1

मात्रक, विमाएं एवं सदिश

विज्ञान एवं विशेष रूप से भौतिकी में हम यथासंभव शुद्ध मापन का प्रयास करते हैं। विज्ञान के इतिहास में शुद्ध मापन से अनेक नये आविष्कार और महत्वपूर्ण विकास हुए हैं। स्पष्टतया, प्रत्येक मापन के उपयुक्त मात्रक होते हैं। उदाहरण के लिए यदि आप अपने कमरे की लम्बाई मापें तो इसको एक उपयुक्त मात्रक में अभिव्यक्त किया जाता है। इसी प्रकार यदि आप दो घटनाओं के बीच के अंतराल का मापन करते हें तो इसे किसी दूसरे मात्रक के रूप में अभिव्यक्त किया जाता है। किसी भौतिक राशि के मात्रक की व्युत्पत्ति अंतर्राष्ट्रीय समझौते के द्वारा नियत मूलभूत मात्रकों के द्वारा की जाती है। मूलभूत मात्रकों की धारणा विमाओं की संकल्पना को जन्म देती है जिसके भौतिकी में महत्वपूर्ण अनुप्रयोग हैं।

आप अध्ययन करेंगे कि भौतिक राशियाँ सामान्यतया दो समूहों में विभाजित की जा सकती हैं– अदिश एवं सदिश। अदिश राशियों का केवल परिमाण होता है जबकि सदिश राशियों का परिमाण एवं दिशा दोनों होते हैं। सदिश राशियों की गणितीय प्रक्रिया अदिश राशियों के लिये प्रयुक्त प्रक्रिया से कुछ भिन्न होती है। सदिश एवं अदिश राशियों की परिकल्पना विभिन्न प्राकृतिक घटनाओं की भौतिकी को समझने में सहायक हैं। इसका अनुभव आप इस पाठ्यक्रम में करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ का अध्ययन करने के पश्चात् आप :

- *भौतिकी के क्षेत्र, इसके नियमों की प्रकृति और भौतिकी के सिद्धान्तों के हमारे दैनिक जीवन में अनुप्रयोगों का वर्णन कर सकेंगे;*
- *मापन में सार्थक अंकों की संख्या ज्ञात कर सकेंगे और मापन में उनके महत्व को समझा सकेंगे;*
- *मौलिक एवं व्युत्पन्न राशियों में भेद कर पायेंगे तथा इनके SI मात्रक बता सकेंगे;*
- *विभिन्न भौतिक राशियों की विमाएं लिख सकेंगे;*

- *विमीय विश्लेषण के प्रयोग द्वारा समीकरणों की शुद्धता की जाँच कर सकेंगे एवं अज्ञात राशियों की विमीय प्रकृति निर्धारित कर पायेंगे;*
- *अदिश एवं सदिश राशियों में भेद बता सकेंगे एवं इनके उदाहरण प्रस्तुत कर सकेंगे;*
- *दो सदिशों को जोड़ व घटा सकेंगे एवं किसी सदिश को उसके घटकों में वियोजित कर सकेंगे;*
- *दो सदिशों का गुणनफल ज्ञात कर सकेंगे।*

1.1 भौतिक जगत और मापन

1.1.1 भौतिकी: प्रयोजन एवं प्रेरणा

भौतिकी का कार्य-परिसर बहुत विस्तृत है। अत्यन्त विविधतापूर्ण प्राकृतिक परिघटनाएं इसके अध्ययन क्षेत्र में आती हैं। इसमें शामिल हैं: यान्त्रिकी; ऊष्मा एवं ऊष्मागतिकी; प्रकाशिकी; तरंगें एवं दोलन; विद्युत एवं चुम्बकत्त्व; परमाण्विक एवं नाभिकीय भौतिकी; इलेक्ट्रॉनिकी एवं कम्प्यूटर आदि। बहुत समय से, कुछ समस्याओं के हल की आवश्यकता को लेकर जैव-भौतिकी, रसायन-भौतिकी, खगोल-भौतिकी, मृदा-भौतिकी, भू-भौतिकी इत्यादि विषयों का विकास किया गया है और इससे भौतिकी का क्षेत्र और विकसित हुआ है। भौतिकी में हम तारों, ग्रहों जैसे विशाल तथा मूल कणों जैसे सूक्ष्म पिंडो का, 10^{25} m (ब्रहमाण्ड का साइज़) जैसी विशाल तथा 10^{-14} m (परमाणु नाभिक का साइज) जैसी अल्प दूरियों का, 10^{55} kg (ब्रहमाण्ड का द्रव्यमान) जैसे विशाल और 10^{-30} kg (इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान) जैसे सूक्ष्म द्रव्यमानों का अध्ययन करते हैं।

भौतिकी संभवत: सभी विज्ञानों का आधार है। अभियांत्रिकी अथवा प्रौद्योगिकी में हुए सभी विकास भौतिकी के अनुप्रयोगों के अतिरिक्त और कुछ भी नहीं हैं।

भौतिकी के अध्ययन नें अनेक महत्वपूर्ण खोजों, आविष्कारों और उनके अनुप्रयोगों को जन्म दिया है, उदाहरणार्थ:

(i) एक गिरते हुए सेव से गुरुत्वाकर्षण का बोध,

(ii) जल, तापीय एवं नाभिकीय शक्ति-संयन्त्रों द्वारा विद्युत ऊर्जा का उत्पादन (विद्युत विहीन जगत और उसके जीवन की कल्पना करके देखिए)।

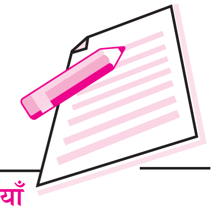
(iii) टेलिफोन एवं टेलिविजन द्वारा विश्व के किसी भी भाग से संदेश एवं दृश्य प्राप्त करना।

(iv) पृथ्वी से रोबोट नियन्त्रण प्रणाली का उपयोग कर के चन्द्रमा पर अवतरण तथा मंगल जैसे ग्रहों एवं अन्य खगोलिक पिंडों का अध्ययन।

(v) कृत्रिम उपग्रहों और उपग्रहों पर लगे टेलिस्कोपों की सहायता से बाहय अन्तरिक्ष का अध्ययन।

(vi) लेसर्स और उनके अनेक अनुप्रयोग

(vii) उच्च गति कम्प्यूटर, तथा ऐसे अनेक अनुप्रयोग।



टिप्पणियाँ

1.1.2 भौतिक नियमों की प्रकृति

भौतिकीविद् ब्रह्माण्ड का अन्वेषण करते हैं। वैज्ञानिक प्रक्रमों पर आधारित उनके अन्वेषण के परिसर में सूक्ष्म अवपरमाणुक कणों से लेकर विशाल तारे तक आते हैं।

भौतिक नियम प्रारूपिकत: ऐसे निष्कर्ष होते हैं जो बार बार दोहराए गए प्रयोगों और कई वर्षों तक लिए गए प्रेक्षणों पर आधारित होते हैं और जिन्हें वैज्ञानिक समाज द्वारा सार्वभौमिक मान्यता प्राप्त हो चुकी होती है। भौतिक नियम–

- कम से कम अपने वैधता क्षेत्र के अन्तर्गत सत्य होते हैं।
- सार्वभौम होते हैं। उन्हें ब्रह्माण्ड में हर कहीं लागू किया जा सकता है।
- सरल होते हैं। उन्हें प्रारूपिकत: एक गणितीय समीकरण के पदों में व्यक्त किया जा सकता है।
- निरपेक्ष होते हैं। ब्रह्माण्ड में कुछ भी उन्हें प्रभावित नहीं कर सकता।
- स्थायी होते हैं। खोजे जाने के बाद अपरिवर्तित रहते हैं (हालांकि, उनमें कुछ उपगमन/अथवा अपवाद हो सकते हैं)।
- सर्वशक्तिमान होते हैं। ब्रह्माण्ड में हर वस्तु को उनका पालन करना ही होता है।

1.1.3 भौतिकी, प्रौद्योगिकी एवं समाज

प्रौद्योगिकी, भौतिकी के नियमों का अनुप्रयोग होती है, जिसके द्वारा हमारे भौतिक जीवन स्तर की गुणवत्ता में सुधार के लिए मशीनों, युक्तियों आदि का निर्माण किया जाता है या उनमें सुधार लाया जाता है। उदाहरण के लिए:

(i) विभिन्न प्रकार के इन्जन (भाप, पैट्रोल, डीज़ल आदि) ऊष्मा गतिकी के नियमों पर आधारित होते हैं।

(ii) संचार के साधन जैसे रेडियो, टेलिफोन, टेलिविजन आदि विद्युत–चुम्बकीय तरंगों के प्रगमन पर आधारित होते हैं।

(iii) विद्युत जनन विद्युत चुम्बकीय प्रेरण के सिद्धान्त पर आधारित होता है।

(iv) नाभिकीय रिएक्टर नियंत्रित–नाभिकीय–विखण्डन के सिद्धान्त पर आधारित होता है।

(v) जेट वायुयान तथा रॉकेट न्यूटन के गति के द्वितीय एवं तृतीय नियमों पर आधारित होते हैं।

(vi) एक्स–किरणों, पराबैंगनी किरणों तथा अवरक्त किरणों का उपयोग चिकित्सा विज्ञान में निदान एवं रोगहरण के लिए किया जाता है।

(vii) मोबाइल फोन, परिकलित्र और संगणक इलेक्ट्रानिकी के सिद्धांत पर आधारित होते हैं।

(viii) लेसर्स इलेक्ट्रॉन संख्या उत्क्रमण की परिघटना पर आधारित होते हैं।

इस प्रकार के बहुत से उदाहरण दिए जा सकते हैं।

टिप्पणियाँ

1.1.4 मापन की आवश्यकता

प्रत्येक नई खोज समाज की संरचना और इसके लोगों के जीवन में क्रांतिकारी परिवर्तन लाती है। क्या आप इस तथ्य को कुछ उदाहरणों द्वारा स्पष्ट कर सकते हैं?

भौतिकी, जैसा हम जानते हैं, विज्ञान की एक शाखा है जिसमें प्रकृति और प्राकृतिक परिघटनाओं का अध्ययन किया जाता है। किसी परिघटना के सम्पूर्ण एवं उपयुक्त अध्ययन के लिए इससे संबद्ध राशियों का मापन अनिवार्य होता है। उदाहरण के लिए किसी कण की गति के अध्ययन के लिए किसी क्षण विशेष पर इसके विस्थापन, वेग एवं त्वरण का सही मापन करना होता है। जिसके लिए, समय और दूरी का मापन करना पड़ता है। इसी प्रकार, किसी गैस की अवस्था के पूर्ण अध्ययन के लिए आयतन, दाब और ताप का मापन आवश्यक होता है। किसी द्रव पर ऊष्मा के प्रभाव का अध्ययन करने के लिए उसका द्रव्यमान, आयतन और ताप मापना पड़ता है। अतः हम देखते हैं कि प्रत्येक प्राकृतिक परिघटना का अध्ययन करने के लिए, दूरी, समय, ताप, द्रव्यमान, बल आदि राशियों का मापन करना होता है। इससे मापन की आवश्यकता स्पष्ट हो जाती है।

1.2 माप के मात्रक (Unit of Measurement)

भौतिकी के नियमों को दूरी, चाल, समय, बल, क्षेत्रफल, आयतन, विद्युतधारा, आदि भौतिक राशियों के पदों में व्यक्त करते हैं। मापन के लिये प्रत्येक भौतिक राशि का एक मात्रक नियत किया जाता है। उदाहरण के तौर पर, समय का मापन मिनटों, घंटों या दिनों के रूप में किया जा सकता है। लेकिन विभिन्न व्यक्तियों के बीच उपयोगी वैचारिक आदान प्रदान हेतु इस मात्रक की तुलना सभी को स्वीकार्य मानक मात्रक से की जानी चाहिये। उदाहरणतया, जब हम कहते हैं कि दिल्ली एवं कलकत्ता के बीच की दूरी लगभग 2000 किलोमीटर (km) है तो हम मूलभूत मात्रक km के रूप में तुलना करते हैं। इसी प्रकार आप संभवतया द्रव्यमान के मात्रक किलोग्राम एवं समय के मात्रक सेकंड से परिचित होंगे। मानक मात्रकों के संदर्भ में सभी का एक मत होना आवश्यक है। ताकि जब हम 100 किलोमीटर, 10 किलोग्राम या 10 घंटे कहें तो दूसरे लोग इसे समझ सकें। विज्ञान में मूलभूत मात्रकों के संदर्भ में अंतर्राष्ट्रीय मतैक्य आवश्यक है अन्यथा संसार के एक भाग के व्यक्तियों द्वारा प्राप्त परीक्षणों के परिणामों को दूसरी भाषा के व्यक्ति नहीं समझ पायेंगे।

माना आप पानी में एक रसायन की विलेयता का परीक्षण कर रहे हैं। यदि आप रसायन का द्रव्यमान तोलों में एवं पानी का आयतन कप के परिमाण से व्यक्त करें तो क्या आपका जापानी मित्र आपके परीक्षण के परिणामों को समझ पायेगा?

आपके मित्र की समझ में परीक्षण के परिणाम आना असंभव है क्योंकि वह द्रव्यमान के मात्रक तोला एवं आयतन-मापन के लिये प्रयुक्त कप से सुपरिचित नहीं है। क्योंकि ये परिमाण के मानक मात्रक नहीं हैं। क्या अब आपको सर्वमान्य, मानक मात्रकों की आवश्यकता स्पष्ट हुई?

याद रखें कि विज्ञान में एक परीक्षण के परिणाम तभी स्थापित माने जाते हैं जबकि समान परिस्थितियों में अन्यत्र वह परीक्षण किये जाने पर समान परिणाम प्राप्त हों।

भारतीय परंपराओं में मापन

भारत में प्राचीन काल से ही यथाक्रम मापन की परिपाटी रही है, मनुस्मृति का निम्नलिखित उद्धरण इस बात को भली–भाँति स्पष्ट करता है:

"राजा को प्रत्येक 6 माह में बाटों एवं तुलाओं का परीक्षण कर यह सुनिश्चित कर लेना चाहिये कि मापन सही हैं एवं इन्हें राजमुद्रित कर दिया गया है।"

– मनुस्मृति, 8वाँ अध्याय, श्लोक सं. 403

हड़प्पा काल में मापन के संकेत बहुतायत में मिलते हैं। समान रूप से चौड़ी सड़कें, 4 : 2 : 1 अनुपात की ईंटें, लोथल में पाया गया हाथी दाँत का पैमाना जिसकी न्यूनतम माप 1.70 mm थी, षटफलकीय 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200 एवं 500 इकाईयों के भार (1 इकाई = 20 ग्राम) पाये गये,

मौर्य काल में लंबाई के निम्न मात्रक प्रचलन में थे :

8 परमाणु	= 1 रज:कण	8 रज:कण	= 1 लिक्षा
8 लिक्षा	= 1 यूकमाध्य	8 यूकमाध्य	= 1 यवमाध्य
8 यवमाध्य	= 1 अंगुल	8 अंगुल	= 1 धनर्मुष्टि

मुगल काल में शेरशाह एवं अकबर ने भार एवं मापन के क्षेत्र में एकरूपता पुनर्स्थापन का प्रयास किया। अकबर ने लंबाई मापने के लिये 41 अंगुल का गज आरंभ किया। जमीन का क्षेत्रफल–मापन के लिये बीघा प्रयुक्त किया (1 बीघा = 60 गज × 60 गज)।

द्रव्यमान एवं आयतन के मात्रकों का स्पष्ट उल्लेख आयुर्वेद में भी पाया जाता है।

1.2.1 मात्रकों की SI पद्धति

सर्वमान्य मात्रकों की आवश्यकता को ध्यान में रखते हुये 1971 में आयोजित चौदहवीं **जनरल कान्फ्रेंस आन वेट्स एण्ड मेजरस** में 7 मूल मात्रकों की पद्धति को अपना लिया गया। इन 7 मात्रकों पर आधरित SI मात्रक प्रणाली बनी। SI अंतर्राष्ट्रीय मात्रक पद्धति **(Système International d'Unités)** का संक्षिप्तीकरण है। यह प्रणाली मीट्रिक प्रणाली के नाम से लोकप्रिय है। SI मात्रक एवं उनके प्रतीक सारणी 1.1 में सूचीबद्ध हैं।

सारणी 1.1 : आधारभूत SI मात्रक

राशि	मात्रक	प्रतीक
लम्बाई	मीटर	m
द्रव्यमान	किलोग्राम	kg
समय	सेकन्ड	s
विद्युतधारा	ऐम्पियर	A
ताप	केल्विन	K
ज्योति तीव्रता	कैन्डेला	cd
पदार्थ की मात्रा	मोल	mol

लम्बाई के मात्रक मील, गज एवं फुट आज भी भारत एवं अन्य देशों में कुछ कार्यों में प्रयुक्त होते हैं। **लेकिन वैज्ञानिक कार्य के लिये हम सदैव SI मात्रकों का ही प्रयोग करते हैं।**

SI प्रणाली मीट्रिक प्रणाली है। इसका प्रयोग आसान है क्योंकि इस प्रणाली में मूल मात्रकों से छोटे और बड़े मात्रक दस के अपवर्त्यों या अपवर्तकों के रूप में व्यक्त किये जा सकते हैं। मात्रकों के अपवर्तकों एवं अपवर्त्यों को विशेष नाम दिये गये हैं। ये सारणी 1.2 में सूचीबद्ध हैं।

सारणी 1.2 : दस की घात के पूर्वलग्न

दस की घात	पूर्वलग्न	प्रतीक	उदाहरण	
10^{-18}	एटो	a	एटोमीटर	(am)
10^{-15}	फेम्टो	f	फेम्टोमीटर	(fm)
10^{-12}	पीको	p	पीकोमीटर	(pF)
10^{-9}	नेनो	n	नेनोमीटर	(nm)
10^{-6}	माइक्रो	μ	माइक्रोन	(μm)
10^{-3}	मिली	m	मिलीग्राम	(mg)
10^{-2}	सेंटी	c	सेंटीमीटर	(cm)
10^{-1}	डेसी	d	डेसीमीटर	(dm)
10^{1}	डेका	da	डेकाग्राम	(dag)
10^{2}	हेक्टो	h	हेक्टोमीटर	(hm)
10^{3}	किलो	k	किलोग्राम	(kg)
10^{6}	मेगा	M	मेगावाट	(MW)
10^{9}	गीगा	G	गीगाहर्ट्स	(GHz)
10^{12}	टेरा	T	टेराहर्ट्स	(THz)
10^{15}	पेटा	P	पेटा किलोग्राम	(Pkg)
10^{18}	एग्जा	E	एग्जा किलोग्राम	(Ekg)

सारणी 1.3 : कुछ द्रव्यमानों की परिमाण कोटि

द्रव्यमान	किलोग्राम
इलैक्ट्रॉन	10^{-30}
प्रोटोन	10^{-27}
अमीनो अम्ल	10^{-25}
हीमोग्लोबिन	10^{-22}
फ्लू वायरस	10^{-19}
विशाल अमीबा	10^{-8}
वर्षा की बूँद	10^{-6}
चींटी	10^{-2}
मानव	10^{2}
सेटर्न 5 राकेट	10^{6}
पिरामिड	10^{10}
पृथ्वी	10^{24}
सूर्य	10^{30}
आकाशगंगा	10^{41}
ब्रह्माण्ड	10^{52}

सारणी 1.4 : कुछ लम्बाईयों की परिमाण कोटि

लम्बाई	मीटर
प्रोटॉन की त्रिज्या	10^{-15}
परमाणु की त्रिज्या	10^{-16}
विषाणु की त्रिज्या	10^{-7}
विशाल अमीबा की त्रिज्या	10^{-4}
अखरोट की त्रिज्या	10^{-2}
मनुष्य की ऊँचाई	10^{0}
सर्वाधिक ऊँचा पर्वत	10^{4}
पृथ्वी की त्रिज्या	10^{7}
सूर्य की त्रिज्या	10^{9}
सूर्य एवं पृथ्वी के मध्य दूरी	10^{11}
सौर परिवार की त्रिज्या	10^{13}
निकटतम तारे की दूरी	10^{16}
आकाशगंगा की त्रिज्या	10^{21}
दृश्यमान ब्रह्माण्ड की त्रिज्या	10^{26}

सारणी 1.5 : कुछ समय अंतराल का परिमाण कोटि

अंतराल	सेकंड
प्रकाश द्वारा नाभिक को पार करने में लगा समय	10^{-23}
दृश्यमान प्रकाश तरंगों का आवर्तकाल	10^{-15}
माइक्रोवेव्ज का आवर्तकाल	10^{-10}
म्यूऑन की अर्ध आयु	10^{-6}
उच्चतम श्रव्य ध्वनि का	आवर्तकाल 10^{-4}
मनुष्य के हृदयस्पंद का	आवर्तकाल 10^{0}
मुक्त न्यूट्रॉन की अर्धआयु	10^{3}
पृथ्वी के घूर्णन का आवर्तकाल (दिन)	10^{5}
पृथ्वी के परिक्रमण काआवर्तकाल (वर्ष)	10^{7}
मनुष्य की आयु	10^{9}
प्लूटोनियम-239 की अर्धआयु	10^{12}
पर्वत शृंखला की जीवन	अवधि 10^{15}
पृथ्वी की आयु	10^{17}
ब्रह्माण्ड की आयु	10^{18}

सारणी 1.3 से ब्रह्माण्ड की विभिन्न वस्तुओं के द्रव्यमान, सारणी 1.4 से विभिन्न वस्तुओं के साइज एवं सारणी 1.5 से ब्रह्माण्ड की विभिन्न घटनाओं के समय अंतरालों का अनुमान लगाया जा सकता है।

1.2.2 द्रव्यमान, लंबाई और समय के मानक मात्रक

एक बार मात्रकों की SI पद्धति के उपयोग का निश्चय कर लेने के बाद हमें मूल राशियों के लिये मानक मात्रकों का समुच्चय (Set) निश्चित कर लेना चाहिये। अब हम द्रव्यमान, लम्बाई एवं समय के मानक मात्रकों को परिभाषित करते हैं :

(i) द्रव्यमान : द्रव्यमान का SI मात्रक किलोग्राम है। किलोग्राम का मानक 1857 में स्थापित किया गया। यह प्लेटिनम-इरीडियम मिश्रधातु के बने एक विशिष्ट, असाधारण रूप से स्थायी बेलन का द्रव्यमान है, जिसे फ्रांस के पेरिस स्थित भार तथा मापन के अंतर्राष्ट्रीय ब्यूरो (International Bureau of Weights and Measures) में रखा गया है। इसी मिश्रधातु के आदिप्रारूप किलोग्राम बनाकर संसार के सभी देशों को दे दिये गये हैं। भारत का राष्ट्रीय आदिप्रारूप किलोग्राम संख्या 57 है जो राष्ट्रीय प्रयोगशाला (National Physical Laboratory) नई दिल्ली में सुरक्षित है, (चित्र 1.1)।

चित्र 1.1: किलोग्राम का आदिप्रारूप

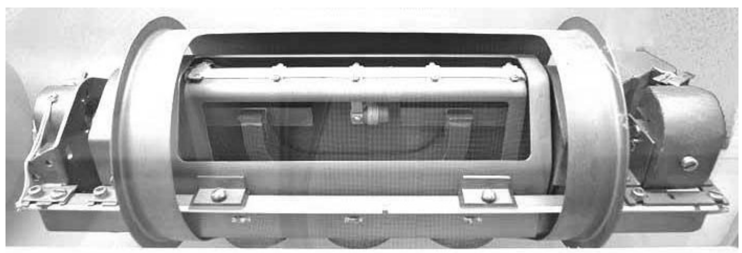
टिप्पणियाँ

(ii) लम्बाई : मीटर को एक प्राकृतिक घटना के रूप में परिभाषित किया जाता है। निर्वात में प्रकाश द्वारा **1/299792458 सेकंड** में चली गई दूरी को एक मीटर कहते हैं।

यह परिभाषा इस तथ्य पर आधारित है कि निर्वात में प्रकाश की चाल 299792458 मीटर प्रति सेकंड है।

(iii) समय : सीजियम - **133** परमाणु को अपनी मूल स्थिति के दो अतिसूक्ष्म स्तरों के बीच **9192631770** कम्पन करने के लिये आवश्यक समय को एक सेकंड के रूप में परिभाषित किया गया है।

सीजियम परमाणु घड़ी
(S60,000)
सीजियम बेरियम टयूब



चित्र. 1.2 : परमाणु घड़ी

सेकंड की यह परिभाषा एक युक्ति, के विकास में सहायक सिद्ध हुई जिसे परमाणु घड़ी कहते हैं, (चित्र 1.2)। भारत की राष्ट्रीय भौतिक प्रयोगशाला में सुरक्षित सीजियम घड़ी की अनिश्चितता $\pm 1 \times 10^{-12}$ सेकंड है जो कि एक सेकंड में एक पिकोसेकंड की त्रुटि के तुल्य है। वर्तमान में 10^{15} में 5 भाग की त्रुटि तक की घड़ी विकसित की जा चुकी हैं। इसका अर्थ यह है कि यदि घड़ी 10^{15} सेकंड तक चले तो इसमें ± 5 सेकंड से कम त्रुटि आयेगी। यदि सेकंड को वर्षों में परिवर्तित किया जाय तो एक आश्चर्यजनक परिणाम प्राप्त होता है कि यदि यह घड़ी 60 लाख वर्षों तक चलती रह सके तो इसके द्वारा समय मापन में ± 1 सेकंड से कम त्रुटि आयेगी। यह प्रयासों की चरम सीमा नहीं है। प्रामाणिकता को और अधिक बढ़ाने के लिये निरंतर प्रयास जारी है। अंततोगत्वा हम 10^{18} सेकंड में ± 1 सेकंड की त्रुटि वाली घड़ी बनाने की आशा करते हैं। आपकी तकनीकी उपलब्धि संबंधी जानकारी के लिये बता दें कि यदि यह घड़ी ब्रह्माण्ड के जन्म (जिसे बिग बैंग कहा जाता है) के समय चलाई जाती तो आज तक इसमें मात्र ± 2 सेकंड की त्रुटि आती।

नवीन खोजों में परिशुद्ध मापन की भूमिका

लार्ड रैले द्वारा नाइट्रोजन के घनत्व मापन के लिये किये गये प्रयोग इस तथ्य का एक अतिविशिष्ट उदाहरण है कि शुद्ध मापन नये आविष्कारों में सहायक हो सकते हैं।

एक प्रयोग में उन्होंने एक नली में लाल गर्म ताँबे के ऊपर एवं द्रव अमोनिया के बीच से हवा के बुलबुले गुजारे और इस प्रकार प्राप्त शुद्ध नाइट्रोजन का घनत्व मापा। एक दूसरे प्रयोग में उन्होंने हवा को सीधे लाल गर्म ताँबे के ऊपर गुजारा और शुद्ध नाइट्रोजन का घनत्व मापा। दूसरे प्रयोग में प्राप्त घनत्व पहले प्रयोग से प्राप्त घनत्व की तुलना में 0.1% अधिक पाया गया। इस प्रयोग से हवा में नाइट्रोजन से भारी गैस की उपस्थिति के संकेत मिले। बाद में उन्होंने इस गैस-आर्गन की खोज की और इसके लिये उन्हें नोबेल पुरस्कार प्राप्त हुआ।

दूसरा उदाहरण माइकेलसन और मौर्ले का असफल प्रयोग है। माइकेलसन व्यतिकरणमापी का प्रयोग करते हुये वे पृथ्वी की गति की दिशा एवं इसके अनुप्रस्थ दिशा में चलने वाली प्रकाश तरंगों के अध्यारोपण से प्राप्त व्यतिकरण चित्राम (Interference pattern) में 0. 4 फ्रिंज चौड़ाई के स्थान परिवर्तन की अपेक्षा कर रहे थे। उनका यंत्र व्यतिकरण चित्राम में अपेक्षित परिवर्तन की अपेक्षा सौ गुना संवेदनशील था। इस प्रकार वे ईथर की तुलना में पृथ्वी की गति मापन की अपेक्षा कर रहे थे और इस बात को सिद्ध करना चाह रहे थे कि ईथर का वास्तव में अस्तित्व है। लेकिन जब उनका यंत्र कोई परिवर्तन (shift) संसूचित नहीं कर सका तो वैज्ञानिक दुनिया में विपरीत परिणामों की व्याख्या को लेकर लंबी बहस छिड़ गई। इससे **लंबाई संकुचन** एवं **समय विस्फारण** की अवधारणाओं का जन्म हुआ जिनकी परिणति **सापेक्षता के सिद्धांत** में हुई।

स्पेक्ट्रोस्कोपी की एक नई तकनीक से किसी नाभिकीय अभिक्रिया में निर्मित नये परमाणुओं के अवशेषों का संसूचन सूक्ष्मता से करना संभव हो सका। इसमें कई नई खोजें संभव हुईं।

1.2.3 सार्थक अंक

जब कोई विद्यार्थी किसी रेखा की लम्बाई 6.8 cm मापता है तो उसके मापन में अंक 6 तो निश्चित है जबकि 8 अनिश्चित है क्योंकि 0.8 से जरा कम या ज्यादा माप होने पर भी प्रेक्षक उसे 0.8 ही लिखता है। प्राय: मापन के वे सब अंक जो निश्चयात्मकता से ज्ञात है जमा पहला अनिश्चयात्मक अंक मिल कर सार्थक अंक कहलाते हैं।

इस प्रकार 1.4 cm में दो सार्थक अंक हैं। किसी राशि के सार्थक अंक उसके मापन में प्रयुक्त यन्त्र की यथार्थता पर निर्भर करते हैं। किसी राशि में जितने अधिक सार्थक अंक होंगे उसके मापन में प्रतिशत त्रुटि उतनी ही कम होगी। यदि मापन में सार्थक अंकों की संख्या कम होगी तो इसमें प्रतिशत त्रुटि अधिक होगी।

किसी राशि में सार्थक अंकों की संख्या निम्नलिखित नियमों का अनुसरण करके प्राप्त की जा सकती है:

(i) किसी संख्या में जो अंक शून्य नहीं होते वे सभी सार्थक होते हैं। उदाहरण के लिए 315.58 में पाँच सार्थक अंक हैं।

(ii) दो न-शून्य (non-zero) अंको के बीच के सभी शून्य सार्थक होते हैं। उदाहरणार्थ 5,300,405,003 में दस सार्थक अंक हैं।

(iii) मापन में लिखे गए दशमलव पश्चात के शून्य या न-शून्य अंक के दाहिनी ओर लिखे गए सभी शून्य सार्थक होंगे। इस प्रकार 50.00 में चार सार्थक अंक है और 0.04050 में भी चार सार्थक अंक हैं। ध्यान दें कि 0.04050 में दशमलव के पश्चात पहला शून्य सार्थक नहीं है परन्तु आखिरी शून्य सार्थक है।

(iv) दशमलव भिन्न में दशमलव पश्चात और न-शून्य अंक से पहले के सभी शून्य सार्थक नहीं होते हैं। उदाहरणार्थ 0.00043 में केवल दो सार्थक अंक हैं परन्तु 2.00023 में छः सार्थक अंक है। इस बात पर भी ध्यान दिया जाए कि दशमलव से पहले प्रथा के रुप में लिखा गया शून्य भी सार्थक नहीं होता है।

(v) संख्या में अन्तिम न-शून्य अंक के पश्चात लिखे गए सभी शून्य सार्थक होते हैं बशर्ते यह संख्या वास्तविक मापन को व्यक्त करती हो। उदाहरण के लिए यदि दो पिंडों के बीच की दूरी 4050 m (निकटतम मीटर माप में) है तो 4050 m में 4 सार्थक अंक हैं।

(vi) मात्रक परिवर्तन से सार्थक अंकों की संख्या नहीं बदलती। उदाहरण के लिए, यदि किसी वस्तु की लम्बाई 348.6 cm दी गई है तो इसमें 4 सार्थक अंक हैं। यदि लम्बाई मीटर में 3.486 m लिखें तो अभी भी इसमें चार सार्थक अंक हैं।

(vii) किसी पूर्ण संख्या में अन्तिम न-शून्य अंक के दाहिनी ओर के शून्य सार्थक नहीं होते। उदाहरण के लिए 5000 में केवल एक सार्थक अंक है।

मापन में सार्थक अंकों का महत्व

जैसा पहले उल्लेख किया जा चुका है, किसी राशि में सार्थक अंकों की संख्या का निर्धारण मापन की यथार्थता से होता है। माना कि किसी सिक्के का व्यास 2 cm है। यदि कोई विद्यार्थी इसका व्यास मीटर स्केल से नापता है जो 0.1 cm तक ही ठीक ठीक मापन कर सकता है तो विद्यार्थी इसका व्यास 2.0 cm अर्थात केवल दो सार्थक अंकों तक बताएगा। यदि व्यास का मापन वर्नियर कैलिपर्स जैसे किसी यंत्र द्वारा किया जाए जो 0.01 cm तक ठीक ठीक माप सकता है तो वह व्यास को 2.00 cm अर्थात तीन सार्थक अंको तक लिखेगा। इसी प्रकार, यदि मापन पेंचमापी जैसे किसी यंत्र द्वारा किया जाए जो 0.001 cm तक ठीक-ठीक नाप सकता है तो व्यास 2.000 cm अर्थात् चार सार्थक अंको तक रिकॉर्ड किया जाएगा। अतः मापन का अभिलेखन मापक यंत्र की यथार्थता को ध्यान में रखते हुए किया जाना चाहिए।

गणनाओं का परिणाम व्यक्त करने में सार्थक अंकों का महत्व

माना कि कोई विद्यार्थी एक घन की कोर मीटर स्केल से मापता है जो 3.2 cm आता है। वह गणना द्वारा इस घन का आयतन परिकलित करता है और इसे $(3.2 \times 3.2 \times 3.2)$ घन

सेन्टीमीटर या 32.768 cm^3 रिपोर्ट करता है। यह परिणाम गणित की दृष्टि से तो सही है परन्तु वैज्ञानिक मापन की दृष्टि से यथार्थ नहीं है। आयतन का जो सही मान बताया जाना चाहिए वह है 33cm^3 । ऐसा इसलिए है क्योंकि घन की कोर की माप में केवल दो सार्थक अंक हैं अत: परिणाम में भी दो ही सार्थक अंक होने चाहिए जबकि 32.768 में पाँच सार्थक अंक हैं जो ठीक नहीं है।

जोड़, घटा, गुणा और भाग संक्रियाओं में सार्थक अंक

(i) **जोड़ और घटा**– माना हमें तीन राशियों 2.7m, 3.68m तथा 0.486 m को जोड़ना है। इन राशियों में पहला माप केवल एक दशमलव अंक तक ही ज्ञात है अत: ये राशियाँ एक दशमलव अंक तक ही निश्चित होंगी। इसलिए इन राशियों का योग 6.848 न लिख कर 6.8 लिखा जाना चाहिए।

इसी प्रकार 2.65×10^3 cm और 2.65×10^2 cm का योग ज्ञात करने के लिए पहले सभी संख्याओं को 10 की समान घातों के पदों में व्यक्त करना चाहिए। तब राशियाँ हो जायेंगी, 2.65×10^3 cm तथा 0.263×10^3 cm। क्योंकि पहली संख्या दो दशमलव अंकों तक ज्ञात है इनका योग भी 2 दशमलव अंकों तक होना चाहिए। अत: $2.65 \times 10^3 \text{ cm} + 0.263 \times 10^3 \text{ cm} = 2.91 \times 10^3$ cm.

यही बात घटाने की संक्रिया पर भी लागू होती है। उदाहरण के लिए 4.6 cm में से 2.38 cm घटाने पर परिणाम 2.2 cm होगा न कि 2.22 cm

(ii) **गुणा एवं भाग**– माना कि किसी प्लेट की लम्बाई 3.003 m और चौड़ाई 2.26 m मापी गई । गणनात्मक परिकलन के अनुसार इसका क्षेत्रफल 6.78678 m^2 होगा। परन्तु वैज्ञानिक मापन की दृष्टि से यह सही नहीं है। इस परिणाम में छ: सार्थक अंक हैं। किन्तु न्यूनतम सार्थक अंकों की संख्या (चौड़ाई के मापन में) केवल तीन है। अत: परिणाम को भी केवल तीन सार्थक अंकों तक ही लिखा जाना चाहिए। अत: क्षेत्रफल का सही मान 6.79 m^2 होगा।

यही विधि भाग के लिए भी लागू होती है। उदाहरण के लिए 248.57 को 56.9 से भाग देने पर भागफल 4.3685413 प्राप्त होता हैं परन्तु परिणाम को तीन सार्थक अंको तक ही लिखना है क्योंकि भाजक में सार्थक अंकों की संख्या तीन है जो दोनों संख्याओं में न्यूनतम है। अत: परिणाम होगा: 4.37।

इसी प्रकार, यदि कोई पिंड 142 s में 1452 m चलता है तो इसकी चाल, गणितीय परिकलन से $\frac{1452 \text{ m}}{142 \text{ s}}$ अथवा 10.225352 ms^{-1} होगी परन्तु वैज्ञानिक मापनों में इसे 10.2 ms^{-1} लिखा जाएगा क्योंकि समय के मान में केवल 3 सार्थक अंक हैं।

(iii) **गणनाओं में प्रयुक्त नियतांकों के मान**– यदि वृत्त की त्रिज्या 3.35 cm हो तो क्षेत्रफल (πr^2) का परिकलन करने के लिए π का मान दो दशमलव अंकों तक (अर्थात π = 3.14) ही लिया जाना चाहिए (3.1416 नहीं)। अत: वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi r^2 = (3.14 \times 3.35 \times 3.35)\ cm^2 = 35.2\ cm^2$ होगा न कि 35.23865 cm^2।

(iv) यदि किसी मापित राशि को किसी नियतांक से गुणा किया जाता है तो गुणनफल में सभी अंक सार्थक होते हैं। उदाहरण के लिए, यदि किसी गेंद का द्रव्यमान 32.59 g है तो ऐसी 10 गेदों का द्रव्यमान $32.59 \times 10 = 325.90$ g होगा। ध्यान दीजिए कि इसमें सार्थक अंकों की संख्या पाँच है।

1.2.4 व्युत्पन्न मात्रक

अब तक हमने द्रव्यमान, लंबाई और समय मापन के लिये तीन मूल मात्रकों को परिभाषित किया है। अनेक राशियों के मापन के लिए हमें अन्य मात्रकों की आवश्यकता होती है जिन्हें मूल मात्रकों के विभिन्न संयोगों द्वारा प्राप्त किया जाता है। इन मात्रकों को व्युत्पन्न मात्रक कहते हैं। उदाहरणतया लंबाई एवं समय के मात्रकों की सहायता से चाल या वेग का मात्रक प्राप्त होता है जिसे ms^{-1} द्वारा दर्शाया जाता है। दूसरा उदाहरण लंबाई के मात्रक की स्वयं के साथ अन्योन्य क्रिया है जिसके द्वारा क्षेत्रफल एवं आयतन के मात्रकों की व्युत्पत्ति होती है और उन्हें क्रमश: m^2 और m^3 द्वारा दर्शाया जाता है।

अब हम आपसे आपकी सुपरिचित भौतिक राशियों व इनके मात्रकों की सूची तैयार किये जाने की अपेक्षा करते हैं।

कुछ व्युत्पन्न मात्रकों को विशेष नाम दिये गये हैं। निम्न सारणी में साधारणतया उपयोग में आने वाले व्युत्पन्न मात्रक दिये गये हैं।

सारणी 1.6 : विशेष नाम वाले व्युत्पन्न SI मात्रकों के उदाहरण

राशि	नाम	प्रतीक	मूल मात्रक प्रतीक
बल	न्यूटन	N	$kg\,m\,s^{-2}$
दाब	पास्कल	Pa	$N\,m^{-2}$
ऊर्जा/कार्य	जूल	J	Nm
शक्ति	वाट	W	$J\,s^{-1}$

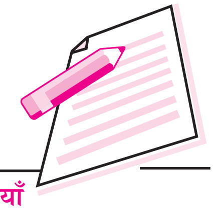
SI प्रणाली के मात्रकों के प्रयोग का एक लाभ यह है कि ये एक संबद्ध समुच्चय (coherent set) बनाते हैं और किन्हीं दो SI मात्रकों के गुणन या परस्पर विभाजन द्वारा प्राप्त व्युत्पन्न मात्रक एक अन्य SI मात्रक होता है। उदाहरणतया, बल एवं लंबाई के SI मात्रकों का गुणन कार्य के SI मात्रक को निर्मित करता है। मात्रकों को लिखे जाने के क्रम में कुछ सावधानी बरती जानी चाहिये, उदाहरणतया, Nm को इसी क्रम में लिखा जाना चाहिये। यदि भूल से हम इसे mN लिख दें तो यह मिलीन्यूटन बन जाता है जो कि पूर्णतया अलग बात है।

याद रखें कि भौतिकी में कोई भी राशि सही मात्रकों के साथ प्रयोग की जानी चाहिए अन्यथा यह निरर्थक होगी।

उदाहरण 1.1 : आनन्द, रीना एवं कैफ के अध्यापक ने उन्हें एक बीकर में भरे पानी का आयतन मापने को कहा

आनन्द ने 200 लिखा; रीना ने 200 mL लिखा; कैफ ने 200 Lm लिखा

कौन सा उत्तर सही है?



हल : पहले उत्तर में कोई मात्रक नहीं है अत: इससे कोई आशय स्पष्ट नहीं होता, तीसरा उत्तर भी ठीक नहीं है क्योंकि Lm मात्रक नहीं होता। केवल दूसरा उत्तर सही है। यह मिलीलीटर मात्रक को दर्शाता है।

एक पुस्तक का द्रव्यमान kg या g में अभिव्यक्त किया जा सकता है। **आप ग्राम के लिये gm प्रयोग न करें क्योंकि ग्राम का सही प्रतीक g है न कि gm।**

नामपद्धति एवं प्रतीक

(i) मात्रकों के प्रतीकों में पूर्ण विराम का प्रयोग नहीं किया जाना चाहिए और इसे एकवचन में प्रयोग किया जाना चाहिए। उदाहरण के लिए, पेंसिल की लंबाई 7cm लिखी जानी चाहिये न कि 7cm. या 7cms।

(ii) यदि एकल पूर्वलग्न उपलब्ध हों तो दोहरे पूर्वलग्नों को प्रयोग नहीं किया जाना चाहिए। उदाहरणतया, नेनोसेकंड के लिये ns लिखा जाना चाहिए न कि mμs; इसी प्रकार पिकोफैरड के लिये pF प्रयोग किया जाना चाहिए नकि μμf।

(iii) एक मात्रक के प्रतीक के पूर्व एक पूर्वलग्न प्रयोग किया जाता है तो पूर्वलग्न और प्रतीक के संयोग को एक प्रतीक माना जाना चाहिये जिसे बिना कोष्ठकों के प्रयोग के धनात्मक एवं ऋणात्मक घातों के रूप में लिखा जा सकता है। उदाहरणतया, μs^{-1}, cm^2, mA^2

$\mu s^{-1} = (10^{-6}s)^{-1}$ (न कि $10^{-6}s^{-1}$)

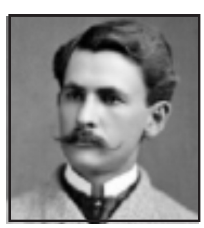
(iv) $cm\ s^{-2}$ के स्थान पर cm/s/s का प्रयोग न करें, इसी प्रकार 1 प्वाज = $1\ g\ s^{-1}cm^{-1}$ लिखें न कि 1 g/s/cm

(v) जब एक वाक्य में किसी मात्रक को पूरा लिखा जाना हो तो छोटे अक्षरों का व्यवहार किया जाना चाहिये न कि बड़े अक्षरों का। उदाहरणतया, 6 hertz लिखा जाना चाहिये न कि 6 Hertz।

(vi) बड़ी संख्याओं को पढ़ने की सुविधा के लिये दायें से बायें 3 के समूह में व्यवस्थित किया जाना चाहिये किन्तु कोई अल्पविराम प्रयोग नहीं किया जाना चाहिये, उदाहरणतया, 1 532; 1 568 320

अल्बर्ट अब्राहम माइकेलसन
(1852–1931)

जर्मन अमरीकी भौतिक शास्त्री, आविष्कारक एवं प्रयोगकर्त्ता जिन्होंने माइकेलसन व्यतिकरणमापी का निर्माण किया और मोर्ले के साथ मिलकर, ईथर के सापेक्ष पृथ्वी की गति पता लगाने का प्रयास किया जिसमें ये असफल रहे। तथापि, असफल प्रयोग ने वैज्ञानिक जगत को पुराने सिद्धांतों पर पुनर्विचार करने को प्रेरित किया जिसके फलस्वरूप नवीन भौतिकी का आविर्भाव हुआ।



बाह्य दर्पणों के प्रयोग द्वारा उन्होंने दूरबीनों की विभेदन क्षमता बढ़ाने की एक तकनीक विकसित की। अपने नक्षत्रीय व्यतिकरणमापी और हुक्स के 100" दूरबीन की सहायता से उन्होंने तारों के बारे में कुछ परिशुद्ध माप लिये।

अब आपकी प्रगति को परखने का समय आ गया है। निम्न प्रश्नों को हल करें यदि आपकी कोई समस्या हो तो पाठ के अंत में दिये गये उत्तरों को देखें।

पाठगत प्रश्न 1.1

1. भौतिकी के नियमों की प्रकृति की विवेचना कीजिए।
2. भौतिकी के नियमों के अनुप्रयोग हमारे जीवन स्तर की गुणवत्ता में सुधार हेतु किस प्रकार सहायक हैं?
3. मापन में सार्थक अंकों से क्या अभिप्राय: है?
4. संबद्ध नियमों को उद्धत करते हुए निम्नलिखित राशियों में सार्थक अंकों की संख्या बताइए।
   (i) 426.69 (ii) 4200304.002 (iii) 0.3040 (iv) 4050 m (v) 5000
5. किसी दिए गए पिंड की लम्बाई 3.486 m है। यदि इस लम्बाई को सेंटीमीटर में 348.6 cm व्यक्त किया जाता है तो क्या इन दोनों दशाओं में मापी गई लम्बाई में सार्थक अंकों की संख्या में कोई परिवर्तन होगा?
6. विमाओं के सिद्धान्तों के कोई चार अनुप्रयोग लिखिए। ये किस सिद्धान्त पर आधारित है।
7. सूर्य का द्रव्यमान 2×10^{30} kg है। प्रोटॉन का द्रव्यमान 2×10^{-27} kg है। यदि सूर्य को केवल प्रोटॉनों द्वारा बना मान लें तो सूर्य में प्रोटॉनों की संख्या का परिकलन कीजिए।
8. पहले प्रकाश की तरंगदैर्घ्य को ऐंग्स्ट्रम में व्यक्त किया जाता था, एक ऐंग्स्ट्रम 10^{-8} cm के बराबर होता है। अब प्रकाश की तरंगदैर्घ्य को नैनोमीटर में व्यक्त किया जाता है। एक नैनोमीटर में कितने ऐंग्स्ट्रम होते हैं।
9. एक रेडियो स्टेशन 1370 kHz कंपन आवृत्ति संप्रेषित कर रहा है। इस कंपन आवृत्ति को GHz में व्यक्त कीजिए।
10. एक डेकामीटर में कितने डेसीमीटर होते हैं? एक GW में कितने MW होते हैं?

1.3 भौतिक राशियों की विमाएं

इस पाठ्यक्रम में आप जिन भौतिक राशियों के बारें में पढ़ेंगे उनमें से अधिकतर पाँच मूल विमाओं के रूप में व्यक्त की जा सकती है। द्रव्यमान को (M), लंबाई को (L), समय को (T), विद्युत धारा को (A) व ताप को (θ) द्वारा व्यक्त किया जाता है क्योंकि यांत्रिकी में सभी राशियों को द्रव्यमान, लंबाई एवं समय के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है, अत: हमारे वर्तमान प्रयोजन के लिये केवल इन्हीं तीन विमाओं को व्यवहार में लाना पर्याप्त होगा। निम्न उदाहरणों से यह बात स्पष्ट हो जायेगी कि किस प्रकार भौतिक राशियों की विमाओं को M, L एवं T की घातों के संयोग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

(i) आयतन के लिये लंबाई के तीन मापों की आवश्यकता होती है। अत: इसको लंबाई में तीन विमाओं (L^3) के रूप में अभिव्यक्त किया जाता है।

(ii) द्रव्यमान को आयतन से विभाजित करने पर घनत्व प्राप्त होता है। इसका विमीय सूत्र ML^{-3} है।

(iii) चाल, इकाई समय में चली गयी दूरी अथवा लंबाई/समय है, इसका विमीय सूत्र LT^{-1} है।

(iv) त्वरण इकाई समय में वेग परिवर्तन है अर्थात् लंबाई प्रति इकाई समय प्रति इकाई समय, इसका विमीय सूत्र LT^{-2} है।

(v) द्रव्यमान एवं त्वरण का गुणनफल बल कहलाता है। इसका विमीय सूत्र MLT^{-2} है।

इसी प्रकार हम अन्य भौतिक राशियों की विमायें लिख सकते हैं।

स्मरण रहे कि भौतिक मात्राओं से संबंधित अंक विमीय महत्व के नहीं हैं। इस प्रकार यदि x की विमा L है तो $3x$ की विमा भी L ही होगी।

द्रव्यमान एवं वेग के गुणनफल संवेग तथा बल एवं विस्थापन के गुणनफल कार्य की विमाएं लिखिए।

स्मरण रहे विमाएं एवं मात्रक एक-दूसरे के पर्यायवाची नहीं हैं। उदाहरण के लिए चाल को मीटर/सेकंड (ms^{-1}) या किलोमीटर प्रति घंटा के रूप में मापा जा सकता है लेकिन इसकी विमाएं सदैव लंबाई की विमा को समय की विमा से विभाजित करके या LT^{-1} द्वारा दर्शायी जायेंगी।

विमीय विश्लेषण किसी राशि या राशियों के संयोजन की विमाओं की जाँच की एक प्रक्रिया है। विमीय विश्लेषण का एक महत्वपूर्ण सिद्धांत यह है कि किसी समीकरण के दोनों ओर प्रत्येक राशि की विमा समान होनी चाहिये। अत: यदि $x = p + q$, तो p और q की वही विमायें होंगी जो कि x की। इससे हमें समीकरणों की सत्यता और किसी समीकरण में प्रयुक्त राशियों की विमाऐं पता चल जाती हैं। निम्न उदाहरण विमीय विश्लेषण की उपयोगिता को दर्शाते हैं।

1.3.1 विमाओं (अथवा विमीय समीकरणों) के अनुप्रयोग

विमाओं (या विमीय समीकरणों) के निम्नलिखित चार अनुप्रयोग हैं।

(i) विभिन्न भौतिक राशियों में संबंध स्थापित करना (या सूत्र की व्युत्पत्ति)।

(ii) दिए गए सूत्र (अथवा विभिन्न भौतिक राशियों के बीच संबंध) की संगतता की जाँच।

(iii) एक मात्रक प्रणाली से दूसरी मात्रक प्रणाली में बदलना, तथा

(iv) किसी भौतिक राशि के मात्रकों की व्युत्पत्ति।

उपर्युक्त अनुप्रयोग इस सिद्धान्त पर आधारित हैं कि किसी भौतिक दृष्टि से सही संबंध /समीकरण/सूत्र के दोनों ओर के प्रत्येक पद की विमाएं समान होंगी। यह विमाओं की समांगता का सिद्धान्त कहलाता है।

टिप्पणियाँ

उदाहरण 1.2 : आपको पहले से ही यह ज्ञान है कि m द्रव्यमान के कण की गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}mv^2$ एवं स्थितिज ऊर्जा mgh है जहाँ v कण का वेग, h धरातल से ऊँचाई और g गुरुत्वीय त्वरण है। ये दोनों अभिव्यक्तियाँ एक ही भौतिक राशि, ऊर्जा को दर्शाती है अत: इनकी विमाएं भी एक समान होनी चाहिये। इसे दोनों अभिव्यक्तियों की विमाऐं लिखकर सिद्ध करें।

हल : $\frac{1}{2}mv^2$ की विमाऐ $M.(LT^{-1})^2$ या ML^2T^{-2} हैं (स्मरण रहे अंकों की कोई विमा नहीं होती)। mgh की विमायें $M.LT^{-2}.L$ या ML^2T^{-2} हैं। स्पष्टतया दोनों अभिव्यक्तियाँ समान हैं और समान भौतिक राशि को निरूपित करती हैं।

अब हम एक दूसरे उदाहरण द्वारा एक भौतिक राशि को अन्य भौतिक राशियों के रूप में अभिव्यक्त करेंगे।

उदाहरण 1.3 : हमारा अनुभव बताता है कि विरामावस्था से प्रारंभ करके एकसमान त्वरण से गतिशील कार द्वारा तय की गई दूरी x, समय t तथा त्वरण a पर निर्भर करती है। विमीय विश्लेषण का उपयोग करके तय की गई दूरी का व्यंजक ज्ञात कीजिए।

हल : माना राशि x t, की घात m (t^m) एवं a की घात n (a^n) के समानुपाती है। इसे हम, $x \propto t^m.\, a^n$ लिख सकते हैं जहाँ α समानुपात का प्रतीक है।

दोनों ओर विमाओं के रूप में अभिव्यक्त करने पर हम पाते हैं कि

$$L^1 \propto T^m\,(LT^{-2})^n,$$

या

$$L^1 \propto T^{m-2n}\,L^n.$$

दोनों ओर की L व T के घातों की तुलना करने पर हम पाते हैं कि $n = 1$ व $m = 2$, अत:

$$x \propto t^2 a^1, \text{ या } x \propto at^2.$$

हम विमीय विश्लेषण द्वारा केवल यहीं तक पहुँच सकते हैं। इससे हमें आंकिक गुणक प्राप्त नहीं होते क्योंकि अंकों की कोई विमायें नहीं होतीं। आंकिक गुणक हमें सिद्धांत या परीक्षण से प्राप्त होते हैं। इस उदाहरण में हमें ज्ञात है कि पूर्ण संबंध $x = (1/2)at^2$ द्वारा निरूपित होता है।

आंकिक गुणकों के अलावा दूसरी राशियों जैसे कोण व त्रिकोणमितीय फलनों के कोणांक (ज्या, कोज्या आदि) एवं लघुगणिकीय फलन विमाहीन होते हैं। $\sin x$ में x, sine (ज्या) फलन का कोणांक (स्वतंत्र चर) कहलाता है। e^x में x चरघातांकी फलन का कोणांक (स्वतंत्र चर) कहलाता है।

अब हम एक छोटा सा विराम लेते हैं और निम्न प्रश्नों की सहायता से आपकी प्रगति की जाँच करते हैं।

पाठगत प्रश्न 1.2

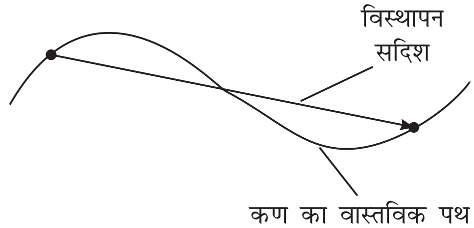
1. सरल लोलक द्वारा किये गये प्रयोग दर्शाते हैं कि इसका आवर्तकाल (T) इसकी लंबाई (l) व गुरुत्वीय त्वरण (g) पर निर्भर करता है। विमीय विश्लेषण की सहायता से T का l एवं g से संबंध स्थापित कीजिए।
2. कल्पना कीजिये कि एक कण r त्रिज्या के वृत्ताकार पथ में υ वेग व a त्वरण से गतिशील है। विमीय विश्लेषण द्वारा दर्शाइये कि $a \propto \upsilon^2/r$ ।
3. आपको एक समीकरण $m\upsilon = Ft$ दिया गया है, m द्रव्यमान, υ वेग, F बल एवं t समय है इस समीकरण की विमीय सत्यता की जाँच कीजिए।

1.4 सदिश एवं अदिश

1.4.1 सदिश एवं अदिश राशियाँ

भौतिक विज्ञान में हम भौतिक राशियों को दो समूहों में वर्गीकृत करते हैं। एक दशा में हम केवल उनका परिमाण व्यक्त करके उनकी पूर्ण जानकारी दे देते हैं। उदाहरणतया, यदि हम कहें कि किसी गेंद का द्रव्यमान 50 g है तो यह द्रव्यमान के विषय में पूर्ण जानकारी है। इसी प्रकार यह कथन कि पानी का घनत्व 1000 kg m^{-3} है, स्वयं में पूर्ण है। **इस प्रकार की राशियों को अदिश राशियाँ कहते हैं।**

दूसरी ओर कुछ राशियों की पूर्ण जानकारी के लिये परिमाण एवं दिशा दोनों की आवश्यकता होती है। इसका एक सरल उदाहरण वेग हैं केवल यह कथन कि रेलगाड़ी का वेग 100 km h^{-1} है पर्याप्त नहीं है। हमें रेलगाड़ी की गति की दिशा भी दर्शानी पड़ेगी। दूसरा उदाहरण बल है। हमें परिमाण के साथ बल की दिशा भी दर्शानी आवश्यक है। इस प्रकार की राशियाँ सदिश कहलाती हैं। **एक सदिश राशि में परिमाण एवं दिशा दोनों निहित हैं।**



चित्र 1.3: विस्थापन सदिश

विस्थापन, त्वरण, संवेग, कोणीय संवेग एवं आघूर्ण आदि सदिश राशियाँ हैं जिनका प्रयोग यांत्रिकी में किया जाता है।

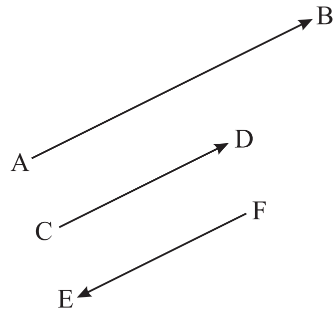
ऊर्जा क्या है? अदिश या सदिश?

सोचें क्या ऊर्जा से दिशा संबंधित है यदि नहीं तो यह एक अदिश राशि है।

1.4.2 सदिश निरूपण

एक सदिश को एक तीरांकित रेखा द्वारा निरूपित किया जाता है। चित्र 1.4 में सदिश AB को उदाहरणस्वरूप लें। इसमें रेखा की लंबाई किसी पैमाने में इसके परिमाण को बतलाती है और

टिप्पणियाँ



चित्र 1.4 : सदिशों की दिशायें और परिमाण

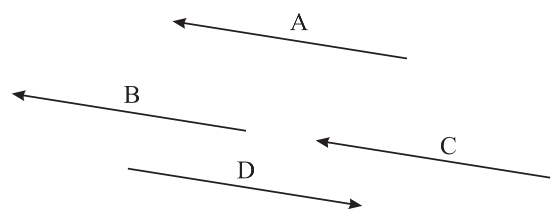
तीर इसकी दिशा को बतलाता है। सदिश CD की दिशा भी सदिश AB के समान है किंतु परिमाण भिन्न है। सदिश EF का परिमाण, सदिश CD के बराबर है लेकिन इसकी दिशा भिन्न है। किसी भी सदिश में आरंभिक बिंदु (**AB** में बिंदु A) **सदिश पुच्छ** एवं अंतिम बिंदु (**AB** में B) **सदिश शीर्ष** कहलाता है।

एक सदिश को इसको निरूपित करने वाले शब्द के ऊपर तीरांकन द्वारा दर्शाया जाता है, उदाहरणतया, $\vec{A}$ सदिश $\vec{A}$ का परिमाण A अथवा $|\vec{A}|$ है। मुद्रण में सदिश राशि को मोटे अक्षर जैसे **A** द्वारा दर्शाया जाता है।

यदि दो सदिशों की दिशा एवं परिमाण एक हों तो वे **समतुल्य** कहलाते हैं। इसका आशय यह हुआ कि सभी सदिश जो एक दूसरे के समानांतर हो, समान परिमाण वाले हों और एक ही दिशा में हों वे सभी समतुल्य माने जायेंगे। चित्र 1.5 में दर्शाये गये सदिश **A, B** और **C** समान हैं, अत: **A = B = C** लेकिन **D A** के समतुल्य नहीं है।

यहाँ सदिश **D** का परिमाण A के बराबर है लेकिन इसकी दिशा विपरीत है, इसे **A** का ऋणात्मक सदिश माना जा सकता है। अत: **D = –A** या **A = –D**

एक भौतिक सदिश राशि का परिमाण दर्शाने के लिये सदैव एक आनुपातिक पैमाने का चयन किया जाता है। उदाहरणतया दिल्ली एवं आगरा के बीच के 200 km के सदिश विस्थापन को 100 km = 1 cm के पैमाने से दर्शाया जा सकता है। इसी प्रकार 20 N के बल को 10N = 1cm के पैमाने में 2cm से सदिश द्वारा दर्शाया जा सकता है।



चित्र 1.5 : तीन सदिश समान हैं लेकिन चौथा सदिश D समान नहीं है।

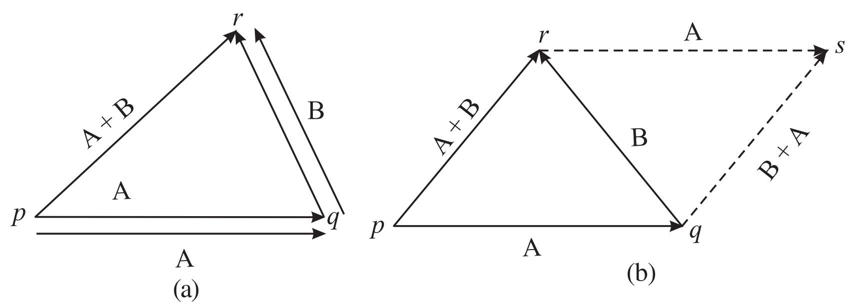
उपरोक्त उदाहरणों से यह स्पष्ट होता है कि यदि हम किसी सदिश को उसके समानांतर विस्थापित करें तो यह अपरिवर्तित रहता है। इस महत्वपूर्ण परिणाम को सदिशों के योग में उपयोग किया जाता है। देखें यह कैसे होता है?

1.4.3 सदिशों का योग

याद रखें कि केवल **समान प्रकार के सदिशों का योग** किया जा सकता है। उदाहरणतया दो बलों अथवा दो वेगों को जोड़ा जा सकता है। लेकिन एक बल तथा एक वेग को नहीं जोड़ा जा सकता।

यदि आप सदिश **A** और सदिश **B** का योग करना चाहते हैं तो सर्वप्रथम सदिश **A** को पुन: दर्शायें (चित्र 1.6 (a)) इसके लिये एक रेखा (यथा *pq*) **A** के समानांतर खींचे। फिर सदिश **B** को

इस प्रकार बनायें कि इसका पुच्छ भाग सदिश **A** के शीर्ष से जुड़ जाये। इसके लिये सदिश **B** के समानांतर रेखा *qr* सदिश **A** के शीर्ष से खींचे। अब सदिश **A** के पुच्छ बिंदु एवं सदिश **B** के शीर्ष बिंदु *q* को मिलाने पर दोनों सदिशों का योग प्राप्त हो जायेगा और इनका परिणामी सदिश परिमाण एवं दिशा में रेखा *pr* द्वारा दर्शाया जायेगा। अब आप आसानी से सिद्ध कर सकते हैं कि सदिश योग क्रमविनिमेय है अर्थात् $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ जैसा कि चित्र 1.6 (b) में दर्शाया गया है। चित्र 1.6 (b) में हम देखते हैं कि *pqr* एक त्रिकोण है एवं इसकी भुजायें *pq* एवं *qr* क्रमश: सदिश **A** एवं सदिश **B** के परिमाण एवं दिशा को दर्शाती हैं, एवं त्रिकोण की तीसरी भुजा *pr* परिणामी सदिश *pr* को दर्शाती है जिसकी दिशा *p* से *r* की ओर है। इससे हमें दो सदिशों का परिणामी सदिश का नियम प्राप्त होता है।



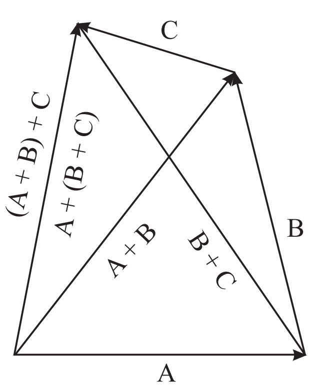
चित्र 1.6 : सदिशों A व B का योग

यदि दो सदिशों को परिमाण एवं दिशा में किसी त्रिभुज की दो क्रमागत भुजाओं द्वारा दर्शाया जाये तो इनके परिणामी सदिश को त्रिभुज की तीसरी भुजा को विपरीत क्रम में लेकर दर्शाया जाता है। इसे 'सदिशों का त्रिभुजीय नियम' कहा जाता है।

दो या अधिक सदिशों का योग **परिणामी** सदिश कहलाता है। चित्र 1.6(b) में **pr A** एवं **B** का परिणामी सदिश है। त्रिभुज की तीनों भुजाओं के अनुदिश एक क्रम में लगे तीन बलों का परिणामी बल क्या होगा? यदि आप सोचते हैं कि परिणामी बल शून्य होगा तो आप सही सोचते हैं।

अब हम दो से अधिक सदिशों का योग ज्ञात करना सीखते हैं।

दो से अधिक सदिशों **A**, **B** और **C** का परिणामी भी दो सदिशों **A** और **B** के परिणामी की भांति प्राप्त किया जा सकता है। पहले हम **A** और **B** का परिणामी (**A + B**) प्राप्त करते हैं फिर इसका योग **C** के साथ किया जा सकता है। वैकल्पिक रूप से आप **B** और **C** का योग प्राप्त कर सकते हैं (चित्र 1.7)। दोनों स्थितियों में परिणामी सदिश समान रहता है। अत: सदिश योग साहचर्यी है, अर्थात् $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$



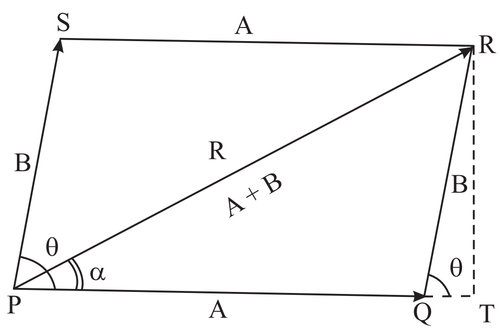
चित्र 1.7 : दो भिन्न क्रमों में तीन सदिशों का योग

इसी प्रकार यदि आप तीन से अधिक सदिशों का योग प्राप्त करना चाहें तो **परिणामी सदिश प्रथम सदिश के पुच्छ को अंतिम सदिश के शीर्ष से मिलाने पर प्राप्त होगा।**

कई बार अनेक सदिश एक ही बिंदु पर कार्य करते हैं। ऐसी स्थिति में सदिश योग के समान्तर चतुर्भुज नियम का उपयोग अधिक सुविधाजनक होता है। आइए इसके संबंध में अध्ययन करें।

1.4.4 सदिश योग का समांतर चतुर्भुज नियम

मान लीजिए कि चित्र 1.8 में दर्शाये अनुसार **A** और **B** दो सदिश हैं और उनके बीच का कोण θ है। इनका योग प्राप्त करने के लिये हम समातंर चतुर्भुज को पूर्ण करते हैं (यहाँ भुजा PQ सदिश **A** और भुजा PS सदिश **B** को दर्शाती है और कर्ण PR दोनों के परिणामी **R** को दर्शाता है। क्या आपको याद है कि कर्ण PR, **A** और **B** का योग है? यह **A** और **B** सदिशों का परिणामी सदिश है, परिणामी सदिश **A** की दिशा से α कोण बनाता है, याद रखें कि सदिश **PQ** और **SR** समान हैं और **A** के तुल्य है। इसी प्रकार सदिश **PS** और सदिश **QR** समान हैं और **B** के तुल्य हैं परिणामी सदिश **R** का परिमाण प्राप्त करने के लिये एक लम्ब RT गिरायें जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है। तब परिमाणों के संदर्भ में



चित्र 1.8: सदिश योग का समांतर चतुर्भुज नियम

$$(PR)^2 = (PT)^2 + (RT)^2$$

$$\begin{aligned}
(PR)^2 &= (PT)^2 + (RT)^2 \\
&= (PQ + QT)^2 + (RT)^2 \\
&= (PQ)^2 + (QT)^2 + 2PQ.QT + (RT)^2 \\
&= (PQ)^2 + [(QT)^2 + (RT)^2] + 2PQ.QT \qquad (1.1) \\
&= (PQ)^2 + (QR)^2 + 2PQ.QT \\
&= (PQ)^2 + (QR)^2 + 2PQ.QR\,(QT / QR) \\
R^2 &= A^2 + B^2 + 2AB.\cos\theta
\end{aligned}$$

अत: **R** का परिमाण

$$|R| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB.\cos\theta} \qquad (1.2)$$

सदिश **R** की दिशा प्राप्त करने के लिये हम देखते हैं कि

$$\tan\alpha = \frac{RT}{PT} = \frac{RT}{PQ+QT} = \frac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta} \qquad (1.3)$$

अत: परिणामी सदिश की दिशा इसके द्वारा आधार के सदिश से बनाये गये कोण द्वारा प्रदर्शित की जा सकती है।

विशिष्ट प्रकरण

आइए अब विचार करें कि दो समांतर सदिशों का परिणामी सदिश क्या होगा?

ध्यान दें कि दोनों सदिशों के बीच का कोण शून्य है और इनके परिणामी सदिश का परिमाण दोनों के परिमाण के योग के बराबर एवं दिशा समान रहेगी।

यदि दो सदिश एक दूसरे के लंबवत् हों तो उनके परिणामी सदिश का परिमाण क्या होगा? इस स्थिति में $\theta = 90^o$ और $\cos\theta = 0$

यदि इन दोनों के परिमाण समान हों तो परिणामी सदिश की दिशा क्या होगी?

ध्यान दें $\tan\alpha = B/A = 1$ तब α क्या है?

यह भी ध्यान दीजिए कि यदि $\theta = \pi$ है तब दो सदिश विपरीत दिशा में समांतर होते हैं। इस स्थिति में $\alpha = 0$। ऐसी स्थिति में परिणामी सदिश **A** या **B** की दिशा में होगा और दिशा इस बात पर निर्भर करती है कि किस सदिश का परिमाण अधिक है।

उदाहरण 1.4 अहमद एक गाड़ी को 70 N के बल से उत्तर दिशा में खींच रहा है और हामिद उसी गाड़ी को 50 N के बल से दक्षिण पश्चिम दिशा में खींच रहा है। परिणामी बल का परिमाण एवं दिशा का परिकलन कीजिए।

हल :

यहाँ पहले बल A का परिमाण = 70 N

दूसरे बल का B का परिमाण = 50 N

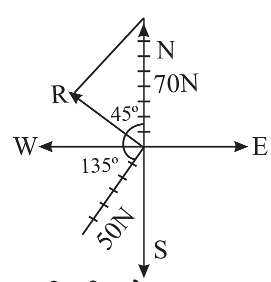
दोनों बलों के बीच का कोण $\theta = 135^o$ (135 डिग्री)

अत: परिणामी बल का परिमाण

$$R = \sqrt{(70)^2 + (50)^2 + 2\times 70\times 50\times \cos(135)}$$

$$= \sqrt{4900 + 2500 - 7000\times \sin 45}$$

$$= 49.5 \text{ N}$$



चित्र 1.9: किसी कोण पर आनत बलों का परिणामी बल

टिप्पणियाँ

R का परिमाण = 49.5 N

परिणामी बल की दिशा समीकरण 1.3 द्वारा ज्ञात की जायेगी,

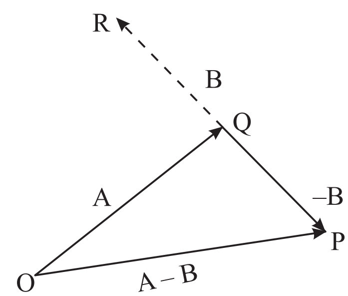
$$\tan\alpha = \frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta} = \frac{50\times\sin(135)}{70 + 50\cos(135)} = \frac{50\times\cos 45}{70 - 50\sin 45} = 1.0$$

अत: $\alpha = 45.0^\circ$ इस प्रकार परिणामी **R** उत्तर की ओर लगने वाले 70N बल से 45° का कोण बनाता है। इस प्रकार **R** की दिशा उत्तर पश्चिम है (चित्र 1.9)।

1.4.5 सदिशों का घटाना

हम एक सदिश को दूसरे सदिश से किस प्रकार घटाते हैं? ध्यान दें कि दो सदिशों का अंतर **A – B** वास्तव में **A + (–B)** के बराबर है। तब आप दो सदिशों को जोड़ने की पूर्व वर्णित विधि अपना सकते हैं। इसकी व्याख्या चित्र 1.10 में की गयी है। **A** के शीर्ष से **–B** सदिश खींचे। **A** के पुच्छ और **–B** के शीर्ष को मिलाने पर परिणामी सदिश **(A – B)** प्राप्त हो जायेगा।

अब आपकी प्रगति जानने का समय है।



चित्र 1.10 : सदिश B को सदिश A से घटाना

पाठगत प्रश्न 1.3

दो सदिश $\xrightarrow[A]{}$ और $\nearrow B$ दिये गये हैं।

1. इनके द्वारा चित्र बनाकर दर्शायें कि किस प्रकार निम्न सदिश प्राप्त किये जा सकते हैं:

   (a) **B – A**, (b) **A + 2B**, (c) **A – 2B** और (d) **B – 2A**.

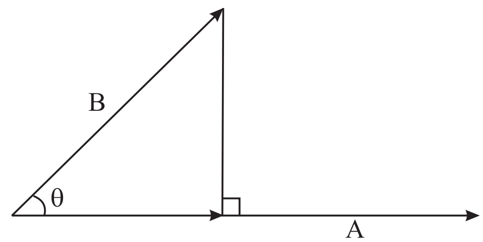
2. दो सदिशों **A** व **B** के परिमाण 10 इकाई एवं 12 इकाई है और ये एक दूसरे की विपरीत दिशा में समांतर हैं। परिणामी सदिश **A + B** तथा **A – B** प्राप्त करें।

3. दो सदिशों **A** और **B** के परिमाण क्रमश: 30 व 60 इकाई हैं और इनके बीच का दिशा अंतर 60° है। परिणामी सदिश प्राप्त करें (स्मरण रहे कि एक सदिश प्राप्त करने का तात्पर्य इसका परिमाण एवं दिशा दोनों ज्ञात करना है।

1.5 सदिशों का गुणन

1.5.1 एक सदिश का एक अदिश द्वारा गुणन

यदि हम एक सदिश **A** को एक अदिश k से गुणा करें तो हमें **A** के k गुना परिमाण का सदिश प्राप्त होगा। इसका अर्थ यह है कि परिणामी सदिश k**A** है। यदि k धनात्मक हो तो नये सदिश की दिशा अपरिवर्तित रहती है और यदि k ऋणात्मक हो तो नये सदिश की दिशा मूल सदिश की दिशा के विपरीत हो जाती है। उदाहरणार्थ, सदिश 3**A** का परिमाण **A** के परिमाण से तीन गुना है और दिशा समान है। लेकिन –3**A** सदिश की दिशा सदिश **A** के विपरीत है, यद्यपि इसका परिमाण सदिश **A** के परिमाण का तीन गुना है।



चित्र 1.11: B का A में प्रक्षेप

1.5.2 सदिशों का अदिश गुणन

दो सदिशों **A** और **B** के गुणन को **A.B** लिखा जाता है और इसका मान AB cosθ होता है जहाँ θ दोनों सदिशों के बीच का कोण है। चित्र 1.11 को ध्यान से देखने पर आप पायेंगे कि B cosθ सदिश **B** का सदिश **A** पर प्रक्षेप है। अत: **A** और **B** का अदिश गुणन **A** के परिमाण एवं **B** के **A** की दिशा में प्रक्षेप के बराबर होता है। दूसरी ध्यान देने योग्य बात यह है कि यदि हम दो सदिशों के बीच के कोण θ को (360 – θ) से निरूपित करें तो इसका कोई प्रभाव नहीं पड़ता क्योंकि दोनों के कोज्या अर्थात् cosθ और cos (360 – θ) का मान समान है। चूँकि दो सदिशों के बीच एक बिंदु अदिश गुणन को दर्शाता है अत: इसे बिंदु गुणन भी कहते हैं। याद रखें कि दो सदिशों का बिंदु गुणनफल एक अदिश राशि होती है।

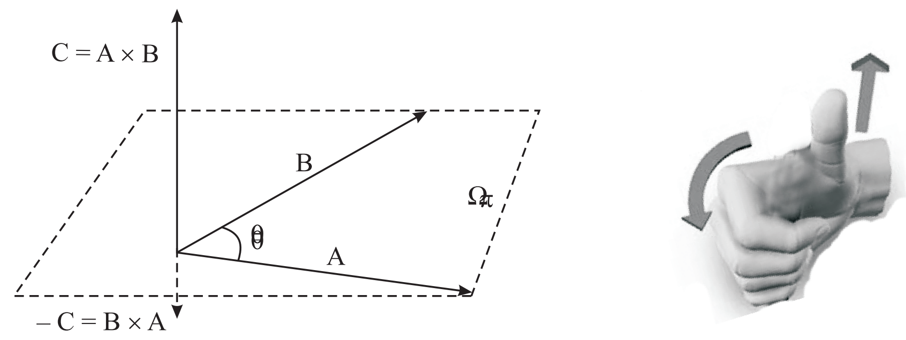
अदिश गुणन का एक सुपरिचित उदाहरण किसी गतिशील निकाय से एक कोण बनाते हुए लगने वाले बल द्वारा किया गया कार्य है। यदि निकाय का विस्थापन **d** और **F** के बीच का कोण θ हो तो बल द्वारा किया गया कार्य $Fd\cos\theta$ होता है।

बिंदु गुणन अदिश होने के कारण क्रमविनिमेयी है, अर्थात् **A.B** = **B.A** = ABcosθ यह वितरणीय भी है अर्थात् **A.(B + C) = A.B + A.C** (गुणन का वितरण नियम)

1.5.3 सदिशों का सदिश गुणन

मान लीजिए हमारे पास दो सदिश **A** और **B** हैं जिनके बीच का कोण θ है। हम एक ऐसा तल बना सकते हैं जिनमें ये दोनों सदिश स्थित हों। इस तल को हम Ω से संसूचित करते हैं और यह कागज के तल में है। अब इन सदिशों का गुणनफल **A** ×**B** एक सदिश **C** होगा (चित्र 1.12 a) जिसका परिमाण **AB** sinθ है और इसकी दिशा Ω तल के लंबवत् है। सदिश **C** की दिशा दाहिने हाथ के नियम द्वारा ज्ञात की जा सकती है (चित्र 1.12 b)। कल्पना कीजिए कि आपकी अंगुलियाँ **A** से **B** की दिशा में इन सदिशों के बीच के न्यून कोण के अनुदिश मुड़ी

है। तब अंगूठा परिणामी सदिश **C** की दिशा को दर्शाता है। यदि आप इस नियम का पालन करें तो आप आसानी से पायेंगे कि सदिश **B × A** की दिशा सदिश **A × B** की दिशा के विपरीत है। इसका अर्थ हुआ कि **सदिश गुणन क्रमविनिमेयी नहीं है**। चूँकि सदिश गुणन में दो सदिशों के बीच क्रॉस का चिन्ह प्रयोग किया जाता है अत: इसे क्रॉस गुणन भी कहते हैं।



(a) **(b)**

चित्र 1.12 (a) : सदिशों का सदिश गुणन (b) गुणन के फलस्वरूप प्राप्त सदिश C की दिशा C = A × B दाहिने हाथ के नियम द्वारा निर्धारित होती है यदि आपकी अंगुलियाँ न्यूनकोण बनाते हुए दो सदिशों के बीच A से B की दिशा में मुड़ी हों तो अंगूठा C की दिशा को प्रदर्शित करता है।

सदिश गुणन का एक सुपरिचित उदाहरण घूर्णन करते हुए निकाय का कोणीय संवेग है।

अपनी प्रगति का आंकलन करने के लिए निम्न प्रश्नों को हल करने का प्रयास करें।

पाठगत प्रश्न 1.4

1. माना एक सदिश **A,** सदिश **B** के समांतर है। उनका सदिश गुणनफल क्या होगा? यदि **B, A** के विपरीत दिशा में हो तो इनका सदिश गुणनफल क्या होगा?

2. माना हमारे पास एक सदिश **A** और एक सदिश $\mathbf{C} = \frac{1}{2}\mathbf{B}$ है। **A × B** की दिशा और **A × C** की दिशा के बीच क्या संबंध है?

3. यदि आप सदिश **A** और **B** को उनके तल में घुमायें तो **C = A × B** की दिशा किस प्रकार प्रभावित होगी?

4. यदि आप सदिश **A** और **B** को इस प्रकार घुमायें कि वे अपने तल पर ही बनें रहें तो क्या आप सदिश **C = A × B** की दिशा विपरीत कर सकेंगे?

5. यदि सदिश **A** *x*-अक्ष और सदिश **B** *y*-अक्ष के अनुदिश हों तो सदिश **C = A × B** की दिशा क्या होगी? यदि **A** *y*-अक्ष और **B** *x*-अक्ष के विपरीत हों तो इससे **C** किस प्रकार प्रभावित होगा?

6. यदि सदिश **A** और सदिश **B** परस्पर लंबवत् हों तो (a) **A . B** और (b) **A × B** का मान परिकलित कीजिए।

1.6 सदिशों का वियोजन

सदिशों का वियोजन सदिशों के संयोजन के विपरीत प्रक्रिया है। वियोजन में हम नियत निर्देशांक अक्षों की दिशा में सदिशों के घटकों का मान ज्ञात करते हैं। माना हमारे पास एक सदिश **A** है जैसा कि चित्र 1.13 में दिखाया गया है और हम x-अक्ष व y-अक्ष की दिशा में इसके घटकों को ज्ञात करना चाहते हैं। माना ये घटक क्रमशः A_x और A_y हैं। सरल त्रिकोणमिति दर्शाती है कि

$$A_x = A\cos\theta \tag{1.4}$$

एवं

$$A_y = A\sin\theta, \tag{1.5}$$

यहाँ **A** और x-अक्ष के बीच का कोण θ है। यदि X-अक्ष और **A** के बीच कोण ϕ हो तो X और Y अक्ष की दिशा में सदिश **A** के घटकों का क्या मान होगा? (चित्र 1.13)।

$$A_X = A\cos\phi$$

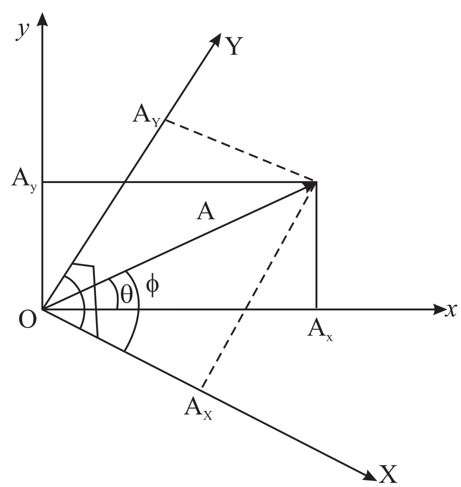
$$A_Y = A\sin\phi.$$

यहाँ एक बात स्पष्ट समझ लें कि सदिश के घटकों का मान नियत नहीं है वरन एक विशेष अक्षों के चयन के अनुसार परिवर्तनशील हैं। यह भी ध्यान दें कि सदिश **A** का परिमाण एवं दिशा इसके घटकों के संदर्भ में निम्न रूप से दर्शायी जा सकती है।

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{A_X^2 + A_Y^2} \tag{1.6}$$

और

$$\tan\theta = A_y / A_x, \qquad \tan\phi = A_Y / A_X. \tag{1.7}$$



चित्र 1.13 : सदिश A के दो निर्धारित निर्देशांक समुच्चयों (x, y) और (X, Y) के अनुदिश वियोजन

अतः यदि हमें एक सदिश के घटक मालूम हों तो इन समीकरणों की सहायता से हम सदिश **A** प्राप्त कर सकते हैं।

टिप्पणियाँ

1.7 इकाई सदिश

अब हम इकाई सदिश की संकल्पना का समावेश करते हैं। जैसा कि नाम से स्पष्ट है इकाई सदिश का इकाई परिमाण होता है और एक निश्चित दिशा होती है। इसका कोई मात्रक या विमा नहीं होती। उदाहरण के तौर पर हम सदिश **A** को A $\hat{\mathbf{n}}$ लिख सकते हैं जहाँ $\hat{\mathbf{n}}$ सदिश **A** की दिशा में एक इकाई सदिश को इंगित करता है। ध्यान दें कि मात्रक सदिश का समावेश एक सदिश की दिशा की जानकारी के लिये किया गया है; **A** का परिमाण A द्वारा इंगित किया जाता है। निर्देशांक अक्षों की दिशा में इकाई सदिश विशेष रूप से महत्वपूर्ण है। x-अक्ष की दिशा में इकाई सदिश को $\hat{\mathbf{i}}$, y-अक्ष की दिशा में $\hat{\mathbf{j}}$ और z-अक्ष की दिशा में $\hat{\mathbf{k}}$ द्वारा दर्शाया जाता है। इस अंकन पद्धति के उपयोग से, सदिश **A** को, जिसके x व y अक्षों की दिशा में घटक क्रमशः A_x और A_y हैं, निम्न प्रकार निरूपित किया जा सकता है।

$$\mathbf{A} = A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\,\hat{\mathbf{j}} \tag{1.8}$$

इसी प्रकार दूसरे सदिश **B** को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$\mathbf{B} = B_x\,\hat{\mathbf{i}} + B_y\,\hat{\mathbf{j}} \tag{1.9}$$

इन दो सदिशों का योग इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = (A_x+B_x)\,\hat{\mathbf{i}} + (A_y+B_y)\,\hat{\mathbf{j}} \tag{1.10}$$

अदिश गुणन के नियमानुसार आप दर्शा सकते हैं कि

$$\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{i}}=1,\ \hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{j}}=1,\ \hat{\mathbf{k}}.\hat{\mathbf{k}}=1,\ \hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{j}}=0,\ \hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{k}}=0,\ \text{और}\ \hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{k}}=0 \tag{1.11}$$

अब दो सदिशों **A** व **B** के बीच का बिंदु गुणनफल (अदिश गुणनफल) निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

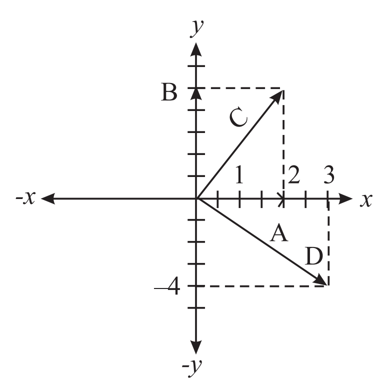
$$\begin{aligned}\mathbf{A}.\mathbf{B} &= (A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\,\hat{\mathbf{j}}).(B_x\,\hat{\mathbf{i}} + B_y\,\hat{\mathbf{j}})\\ &= A_xB_x(\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{i}})+A_xB_y(\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{j}})+A_yB_x(\hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{i}})+A_yB_y(\hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{j}})\\ &= A_xB_x+A_yB_y,\end{aligned} \tag{1.12}$$

यहाँ हमने समीकरण 1.11 के परिणामों का उपयोग किया है।

उदाहरण 1.4 एक निर्देशांक तंत्र में (सभी चार चतुर्थांशों को दर्शाते हुये) निम्न सदिशों को दर्शाइए। उनके परिमाण एवं दिशाएं ज्ञात कीजिए।

$\mathbf{A} = 4\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}}, \mathbf{B} = 0\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}, \mathbf{C} = 4\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}},$
$\mathbf{D} = 6\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}}.$

हल : सदिशों को उनके घटकों के रूप में दिया गया है। $\hat{\mathbf{i}}$ का गुणन x घटक और $\hat{\mathbf{j}}$ का गुणक y घटक है। सभी सदिशों को निर्देशांक ग्रिड में दिखाया गया है (चित्र 1.14)।



चित्र 1.14

सदिश **A** के घटक (अवयव) $\mathbf{A}_x = 4$, $\mathbf{A}_y = 0$, इसका परिमाण $\mathbf{A} = 4$ है और इसकी दिशा $\tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right) = 0$ है अतः दिशा x-अक्षीय है। सदिश **B** के घटक (अवयव) x-अवयव $= 0$ अतः इसकी दिशा y-अक्षीय है और इसका परिमाण 5 है।

अब हम सदिश **C** पर विचार करते हैं, यहाँ $\mathbf{C}_x = 4$ और $\mathbf{C}_y = 5$ अतः **C** का परिमाण C = $\sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}$. है और इसके द्वारा x-अक्ष से बना कोण $\tan^{-1}(\mathbf{C}_y/\mathbf{C}_x) = 51.3$ डिग्री है। इसी प्रकार **D** का परिमाण D = $\sqrt{60}$ और इसकी दिशा $\tan^{-1}(\mathbf{D}_y/\mathbf{D}_x) = \tan^{-1}(0.666) = -33.7^o$ (चौथे चतुर्थांश में है)

उदाहरण 1.5 उदाहरण 1.4 में दिए गए सदिशों के लिए गुणन **C . D** का मान प्राप्त कीजिए।

हल : **C** और **D** का बिंदु गुणन (अदिश गुणन) समीकरण (1.12) की सहायता से प्राप्त किया जा सकता है

$$\mathbf{C}\,.\,\mathbf{D} = C_xD_x + C_yD_y = 4\times6 + 5\times(-4) = 24 - 20 = 4.$$

दो सदिशों के क्रॉस गुणन (सदिश गुणन) को भी इकाई सदिशों के रूप में दर्शाया जा सकता है। इसके लिये हमें पहले इकाई सदिशों के क्रॉस गुणन (सदिश गुणन) की आवश्यकता होती है। इकाई सदिशों के बीच का कोण 90º होता है। उदाहरण के लिए, $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$ को लें, चूँकि इनके बीच के कोण की ज्या (sine) का मान एक होता है इसलिये सदिश गुणन का परिमाण भी 1 होता है। इसकी दिशा $\hat{\mathbf{i}}$ एवं $\hat{\mathbf{j}}$ की स्थिति के तल (xy तल) के अभिलंबवत् z-अक्षीय है। दाहिने हाथ के नियम के अनुसार हम पाते हें कि यह दिशा धनात्मक z-अक्षीय है, z - अक्ष में इकाई सदिश $\hat{\mathbf{k}}$ द्वारा दर्शाया जाता है। अतः

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\,. \tag{1.13}$$

इसी तर्क के आधार पर हम दर्शा सकते हें कि

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}},\ \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}},\ \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}},\ \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}},\ \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}}, \tag{1.14}$$

और

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0. \tag{1.15}$$

उदाहरण 1.6 उदाहरण 1.4 में दिये गये सदिशों **C** एवं **D** के क्रॉस गुणन का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\mathbf{C} \times \mathbf{D} = (4\,\hat{\mathbf{i}} + 5\,\hat{\mathbf{j}}) \times (6\,\hat{\mathbf{i}} - 4\,\hat{\mathbf{j}})$$

$$= 24\,(\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}}) - 16\,(\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}) + 30\,(\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}}) - 20\,(\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}})$$

(समीकरणों 1.13 - 1.15 के परिणामों के उपयोग से)

$$\mathbf{C} \times \mathbf{D} = -16\,\hat{\mathbf{k}} - 30\,\hat{\mathbf{k}} = -46\,\hat{\mathbf{k}}$$

अत: **C** और **D** का क्रास गुणन एक सदिश है जिसका परिमाण 46 इकाई और दिशा ऋणात्मक *z*-अक्षीय है। चूँकि **C** और **D** *xy*-तल में है अत: स्पष्ट है कि इनका क्रॉस गुणक इस तल के लंबवत् होगा अर्थात् *z*-दिशा में होगा।

पुन: यह स्वयं परीक्षण का समय है। निम्न प्रश्नों का हल प्राप्त करें।

पाठगत प्रश्न 1.5

1. एक सदिश **A,** *xy* निर्देशांक तंत्र में *x*-अक्ष से 60° का कोण बनाता है। इसका परिमाण 50 इकाई है, इसके *x* और *y* दिशाओं में घटक प्राप्त करें। यदि दूसरा सदिश जिसका परिमाण समान है और यह *x*-अक्ष से 30° का कोण बनाता है तो इसके घटकों को प्राप्त करें। क्या ये पहले घटकों के समान हैं?
2. दो सदिशों **A** और **B** को क्रमश: $3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}}$ और $-2\hat{\mathbf{i}} + 6\hat{\mathbf{j}}$ द्वारा दर्शाया गया है। निर्देशांक ग्रिड में इन्हें दर्शाएं। इनका परिमाण ज्ञात करें और इनके द्वारा *x*-अक्ष के साथ बने कोण ज्ञात करें (चित्र 1.14)।
3. प्रश्न 2 में दिये सदिशों के बिंदु गुणनफल (अदिश गुणनफल) एवं क्रॉस गुणनफल प्राप्त करें।

आपने ऊपर सीखा कि एक सही समीकरण में प्रत्येक पद की विमायें समान होनी चाहिये। सदिश राशियों की जानकारी के बाद हम इसमें यह जोड़ सकते हैं कि **समीकरण के सही होने की स्थिति में इसमें प्रत्येक पद के अभिलक्षण समान हों या तो वे सभी सदिश हों या सभी अदिश।**

आपने क्या सीखा

- सार्थक अंकों की संख्या किसी माप की यर्थाथता निर्धारित करती है।
- प्रत्येक भौतिक राशि का मापन विशेष मात्रकों द्वारा किया व दर्शाया जाता है। वैज्ञानिक प्रतिवेदन के लिए हम सार्वत्रिक रूप से SI मात्रकों को अपनाते हैं।
- द्रव्यमान, लंबाई और समय के लिये मूल SI मात्रक क्रमश: kg, m और s हैं। मूल मात्रकों के अतिरिक्त व्युत्पन्न मात्रक भी होते हैं।
- प्रत्येक भौतिक राशि की विमायें होती हैं। समीकरणों की शुद्धता जाँचने के लिये विमीय विश्लेषण एक उपयोगी साधन है।
- भौतिकी में हम सामान्यतया दो प्रकार की राशियों का प्रयोग करते हैं–अदिश और सदिश। अदिश का केवल परिमाण होता है और सदिश का परिमाण व दिशा दोनों होते हैं।

- सदिश राशियों को समान्तर चतुर्भुज नियम के अनुसार जोड़ा जाता है।
- दो सदिश राशियों का बिन्दु गुणनफल अदिश होता है।
- दो सदिशों का क्रॉस गुणनफल सदिश होता है और यह इन सदिशों के तल के लंबवत् होता है।
- सदिशों को एक विशेष निर्देशांक अक्षों की दिशा में घटकों के रूप में वियोजित किया जा सकता है।

पाठांत प्रश्न

1. बहुत लंबी दूरी मापन के लिये प्रयुक्त मात्रक प्रकाश वर्ष कहलाता है। यह प्रकाश द्वारा एक वर्ष में तय की गयी दूरी है। प्रकाश वर्ष को मीटर में व्यक्त कीजिए। (प्रकाश की चाल $= 3 \times 10^8$ m s^{-1})

2. उल्काएं चट्टान के छोटे टुकड़े हैं जो कि यदा कदा बहुत उच्च वेग से पृथ्वी के वायुमण्डल में प्रवेश करते हैं। वायुमण्डल के घर्षण से वे अत्यधिक गर्म हो जाते हैं और अल्पकालिक विकिरण उत्सर्जित करते हुए धीरे-धीरे पूर्णतया जल जाते हैं। इसके परिणामस्वरूप एक प्रकाश रेखा दिखाई देती है जिसे 'टूटने वाला तारा' कहते हैं। उल्का की गति 51 kms^{-1} है। इसकी तुलना में 20^{0}C ताप पर वायु में ध्वनि का वेग 340 ms^{-1} है। दोनों गतियों के परिमाणों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

3. प्रारंभिक वेग u व समान त्वरण a से गतिशील कण द्वारा t समय में तय की गयी दूरी को $s = ut + (1/2)at^2$ समीकरण द्वारा दर्शाया जाता है। विमीय विश्लेषण द्वारा समीकरण की शुद्धता की जाँच कीजिए।

4. न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियम के अनुसार r दूरी पर स्थित दो द्रव्यमानों m_1 व m_2 के बीच लगने वाला बल

$$\mathrm{F} = \mathrm{G}\,\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

   है, जहाँ G सार्वत्रिक नियतांक है, G की विमायें ज्ञात कीजिए।

5. हमीदा एक मेज को एक विशेष दिशा में 10 N के बल से धकेल रही है उसकी मित्र लीला इसी मेज को 8 N के बल से हमीदा द्वारा आरोपित बल की दिशा से 60^o का कोण बनाते हुये धकेल रही है। मेज पर आरोपित परिणामी बल का परिमाण एवं दिशा ज्ञात कीजिए।

6. एक भौतिक राशि दो सदिश राशियों का बिंदु गुणनफल (अदिश गुणनफल) है। यह राशि अदिश है या सदिश? दो सदिशों के क्रॉस (सदिश गुणन) द्वारा प्राप्त भौतिक राशि की प्रकृति क्या है?

7. जॉन एक गाड़ी को धरातल के समांतर बल लगाकर खींचना चाहता है। उसका मित्र राम इस बात पर जोर देता है कि धरातल से 30^o का कोण बनाते हुये बल लगाकर गाड़ी को खींचना अधिक आसान है, दोनों में कौन सही है और क्यों?

8. दो राशियाँ $5\,\hat{\mathbf{i}} - 3\,\hat{\mathbf{j}}$ और $3\,\hat{\mathbf{i}} - 5\,\hat{\mathbf{j}}$ से निरूपित की गयी हैं। इनके अदिश एवं सदिश गुणनफल प्राप्त कीजिए।

टिप्पणियाँ

पाठगत प्रश्नों के उत्तर

1.1

4. (i) 5 (ii) 10 (iii) 4 (iv) 4 (v) 1

5. नहीं, दोनों दशाओं में सार्थक अंकों की संख्या 4 रहेगी।

7. सूर्य का द्रव्यमान $= 2 \times 10^{30}$ kg

   प्रोटॉन का द्रव्यमान $= 2 \times 10^{-27}$ kg

   सूर्य में प्रोटॉनों की संख्या $= \dfrac{2\times10^{30}\,\text{kg}}{2\times10^{-27}\,\text{kg}} = 10^{57}$

8. 1 एंगस्ट्रॉम $= 10^{-8}$ cm $= 10^{-10}$ m

   1 नैनोमीटर (nm) $= 10^{-9}$ m

   $\therefore$ 1 nm/1 Å $= 10^{-9}$ m /10^{-10} m $= 10$ अत: 1 nm = 10 Å

9. 1370 kHz $= 1370 \times 10^3$ Hz $= (1370 \times 10^3)/10^9$ GHz $= 1.370 \times 10^{-3}$ GHz

10. 1 डेकामीटर (dam) = 10 m

    1 डेसीमीटर (dm) $= 10^{-1}$ m

    $\therefore$ 1 dam = 100 dm

    1 MW $= 10^6$ W

    1 GW $= 10^9$ W

    $\therefore$ 1 GW $= 10^3$ MW

1.2

1. लंबाई की विमा = L

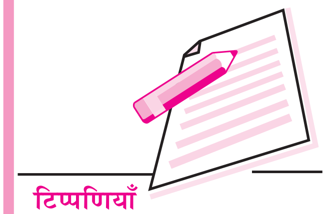
   समय की विमा = T

   g की विमा $= LT^{-2}$

   माना आवर्तकाल t, l^{α} और g^{β} के गुणनफल के समानुपाती है

   अत: दोनों ओर की विमायें लिखने पर $T = L^{\alpha}\,(LT^{-2})^{\beta} = L^{\alpha+\beta}\,T^{-2\beta}$

   L व T की घातों की तुलना करने पर



$\alpha + \beta = 0,\ 2\beta = -1 \Rightarrow \beta = -1/2$ और $\alpha = 1/2$

अत: $t \propto \sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

2. a की विमा $= LT^{-2}$

υ की विमा $= LT^{-1}$

r की विमा $= L$

माना a υ^{α} एवं r^{β} के गुणनफल का समानुपाती है

अत: विमीय दृष्टिकोण से

$LT^{-2} = (LT^{-1})^{\alpha}\, L^{\beta} = L^{\alpha+\beta}\, T^{-\alpha}$

L व T की घातों की तुलना करने पर

$\alpha + \beta = 1,\ \alpha = 2, \Rightarrow \alpha = -1$

अत:, $a \propto \upsilon^2/r$

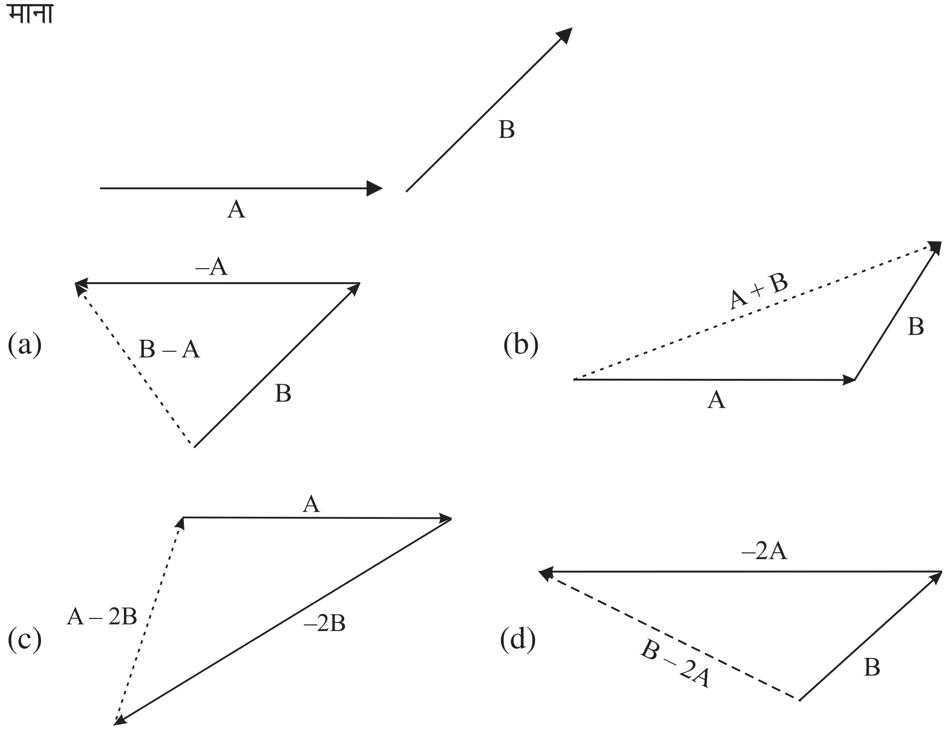
3. $m\upsilon$ की विमायें $= MLT^{-1}$

Ft की विमायें $= MLT^{-2}\, T^{1} = MLT^{-1}$

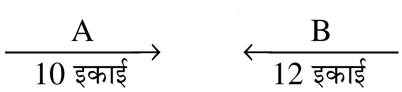
दोनों ओर की विमायें समान हैं अत: समीकरण विमीय रूप से सही है।

1.3

1. माना



2.



टिप्पणियाँ

$\xleftrightarrow[\;A = 10 \text{ इकाई}\;]{B = -12 \text{ इकाई}}$

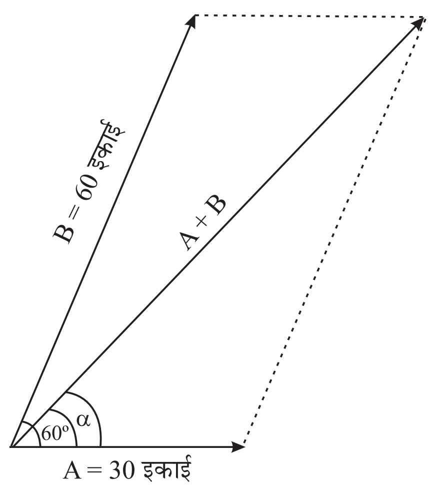
$$A + B = 10 + (-12)$$
$$= -2 \text{ units}$$

और

$A = 10$ इकाई $-B = +12$ इकाई

$\mathbf{A - B} = 22$ इकाई

3.



$|A + B| = 77$ इकाई

1.4

1. यदि **A** और **B** समांतर हों तो उनके बीच का कोण θ शून्य होगा, अत: उनका क्रॉस गुणनफल

   $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin\theta = 0.$

   यदि वे विपरीत दिशा में समांतर हों तो उनके बीच का कोण 180°। अत:

   $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin\theta = 0$, क्योंकि $\sin 180° = 0$.

2. यदि **B** का परिमाण आधा हो जाय और यह पूर्ववर्ती तल पर ही स्थित रहे तो सदिश गुणनफल $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ की दिशा अपरिवर्तित रहेगी।

3. क्योंकि सदिश **A** और **B** एक ही तल में घूमते हैं, अत: उनके सदिश गुणनफल $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ की दिशा अपरिवर्तित रहेगी।

4. मान लो आरंभ में **A** और **B** के बीच का कोण 0° व 180° के बीच में है, तब $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ की दिशा तल के ऊर्ध्वलंबवत् होगी। यादृच्छ परिमाण में घूर्णन के फलस्वरूप

यदि उनके बीच का कोण 180^o से अधिक हो जाता है तो **C** की दिशा तल के अधोलंबवत् होगी।

5. यदि **A**, x-अक्ष के अनुदिश और **B**, y-अक्ष के अनुदिश है तो दोनों xy तल पर स्थित है। इनका सदिश गुणनफल $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, z-दिशा के अनुदिश होगा। यदि **A**, y-अक्ष के अनुदिश एवं **B**, x-अक्ष के अनुदिश हो तो **C** ऋणात्मक z-अक्ष के अनुदिश होगा।

6. (a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \cos\theta = 0$ यदि $\theta = 90^o$

   (b) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \sin\theta = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$ क्योंकि $\sin\theta = 1$ at $\theta = 90^o$

1.5

1. यदि **A** x-अक्ष से 60^o का कोण बनाये तो

$$A_x = A\cos 60 = 50\ (1/2) = 25 \text{ इकाई}$$
$$A_y = A\sin 60 = 50\ (\sqrt{3}/2) = 50\ (0.866)$$
$$= 43.3 \text{ इकाई}$$

यदि **A** x-अक्ष से 30^o का कोण बनाये तो

$$A_x = 50\cos 30 = 50\ (0.866) = 43.3 \text{ इकाईयाँ}$$
$$A_y = 50\sin 30 = 50\ (1/2) = 25 \text{ इकाईयाँ}$$

दोनों स्थितियों में घटकों के मान समान नहीं हैं।

2. निर्देशांक ग्रिड पर सदिशों की स्थिति चित्र 1.14 में दर्शायी गयी है

   माना **A** x-अक्ष से θ कोण बनाता है, तब

$$\tan\theta = -4/3 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(-4/3)$$
$$= -53^o\ 6' \text{ or } 306^o\ 54'$$

   यदि B x-अक्ष से ϕ कोण बनाता है तो

$$\tan\phi = 6/-2 = -3 \Rightarrow \phi = \tan^{-1}(-3)$$
$$= 108^o\ 24'$$

3. **A** और **B** का बिंदु गुणन (अदिश गुणन)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}}).(-2\hat{\mathbf{i}} + 6\hat{\mathbf{j}})$$
$$= -6(\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}}) - 24(\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}}) = -30$$

   क्योंकि $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0$, और $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = 1$

   A एवं **B** का क्रॉस गुणनफल

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}}) \times (-2\hat{\mathbf{i}} + 6\hat{\mathbf{j}})$$

टिप्पणियाँ

समीकरण (1.14) और (1.15) का उपयोग करने पर,

$$= 18\,(\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}) + 8\,(\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}}) = 18\,\hat{\mathbf{k}} - 8\,\hat{\mathbf{k}} = 10\,\hat{\mathbf{k}}$$

क्योंकि **A** एवं **B** xy तल में हैं, अत: क्रॉस गुणनफल z-अक्ष की दिशा में है।

पाठांत अभ्यास माला

1. $1\ \text{ly} = 9.4673 \times 10^{15}$ m.

2. $\dfrac{\text{उल्का की चाल}}{20^\circ\text{C पर वायु में ध्वनी की चाल}} = \dfrac{51}{340} = \dfrac{3}{20}$

5. 15.84 N and $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$

8. $\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B} = 30$

   $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (5\,\hat{\mathbf{i}} - 3\,\hat{\mathbf{j}}) \times (3\,\hat{\mathbf{i}} - 5\,\hat{\mathbf{j}})$ एक एकल सदिश **C** है जिसमें $|\mathbf{C}| = 16$ इकाई ऋणात्मक z-अक्ष के अनुदिश