योंकि $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$ तथा

$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2$]

$$|z_1.z_2| = r_1r_2\sqrt{\cos^2(\theta_1+\theta_2)+\sin^2(\theta_1+\theta_2)} = r_1r_2$$

$\therefore \quad |z_1.z_2| = r_1r_2 = |z_1|.|z_2|$

तथा z_1z_2 का कोणांक $= \theta_1 + \theta_2 = z_1$ का कोणांक $+ z_2$ का कोणांक

उदाहरण 8.15. सम्मिश्र संख्या (1 + i) (4 – 3i) का मापांक ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिए $z = (1 + i)(4 - 3i)$

तब, $|z| = |(1 + i)(4 - 3i)| = |(1 + i)|.|(4 - 3i)|$ [क्योंकि $|z_1z_2| = |z_1|.|z_2|$]

किन्तु $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ और $|4 - 3i| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$

$\therefore \quad |z| = \sqrt{2}.5 = 5\sqrt{2}$

8.11 दो सम्मिश्र संख्याओं में भाग

सम्मिश्र संख्याओं में भाग के लिए अंश और हर दोनों को हर के संयुग्मी से गुणा किया जाता है। हम इसे एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट करेंगे।

मान लीजिए $z_1 = a + bi$ तथा $z_2 = c + di$ तब, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a+bi}{c+di} \qquad (c + di \neq 0)$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$ [अंश और हर को हर के संयुग्मी से गुणा करने पर]

$$= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

इस प्रकार, $$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

उदाहरण 8.16. $3 + i$ को $4 - 2i$ से भाग दीजिए।

हल: $$\frac{3+i}{4-2i} = \frac{(3+i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)}$$ [अंश और हर को $(4-2i)$ के संयुग्मी से गुणा करने पर]

$$= \frac{10+10i}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

इस प्रकार, $$\frac{3+i}{4-2i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

8.11.1 सिद्ध कीजिए कि $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

उपपत्ति: $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\ z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$|z_1| = r_1\sqrt{\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1} = r_1$$

इसी प्रकार, $|z_2| = r_2$

तथा कोणांक $(z_1) = \theta_1$ और कोणांक $(z_2) = \theta_2$

तब, $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2)}{(\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)\right]$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

इस प्रकार, $$= \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2}\sqrt{\cos^2(\theta_1 - \theta_2) + \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$\therefore$ $\frac{z_1}{z_2}$ का कोणांक $= \theta_1 - \theta_2$ $= z_1$ का कोणांक $- z_2$ का कोणांक

उदाहरण 8.17. सम्मिश्र संख्या $\frac{2+i}{3-i}$ का मापांक ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिए $z = \frac{2+i}{3-i}$

$$\therefore \quad |z| = \left|\frac{2+i}{3-i}\right| = \frac{|2+i|}{|3-i|} \quad \left(\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore \quad |z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

8.12 दो सम्मिश्र संख्याओं के गुणन के गुण

1. संवरक गुण

यदि $z_1 = a + bi$ तथा $z_2 = c + di$ दो सम्मिश्र संख्याएँ हों, तो उनका गुणनफल $z_1 z_2$ भी एक सम्मिश्र संख्या होती है।

2. क्रमविनिमेय गुण

यदि $z_1 = a + bi$ तथा $z_2 = c + di$ दो सम्मिश्र संख्याएँ हों, तो $z_1 z_2 = z_2 z_1$

3. साहचर्य गुण

यदि $z_1 = (a + bi)$, $z_2 = c + di$ तथा $z_3 = (e + fi)$ तो $z_1(z_2.z_3) = (z_1.z_2).z_3$

4. गुणन के तत्समक अवयव का अस्तित्वः

प्रत्येक शून्येतर सम्मिश्र संख्या $z_1 = a + bi$ के लिए एक अद्वितीय सम्मिश्र संख्या $(1 + 0i)$ का अस्तित्व होता है, ताकि $(a + bi).(1 + 0i) = (1 + 0i)\ (a + bi) = a + bi$

मान लीजिए कि $z_1 = x + yi$ सम्मिश्र संख्या $z = a + bi$ के लिए गुणन का तत्समक अवयव है।

तब $\quad z.z_1 = z$ है। अर्थात् $(a + bi)\ (x + yi) = a + bi$

या $\quad (ax - by) + (ay + bx)i = a + bi$ या $ax - by = a$ तथा $ay + bx = b$

या $\quad x = 1$ और $y = 0$ $\qquad$ [समीकरणों को हल करने पर]

अर्थात् $\quad z_1 = x + yi = 1 + 0i$ गुणन के लिए तत्समक अवयव है।

सम्मिश्र संख्या $1 + 0i$ गुणन के लिए तत्समक अवयव है।

5. गुणात्मक व्युत्क्रम (प्रतिलोम) का अस्तित्व

गुणात्मक व्युत्क्रम एक ऐसी सम्मिश्र संख्या है जिसको किसी दी हुई शून्येतर सम्मिश्र संख्या के साथ गुणा करने पर गुणनफल 1 आता है। दूसरे शब्दों में, प्रत्येक शून्येतर सम्मिश्र संख्या $z = a + bi$ के लिए एक ऐसी अद्वितीय सम्मिश्र संख्या $(x + yi)$ का अस्तित्व होता है ताकि उनका गुणनफल $(1 + 0i)$ हो। अर्थात्, $(a + bi)\ (x + yi) = 1 + 0i$ या, $(ax - by) + (bx + ay)i = 1 + 0i$

वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$ax - by = 1 \text{ तथा } bx + ay = 0$$

वज्र – गुणन द्वारा, $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{-b} = \dfrac{1}{a^2 + b^2}$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{a}{a^2 + b^2} = \frac{(z)}{|z|^2} \text{ तथा } y = \frac{-b}{a^2 + b^2} = -\frac{(z)}{|z|^2}$$

इस प्रकार एक शून्येतर सम्मिश्र संख्या $z = (a + bi)$ का गुणात्मक प्रतिलोम है:

$$x + yi = \left(\frac{(z)}{|z|^2} - \frac{(z)}{|z|^2} i\right) = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

उदाहरण 8. 18. $2-4i$ का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

हलः मान लीजिए $z = 2-4i$

हमें प्राप्त होता हैः $\bar{z} = 2+4i$ $\quad |z|^2 = |2^2 + (-4)^2| = 20$

$\therefore$ वांछित गुणात्मक प्रतिलोम हैः $\dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{2+4i}{20} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{5}i$

6. गुणन का योग पर वितरण गुण

मान लीजिए $z_1 = a_1 + b_1 i$, $\quad z_2 = a_2 + b_2 i$ तथा $z_3 = a_3 + b_3 i$ तब, $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

देखें आपने कितना सीखा 8.4

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक को सरल कीजिएः

   (a) $(1+2i)(\sqrt{2}-i)$ $\qquad$ (b) $(\sqrt{2}+i)^2$

   (c) $(3+i)(1-i)(-1+i)$ $\qquad$ (d) $(2+3i) \div (1-2i)$

   (e) $(1+2i) \div (1+i)$ $\qquad$ (f) $(1+0i) \div (3+7i)$

2. निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं में से प्रत्येक का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिएः

   (a) $3-4i$ $\qquad$ (b) $\sqrt{3}+7i$ $\qquad$ (c) $\dfrac{3+5i}{2-3i}$

3. यदि $z_1 = 4+3i$, $\quad z_2 = 3-2i$ तथा $z_3 = i+5$ हो, तो सत्यापित कीजिए कि

   $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

4. यदि $z_1 = 2+i$, $z_2 = -2+i$ तथा $z_3 = 2-i$ हो, तो सत्यापित कीजिए कि

   $(z_1 . z_2) z_3 = z_1 (z_2 . z_3)$

8.13 सम्मिश्र संख्या का वर्गमूल

मान लीजिए $a + ib$ एक सम्मिश्र संख्या है तथा $x + iy$ उसका वर्गमूल है।

तब $\qquad \sqrt{a+ib} = x + iy \Rightarrow a + ib = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

वास्तविक तथा काल्पनिक भागों को बराबर करने पर

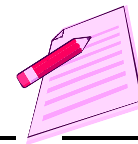
$x^2 - y^2 = a$ ....(1)

तथा $2xy = b$ ...(2)

बीजगणितीय तत्समक का प्रयोग करने पर :

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = (a)^2 + (b)^2 = a^2 + b^2$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad ...(3)$$



समीकरण (1) तथा (3) के अनुसार :

$$\left.\begin{aligned} 2x^2 &= \sqrt{a^2+b^2}+a \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} \\ \text{तथा } 2y^2 &= \sqrt{a^2+b^2}-a \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)} \end{aligned}\right\} \quad ...(4)$$

समीकरण (4) में, इस तरह x तथा y के मान के 4 युग्म पाते हैं और हम x तथा y के वही मान स्वीकार करेंगे जो समीकरण (1) तथा (2) दोनों को सन्तुष्ट करते हों।

समीकरण (2) में यदि 'b' धनात्मक है तब x तथा y दोनों धनात्मक होंगे, अथवा दोनों ऋणात्मक होंगे।

$$\sqrt{a+ib} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)} + i\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)}$$

$$\text{तथा } -\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)} - i\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)}$$

यदि b ऋणात्मक है तो x तथा y विपरीत चिन्ह के होंगे, तब

$$\sqrt{a+ib} = -\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)} + i\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{b^2+b^2}-a)}$$

$$\text{तथा } \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} - i\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}$$

अतः $a + ib$ के दोनों अवसरों पर दो–दो वर्गमूल विपरीत चिन्हों के होंगे।

उदाहरण 8.19. $7 + 24i$ का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : माना $\sqrt{7+24i} = a+ib$ ...(1)

दोनों ओर वर्ग करने पर, $7 + 24i = a^2 - b^2 + 2\,iab$, प्राप्त होता है।

वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर

$a^2 - b^2 = 7$ ...(2)

तथा $2\,ab = 24 \Rightarrow ab = 12$ ....(3)

अतः $(a^2+b^2)^2 = (a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2 \Rightarrow (a^2+b^2)^2 = 49 + 4\times 144$

$\Rightarrow (a^2+b^2)^2 = 625 \Rightarrow a^2 + b^2 = 25$ ...(4)

समीकरण (2) तथा (4), को हल करने पर

$2a^2 = 32 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$

तथा $2b^2 = 18 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3$

समीकरण (3), $ab = 12$ धनात्मक है, अतः a तथा b समान चिन्हों के होंगे

यहाँ पर $a = 4,\ b = 3$ अथवा $a = -4,\ b = -3$ होंगे

अतः $7 + 24i$ के दो वर्गमूल $4 + 3i$ तथा $-4 - 3i$ होंगे।

उदाहरण 8.20. '$-i$' का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : माना $\sqrt{-i} = a + ib$

$\Rightarrow \quad -i = a^2 - b^2 + 2\,iab$ ...(1)

वास्तविक तथा काल्पनिक भागों को बराबर करने पर

$a^2 - b^2 = 0$ ...(2)

तथा $2\,ab = -1 \Rightarrow ab = -\dfrac{1}{2}$ ...(3)

अब, $(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 = 0 + 4\left(\dfrac{1}{4}\right) = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$ ...(4)

समीकरण (2) तथा (4) द्वारा, $2b^2 = 1 \Rightarrow b^2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow b = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

तथा $2a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

समीकरण (3) के अनुसार : 'a' तथा 'b' को विपरीत चिन्ह का होना चाहिए

अतः '$-i$' के वर्गमूल $\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{i}{\sqrt{2}}$ तथा $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}$

देखें आपने कितना सीखा 3.5

निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

(*i*) $-21 - 20i$ (ii) $-4 - 3i$ (iii) $-48 - 14i$

आइये दोहराएँ

- $z = a + bi$ मानक रूप में एक सम्मिश्र संख्या है, जिसमें $a, b \in R$ तथा $i = \sqrt{-1}$ है।
- 'i' की कोई भी बड़ी घात चार मानों $i, -1, -i, 1$ में से किसी एक के रूप में व्यक्त की जा सकती है।
- सम्मिश्र संख्या $z = a + bi$ का संयुग्मी $a - bi$ होता है तथा इसे $\bar{z}$ द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है।
- सम्मिश्र संख्या $z = a + bi$ का मापांक (निरपेक्ष मान) $\sqrt{a^2 + b^2}$ होता है; अर्थात्

  $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (a) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ (b) $|z| = |\bar{z}|$ (c) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$
- सम्मिश्र संख्या $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ सम्मिश्र संख्या $z = a + bi$ का ध्रुवीय रूप निरूपित करती है, जहाँ $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ मापांक तथा $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$ कोणांक है।
- सम्मिश्र संख्या $z = a + bi$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ है।

- एक सम्मिश्र संख्या का वर्गमूल सम्मिश्र संख्या होती है।
- एक सम्मिश्र संख्या के दो वर्गमूलों में केवल विपरीत चिन्ह का ही अन्तर होता है।

सहायक वेबसाइट

- *https://www.youtube.com/watch?v=ldjDzriyi28*
- *https://www.youtube.com/watch?v=BvZcjQivfEs*
- *https://www.youtube.com/watch?v=M9071V5gye4*
- *https://www.youtube.com/watch?v=5MzCm16JN0k*
- *https://www.youtube.com/watch?v=hGGHbSgXXO4*
- *https://www.youtube.com/watch?v=cLQJ8x7fB_s*
- *https://www.youtube.com/watch?v=3s4CIWsLEXk*
- *https://www.youtube.com/watch?v=ag-VRTxSRHw*

आइए अभ्यास करें

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक के वास्तविक तथा काल्पनिक भागों को ज्ञात कीजिए:

   (a) $2+7i$ (b) $3+0i$ (c) $-\frac{1}{2}$

   (d) $5i$ (e) $\frac{1}{2+3i}$

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक को सरल कीजिए:

   (a) $\sqrt{-3}.\sqrt{-27}$ (b) $\sqrt{-3}\sqrt{-4}\sqrt{-72}$ (c) $3i^{15}-5i^{8}+1$

3. वह सम्मिश्र संख्याएँ लिखिए जिनके वास्तविक तथा काल्पनिक भाग क्रमित युग्मों के रूप में दिये गये हैं

   (a) $z(3,-5)$ (b) $z(0,-4)$ (c) $z(8,\pi)$

4. निम्नलिखित में से प्रत्येक का संयुग्मी ज्ञात कीजिए:

   (a) $1-2i$ (b) $-1-2i$ (c) $6-\sqrt{2}\,i$

   (d) $4i$ (e) $-4i$

5. निम्नलिखित में से प्रत्येक का मापांक ज्ञात कीजिए:

   (a) $1-i$ (b) $3+\pi i$ (c) $-\frac{3}{2}i$ (d) $-2+\sqrt{3}i$

6. $7i^{17}-6i^{6}+3i^{3}-2i^{2}+1$ को $a+bi$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

7. x तथा y के मान ज्ञात कीजिए, यदि

(a) $(x - yi) + 7 - 2i = 9 - i$ (b) $2x + 3yi = 4 - 9i$ (c) $x - 3yi = 7 + 9i$

8. निम्नलिखित में से प्रत्येक को सरल कीजिए:

(a) $(3 + i) - (1 - i) + (-1 + i)$ (b) $\left(\frac{1}{7}+i\right)-\left(\frac{2}{7}-i\right)+\left(\frac{3}{7}-2i\right)$

9. निम्नलिखित में से प्रत्येक का योज्य प्रतिलोम तथा गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए:

(a) $3 - 7i$ (b) $11 - 2i$ (c) $\sqrt{3} + 2i$ (d) $1-\sqrt{2}\,i$ (e) $\frac{1+5i}{1-i}$

10. निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं में से प्रत्येक का मापांक ज्ञात कीजिए:

(a) $\frac{1+i}{3-i}$ (b) $\frac{5+2i}{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}$

(c) $(3 + 2i)(1 - i)$ (d) $(1 - 3i)(-2i^3 + i^2 + 3)$

11. सम्मिश्र संख्याओं के निम्नलिखित युग्मों के लिए, सत्यापित कीजिए कि $|z_1 z_2| = |z_2||z_1|$:

(a) $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 1 - 5i$

(b) $z_1 = 3 - \sqrt{7}\,i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$

12. सम्मिश्र संख्याओं के निम्नलिखित युग्मों के लिए सत्यापित कीजिए कि $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$:

(a) $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 2 + 5i$ (b) $z_1 = -2 + 5i$, $z_2 = 3 - 4i$

13. '$2 + 3i$' का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

14. $-2+2\sqrt{-3}$ का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

15. 'i' का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 8.1

1 (a) $3\sqrt{3}\,i$ (b) $-3i$ (c) $\sqrt{13}\,i$

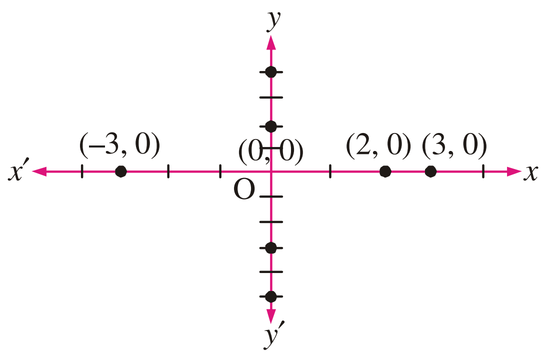
2. (a) $5 + 0i$ (b) $0 - 3i$ (c) $0 + 0i$

3. $12 - 4i$

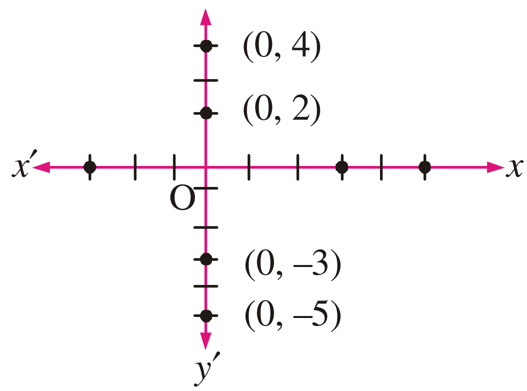
देखें आपने कितना सीखा 8.2

1 (a) $2i$ (b) $-5+3i$ (c) $-\sqrt{2}$ (d) $3+4i$

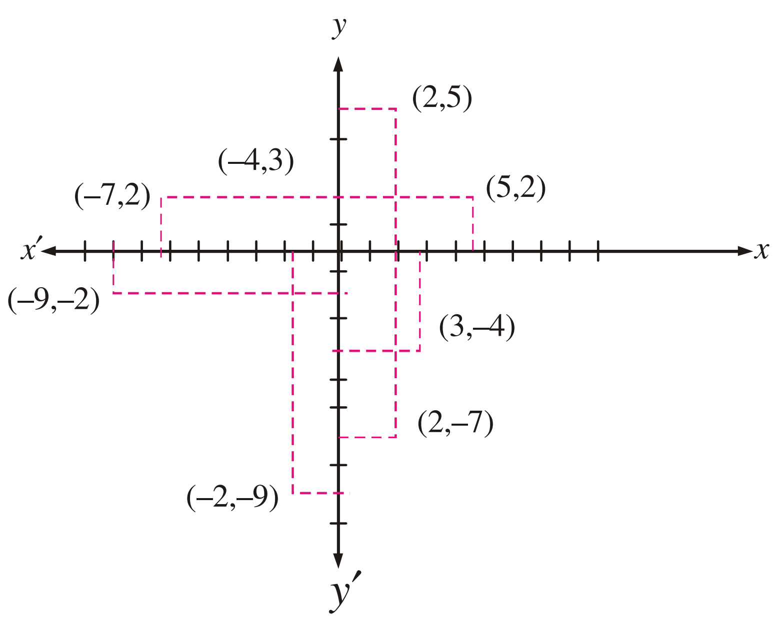
2. **(a)**



(b)



(c)

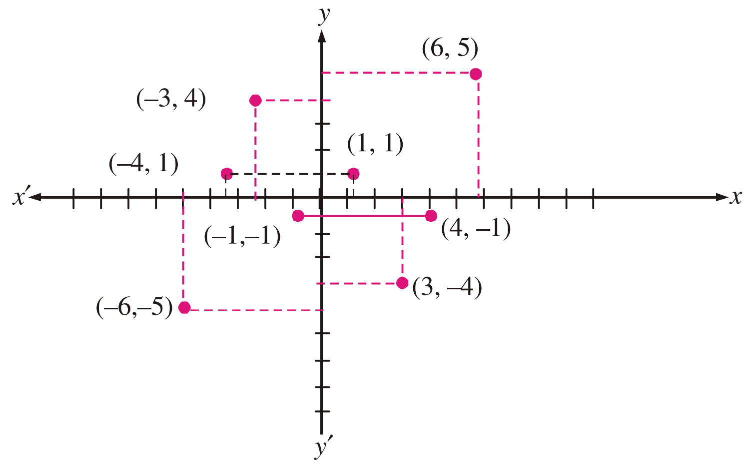


मॉड्यूल - III

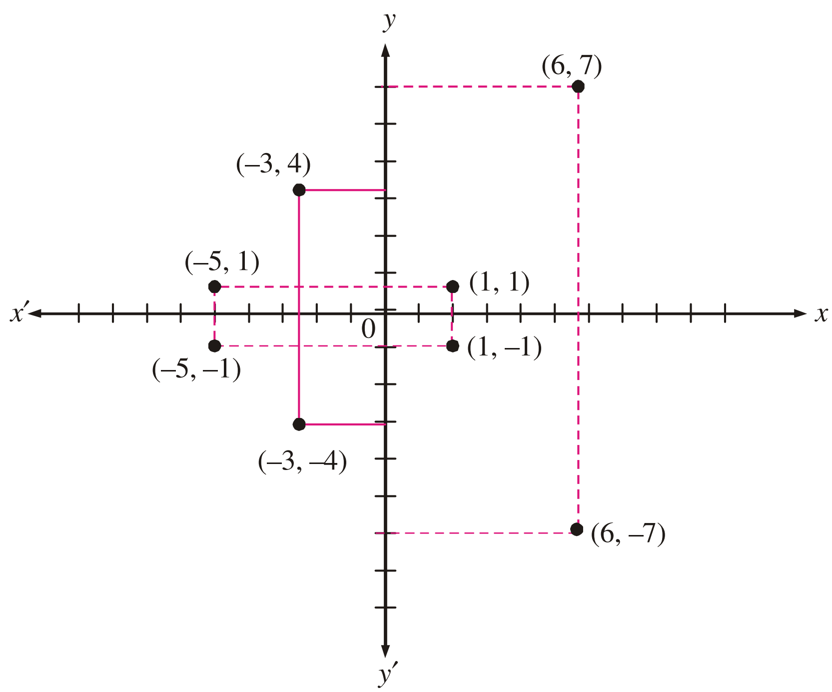
बीजगणित-I

टिप्पणी

(d)



(e)

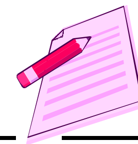


3. (a) (i) 3 (ii) $\sqrt{10}$ (iii) $\sqrt{13}$ (iv) $\sqrt{21}$

देखें आपने कितना सीखा 8.3

1. (a) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)i$ (b) $\frac{1}{6}(6+i)$

(c) 7i (d) $\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)+(7-\sqrt{3})$



2. (a) 11 + 3i (b) 11 + 3i
(c) हाँ (d) −1 − i
(e) 1 + i (f) नहीं

3. (a) 4 + 3i (b) 4 + 3i
(c) हाँ (d) 2 + 5i
(e) − 2 − i (f) नहीं

4. (a) −12 + 7i (b) − 4 + 3i

5. 18 − 6i

देखें आपने कितना सीखा 8.4

1. (a) $\left(\sqrt{2}+2\right)+\left(2\sqrt{2}-1\right)i$ (b) $1+2\sqrt{2}\,i$

(c) −2 + 6i (d) $\frac{1}{\sqrt{5}}(-4+7i)$

(e) $\frac{1}{2}(3+i)$ (f) $\frac{1}{58}(3-7i)$

2. (a) $\frac{1}{25}(3+4i)$ (b) $\frac{1}{52}(\sqrt{3}-7i)$

(c) $\frac{1}{34}(-9-19i)$

देखें आपने कितना सीखा 8.5

(i) 2 −5*i*, −2 + 5*i* (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}i, \frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}i$ (iii) $1-7i, -1+7i$

आइए अभ्यास करें

1. (a) 2, 7 (b) 3, 0 (c) $-\frac{1}{2}$, 0 (d) 0, 5

(e) $\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}$

2. (a) −9 (b) $-12\sqrt{6}\,i$ (c) − 4 − 3i

3. (a) 3 − 5i (b) 0 − 4i (c) 8 + πi

4. (a) $1 + 2i$ (b) $-1 + 2i$ (c) $6+\sqrt{2}\,i$

(d) $-4i$ (e) $4i$

5. (a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{9+\pi^2}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) $\sqrt{7}$

6. $9 + 4i$

7. (a) $x = 2,\ y = -1$ (b) $x = 2,\ y = -3$ (c) $x = 7,\ y = -3$

8. (a) $1 + 3i$ (b) $\frac{2}{7} + 0i$

9. (a) $-3 + 7i,\ \frac{1}{58}(3+7i)$

(b) $-11+2i,\ \frac{1}{125}(-11+2i)$

(c) $-\sqrt{3}-2i,\ \frac{1}{7}\left(\sqrt{3}-2i\right)$

(d) $-1+\sqrt{2}\,i,\ \frac{1}{3}(1+\sqrt{2}\,i)$

(e) $2-3i,\ \frac{1}{13}(2+3i)$

10. (a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (b) $\frac{1}{5}\sqrt{145}$ (c) $\sqrt{26}$ (d) $4\sqrt{5}$

13. $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}\,i\right)$

14. $1+\sqrt{3}i, -1-\sqrt{3}i$

15. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i, \frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$