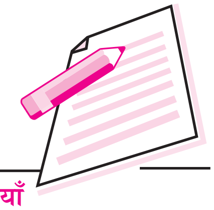


टिप्पणियाँ

13

सरल आवर्त गति

आप सरल रेखीय, प्रक्षेप्य व वृत्तीय गतियों के बारे में पढ़ चुके हैं। ये गतियाँ गतिशील वस्तु की गति में अपनाए गए पथ से परिभाषित होती हैं। लेकिन कुछ वस्तुएं इस तरह की गति करती हैं जिनकी विशेष समय अंतराल में पुनरावृत्ति होती है। उदाहरण के लिए, हृदय की धड़कन, घड़ी की सुइयों की गति, एक झूले और एक लोलक की गति, दिक्काल में स्थित एवं आवर्ती पकृति की हैं। इस प्रकार की गति **आवर्ती गति** कहलाती है। यह एक सार्वभौमिक परिघटना है।

इस पाठ में आप आवर्ती गतियों और विशेषत: दोलन गतियों के बारे में अध्ययन करेंगे जिनका हमें दैनिक जीवन में सामना करना पड़ता है। आप सरल आवर्त गति और तत्संबंधी संकल्पनाओं के विषय में अध्ययन करेंगे। अगले अध्याय में हम तरंग परिघटना–तरंगों के प्रकार और उनकी विशेषताओं का अध्ययन करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ को पढ़ने के बाद आप:

- यह दर्शा पाएंगे कि एक दोलनी गति आवश्यक रूप से आवर्ती होती है किन्तु आवर्ती गति निश्चित रूप से दोलनी नहीं होती है;
- सरल आवर्त गति को परिभाषित कर पाएंगे और दिखा सकेंगे कि सरल आवर्त गति एक समान वृत्ताकार गति के वृत्त के किसी व्यास पर प्रक्षेप से प्रदर्शित की जा सकती है;
- आवर्त दोलित्रों के लिये आवर्तकालों के व्यंजकों का निगमन कर सकेगे;
- एक सरल आवर्त्त दोलित्र की स्थितिज ऊर्जा और गतिज ऊर्जा के लिये व्यंजकों का निगमन कर सकेंगे;
- मुक्त, अवमंदित और प्रणोदित दोलनों में भेद कर सकेंगे।

13.1 आवर्ती गति

आपने एक दोलक घड़ी को देखा होगा और यह ध्यान दिया होगा कि इसकी सेकन्ड और मिनट वाली सुईयों की नोंकें एक वृत्त में नियत गति से चलती हैं। सेकन्ड वाली सुई घड़ी के डायल पर एक मिनट में अपनी यात्रा पूरी करती है, जबकि मिनट वाली सुई पूरे भ्रमण में एक घंटा लेती है। तथापि, एक पेन्डुलम अपनी माध्य स्थिति के इधर-उधर घूमता है और एक निश्चित समय में अपनी प्रारंभिक अवस्था में आ जाता है। ऐसी गति जो एक निश्चित अंतराल के बाद अपने को दोहराती है **आवर्ती गति** कहलाती है। आवर्त गतियाँ दो प्रकार की होती हैं-(1) **अदोलनी** और (2) **दोलनी**। घड़ी की सूइयों की गति अदोलनी और एक लोलक की गति दोलनी होती है। अत: ये दोनों गतियां आवर्ती हैं। यहाँ पर ध्यान देना आवश्यक है कि एक दोलनी गति निश्चित रूप से आवर्ती होती है लेकिन एक आवर्ती गति अनिवार्य रूप से दोलनी नहीं होती। याद रखें कि गति जो समान समय अंतरालों में अपने को दोहराती है वह **आवर्ती** होती है और यदि किसी माध्य स्थिति के इर्द-गिर्द होती है तो यह **दोलनी** होती है।

हम जानते हैं कि पृथ्वी अपने अक्ष पर लगभग 24 घंटे में अपना घूर्णन पूरा करती है। इसी से दिन रात होते हैं। पृथ्वी सूर्य की परिक्रमा भी करती है तथा 365 दिन में अपनी परिक्रमा पूरी करती है। इस गति के कारण मौसमों का अनुक्रम होता है। उसी प्रकार सभी ग्रह सूर्य के परित: दीर्घवृत्ताकार कक्षाओं में घूमते हैं और प्रत्येक एक नियत कालान्तर में अपना चक्कर पूरा करता हैं ये अदोलनी आवर्ती गति के उदाहरण है।

जीन बेपटिस्ट जोसेफ फोरियर
(1768 – 1830)

फ्राँसीसी गणितज्ञ, एक जटिल दोलन के विश्लेषण को ज्या और कोज्या फलनों की श्रेणी के रूप में अभिव्यक्ति के लिये दी गई फोरियर श्रेणी के लिए विख्यात हैं।

फोरियर ने ऊष्मा चालन की गणितीय विधि का अध्ययन किया। उन्होंने ऊष्मा विसरण के आंशिक अवकल समीकरण को स्थापित किया और त्रिकोणमित्तीय फलनों की अनंत श्रेणी का प्रयोग करते हुए इन्हें हल किया।

फोरियर के पिता पेशे से एक दर्जी थे। ये उनकी दूसरी पत्नी की नंवी संतान थे। ये 10 वर्ष की आयु में ही अनाथ हो गए थे। एक पादरी के रूप में, फिर अध्यापक, एक क्रांतिकारी, एक गणितज्ञ और नेपोलियन बोनापार्ट के सलाहकार के रूप में फोरियर का जीवन बहुआयामी (बहुरंगी) था।

वे लाप्लास, लेगरेन्ज, बायो, पॉयसन, मालुस, डी लेम्बर, अरेगो और कोरनोट के समकालीन थे। चन्द्रमा में फोरियर क्रेटर और इफिल टावर में उनका नाम उनके योगदानों के लिए श्रद्धांजलि है।

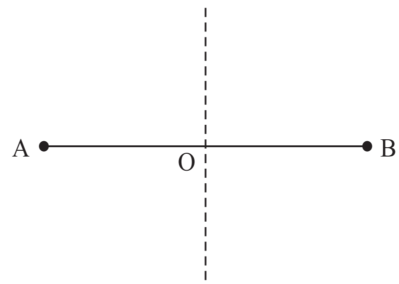
13.1.1 विस्थापन, समय के फलन के रूप में

आवर्ती गति

जब कोई वस्तु अपनी गति को किसी निश्चित समय के पश्चात् दोहराती है तो उसकी गति को आवर्त गति कहा जाता है।

मान लीजिये कि किसी निश्चित समय अन्तराल T के पश्चात् किसी वस्तु की स्थिति में O से B, B से O, फिर O से A और अन्ततः A से O तक परिवर्तन होता है।

तब, वस्तु की स्थिति में परिवर्तन अथवा वस्तु के विस्थापन को समय के फलन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है:



चित्र 13.1

$$x = af(t + T)$$

जहाँ, a एक नियतांक है तथा T वह समय है जिसके पश्चात् x का मान उसके पूर्व मान के बराबर हो जाता है।

प्रत्येक समय अन्तराल T के लिये:

$$x = af(T) = 0, t = 0 \text{ के लिये}$$

$$x = af(T + T/4) = a, t = T/4 \text{ होने पर}$$

$$x = af\left(T + \frac{T}{2}\right) = 0, t = \frac{T}{2} \text{ होने पर}$$

$$x = af\left(T + \frac{3T}{4}\right) = -a, t = \frac{3T}{4} \text{ होने पर}$$

$$x = af(T + T) = 0, t = T \text{ होने पर}$$

....

....

इस प्रकार x, t का फलन है और इसकी गति, समय अन्तराल T के पश्चात् दोहराई जाती है। अतः यह गति, आवर्त गति है।

क्रियाकलाप 13.1

मान लीजिए कि एक सरल आवर्तगति करते हुए एक कण की माध्य स्थिति से विस्थापन y को निम्न समीकरण द्वारा निरूपित कर सकते हैं

$$y = a \sin \theta \qquad (13.1)$$

या

$$y = a \cos \theta \qquad (13.2)$$

अपनी गणित की पुस्तक से $\sin\theta$ और $\cos\theta$ के मान $\theta = 0, 30^0, 60^0, 90^0, 120^0, 150^0, 180^0, 240^0, 300^0, 330^0$ तथा 360^0 के लिये ज्ञात कीजिये, $a = 2.5$ cm लेकर और संबंध $y = a\sin\theta$ का उपयोग करके प्रत्येक कोण के लिये y का मान निकालिये। उपयुक्त पैमाना चुनकर y और θ में आरेख खींचिए। इसी प्रकार संबंध $y = a\cos\theta$ का उपयोग करके y और θ में दूसरा आरेख खींचिए। आप यह पाएंगे कि प्रत्येक आरेख $+a$ और $-a$ के बीच दोलन निरूपित करता है। यह दर्शाता है कि एक निश्चित प्रकार की दोलन गति किसी कोण के ज्या अथवा कोज्या युक्त व्यंजक या ऐसे व्यंजकों के संयोग द्वारा निरूपित की जा सकती है।

अब आप निम्न प्रश्नों का उत्तर देते हुए अपनी प्रगति का आकलन करें।

पाठगत प्रश्न 13.1

1. एक आवर्ती गति और दोलनी गति में क्या अंतर है?
2. निम्न में से कौन-सा उदाहरण आवर्ती गति को दर्शाता है?

   (i) बन्दूक से दागी गई गोली, (ii) परमाणु में नाभिक के चारों ओर इलेक्ट्रॉन का घूर्णन, (iii) सड़क पर एकसमान वेग से गतिमान वाहन, (iv) सूर्य के परित: घूमता धूमकेतु, (v) U नली में दोलन करते पारे के स्तंभ की गति।
3. (i) एक दोलनी आवर्ती गति और (ii) एक अदोलनी आवर्ती गति के उदाहरण दें।

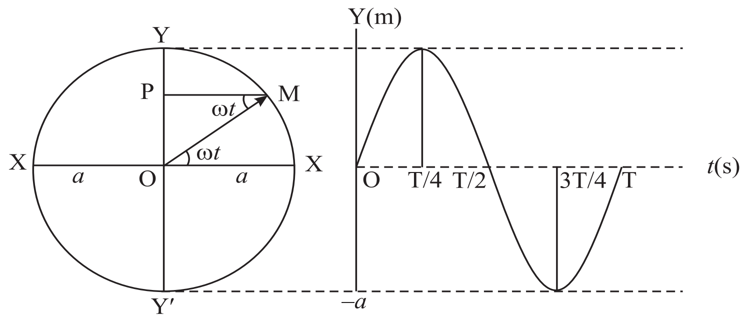
13.2 सरल आवर्त गति: संदर्भ-वृत्त

एक आवर्ती दोलित्र के दोलनों को किसी कोण की ज्याओं और कोज्याओं से युक्त पदों द्वारा निरूपित किया जा सकता है। यदि एक दोलन करते हुए कण का अपनी माध्य स्थिति से विस्थापन समीकरण $y = A\sin\theta$ या $y = B\cos\theta$ या $y = A\sin\theta + B\cos\theta$ द्वारा निरूपित किया जा सकता है, जहाँ पर A और B नियतांक है, तो कण की गति सरल आवर्ती होती है। सरल आवर्ती गति को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है:

यदि कोई कण किसी ऐसे बल के प्रभाव में किसी नियत बिन्दु के दोनों ओर गति करता है, जो नियत बिन्दु से कण के विस्थापन x का अनुक्रमानुपाती होता है और बल की दिशा विस्थापन की दिशा के विपरीत होती है उस कण की गति सरल आवर्त गति होती है। हम अपनी चर्चा रेखीय दोलनों तक ही सीमित रखेंगें गणितीय रूप में इसे हम इस प्रकार व्यक्त करते हैं:

$$F = -kx$$

जहाँ k आनुपातिकता गुणांक है।



चित्र 13.2: P की YOY′ के अनुदिश आवर्त गति

एक सरल आवर्तगति का समीकरण निकालने के लिए, हम एक बिंदु M को एक a त्रिज्या के वृत्त की परिधि में अचर चाल υ से चलता हुआ लेते हैं (चित्र 13.1)। वृत्त का केन्द्र O है। मान लीजिए कि $t = 0$ पर कण बिंदु X पर है और $t = t$ पर M पर है स्थिति सदिश OM जिसे कलादर्शक कहते हैं एक नियत कोणीय वेग $\omega = \dfrac{v}{a}$ से घूर्णन करता है। (यह निरूपण प्रत्यावर्ती धाराओं के परिपथों के विश्लेषण में भी उपयोग किया जाता है) बिंदु M पर त्वरण $\upsilon^2/a = a\omega^2$ बिंदु O की ओर होता है। समय t पर इस त्वरण का OY दिशा में घटक = $a\omega^2 \sin\omega t$ है। हम YOY′ के लंबवत् रेखा MP खींचते हैं; तब P को एक m द्रव्यमान व $a\omega^2 \sin\omega t$ त्वरण के कण के तुल्य लिया जा सकता है। कण P पर O की दिशा में लगने वाला बल

$$F = ma\omega^2 \sin \omega t$$

लेकिन $\sin \omega t = y/a$

इसलिए
$$F = m\omega^2 y \tag{13.3}$$

विस्थापन O से P की ओर तथा बल P से O की ओर नापा जाता है।

अतः
$$F = -m\omega^2 y$$

(ऋणात्मक चिह्न पर ध्यान दें)

चूंकि यह बल O की ओर निर्देशित है और P के O से विस्थापन 'y' के अनुक्रमानुपाती है। अतः कण सरल आवर्तगति करता है।

माना $m\omega^2 = k$, एक नियतांक है। अतः समीकरण (13.3) से

$$F = -k\,y \tag{13.4}$$

जहाँ पर k एक नियतांक है, जो कि प्रति इकाई विस्थापन के लिए बल है, इसे बल नियतांक कहते हैं।

$$\omega^2 = k/m \tag{13.5}$$

एक पूरे चक्कर में OM, 2π का कोण T समय में बनाता है अतः

$$\omega = 2\pi/T \qquad (13.6)$$

समी.(13.5) और समी. (13.6) को संयोजित करने पर हमें आवर्तकाल के लिये निम्न समीकरण प्राप्त होता है।

$$T = 2\pi\sqrt{k/m} \qquad (13.7)$$

यह बिन्दु P को O से Y फिर O से होते हुए Y′ और वापस O में आने में लगा समय है। इस समय में यह कण वृत्त का एक पूरा चक्कर लगा लेता है ओर बिंदु (कण) की स्थिति से लम्ब का पाद O के इधर-उधर एक दोलन पूरा कर लेता है जैसा कि चित्र (13.1) में दर्शाया गया है।

13.2.1 सरल आवर्त गति संबंधी मूल पदावली

विस्थापन : आवर्त दोलित्र की वह दूरी होती है, जो दिए गए क्षण पर उसकी माध्य (साम्यावस्था) से होती है।

आवर्तकाल : एक दोलन को पूरा करने में लिया गया समय दोलित्र का आवर्तकाल कहलाता है। इसे T से दर्शाया जाता है।

आयामः किसी दोलित्र का अपनी माध्य स्थिति के किसी ओर अधिकतम विस्थापन आयाम कहलाता है।

आवृत्ति : यह एक सेकन्ड में दोलित्र द्वारा पूर्ण किए गये कंपनों की संख्या है, इसे v द्वारा दर्शाया जाता है। आवृत्ति का SI मात्रक हर्ट्ज है जिसका संकेत Hz है। चूंकि यह एक सेकन्ड में पूरे किए गए कंपन हैं, अतः एक कंपन में लिया गया समय $1/v$

इसलिए $T = 1/v$ या $v = \left(\dfrac{1}{T}\right)s^{-1}$

चूंकि आवर्ती दोलन $\sin\theta$ या $\cos\theta$ युक्त व्यजकों द्वारा दर्शाए जा सकते हैं, हमें दो और महत्वपूर्ण संकल्पनाओं की आवश्यकता होती है। ये हैं:

कलाकोण ϕ: यह एक कोण है जिसकी किसी क्षण पर ज्या या कोज्या दोलित्र की स्थिति तथा गति की दिशा बतलाता है। इसे रेडियन में व्यक्त करते हैं।

कोणीय आवृत्ति ω: यह कला कोण (phase) परिवर्तन की दर है। इसे रेडियन/सेकन्ड में अभिव्यक्त किया जाता है। चूंकि कलाकोण एक पूरी परिक्रमा में 0 से 2π रेडियन तक बदलता है। अतः कलाकोण परिवर्तन की दर $\omega = 2\pi/T = 2\pi\, v$

उदाहरण 13.1 : 9 किलोग्राम द्रव्यमान की एक ट्रे k बल नियतांक की एक स्प्रिंग पर अवलम्बित है, जैसा कि चित्र 13.3 में दिखाया गया है। ट्रे को धीरे से नीचे की ओर दबाकर छोड़ दिया जाता है तो यह सरल आवर्तगति करने लगती है, जिसका आवर्तकाल 1.0 सेकन्ड होता है।

टिप्पणियाँ

जब ट्रे पर M द्रव्यमान का एक पिण्ड रख दिया जाता है, तो इसका आवर्तकाल 2.0 सेकन्ड तक बढ़ जाता है। पिण्ड का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।

हल : निकाय की कोणीय आवृत्ति $\omega = \sqrt{k/m}$, जहाँ m दोलित्र का द्रव्यमान है,

$$4\pi^2/T^2 = \frac{k}{m}$$

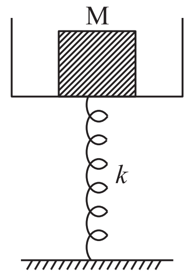


Fig. 13.3

या $$m = \frac{kT^2}{4\pi^2}$$

जब ट्रे खाली है तो, $m = 9$ kg और T = 1 सेकन्ड

इसलिए $$9 = \frac{k(1)^2}{4\pi^2}$$

ट्रे पर M द्रव्यमान का पिण्ड रखने पर m = 9 + M और T = 2 सेकन्ड, इसलिए $9 + M = k \times (2)^2/4\pi^2$

इन दो समीकरणों से

$$\frac{(9+M)}{9} = 4$$

अत: M = 27 kg.

उदाहरण 13.2: 1600 न्यूटन/मीटर बल नियतांक वाली स्प्रिंग को क्षैतिज मेज पर आरूढ़ कर दिया जाता है जैसा कि चित्र 13.4 में दर्शाया गया है, एक द्रव्यमान m = 4 kg को स्प्रिंग के मुक्त सिरे से बांधकर क्षैतिज रूप में दांयी ओर 4.0 cm दूरी तक खींचा और फिर छोड़ दिया जाता है। गणना कीजिए (i) आवृत्ति (ii) अधिकतम त्वरण और (iii) द्रव्यमान की अधिकतम चाल।

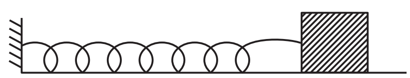


Fig. 13.4

हल : $$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{1600/4}$$

= 20रेडियन/सेकन्ड

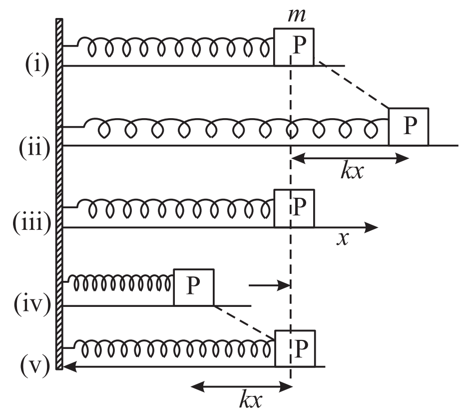
अत: $v = 20/2\pi = 3.18$ Hz. अधिकतम त्वरण = $a\,\omega^2 = 0.04 \times 400 = 16$ m s^{-2}, अधिकतम चाल $v_{max} = a\,\omega = 0.04 \times 20 = 0.8$ m s^{-1}

13.3 सरल आवर्तगति के उदाहरण

सरल आवर्तगति की अवधारणा के स्पष्टीकरण हेतु बहुत सामान्य उदाहरण नीचे दिए गए हैं।

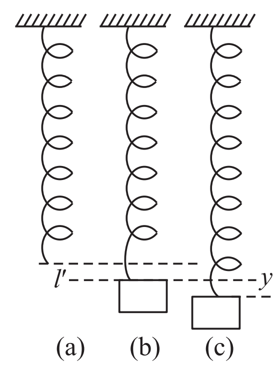
13.3.1 स्प्रिंग-द्रव्यमान निकाय के क्षैतिज दोलन

मान लीजिए एक क्षैतिज प्रत्यास्थ स्प्रिंग जिसका बल नियतांक k है तथा जिसके एक सिरे में m द्रव्यमान का छोटा सा पिण्ड जुड़ा है। स्प्रिंग का दूसरा सिरा दृढ़तापूर्वक दीवार से जुड़ा है (चित्र 13.5)। पिंड के द्रव्यमान की तुलना में स्प्रिंग का द्रव्यमान नगण्य मान लिया गया है।



चित्र 13.5 एक स्प्रिंग से जुड़े हुए द्रव्यमान के दोलन

हम मान लेते हैं कि वायु प्रतिरोध एवं घर्षण से ऊर्जा क्षय नहीं होती। हम क्षैतिज रूप से $+x$ दिशा लेते हैं, प्रारंभ में अर्थात् $t = 0$ पर गुटका स्थिर है, और स्प्रिंग विश्रोत (relaxed) अवस्था में हैं चित्र 13.5 (i)। तब इसे क्षैतिज रूप से एक छोटी दूरी तक खींचा जाता है। यह गुटके पर k x बल आरोपित करता है, बल विस्थापन की विपरीत दिशा में कार्य करता है और गुटके को उसकी साम्य स्थिति की ओर लाना चाहता है। चित्र 13.5 (ii) जब यह गुटका अपनी प्रारंभिक स्थिति में वापस आता है तो चित्र 13.5 (iii) यह v वेग प्राप्त कर लेता है। अतः इसकी गतिज ऊर्जा $K = (1/2)mv^2$ हो जाती है। गति के जड़त्व के कारण गुटका बांयीं ओर अपनी गति बनाए रखता हैं जब तक कि यह चित्र 13.5 (iv) की स्थिति में नहीं पहुंच जाता है। इस स्थिति में गुटका पुनः kx बल का अनुभव करता है, जिसके कारण वह प्रारंभिक स्थिति में आ जाता है [चित्र 13. 5 (v)] और तदुपरांत गुटका इधर-उधर दोलन करता रहता है।



चित्र 13.6: स्प्रिंग के मुक्त सिरे से लटके द्रव्यमान (गुटके) के ऊर्ध्वाधर दोलन

दोलन का आवर्तकाल $2\pi\sqrt{m/k}$ है जहाँ k स्प्रिंग की प्रति इकाई लंबाई परिवर्तन के लिये बल का मान है।

13.3.2 स्प्रिंग-द्रव्यमान निकाय के ऊर्ध्वाधर दोलन

हम k बल नियतांक वाले एक स्प्रिंग को एक दृढ़ आधार से लटकाते हैं (चित्र 13.6 a)। अब हम इसमें एक m द्रव्यमान का गुटका जोड़ते हैं जिसके कारण स्प्रिंग में l लम्बाई वृद्धि होती है (चित्र 13.6 b)। स्पष्ट है कि स्प्रिंग का बल नियतांक $k = mg/l$ है। अब हम गुटके को

टिप्पणियाँ

एक छोटी दूरी y के बराबर खींचते हैं (चित्र 13.6c)। बल ky ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर कार्य करता है। अत: गुटके को छोड़ने पर बल ky इसे ऊपर खींचता है। जब गुटका अपनी आरंभिक स्थिति में लौटता है, तो यह प्राप्त किए गए वेग के कारण ऊपर चलता रहता है और यह साम्य स्थिति से y दूरी ऊपर चला जाता है। इन ऊर्ध्वाधर दोलनों की कोणीय आवृत्ति

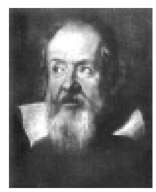
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

अत:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (13.8)$$

संपीडित स्प्रिंग अब गुटके पर प्रत्यानयन बल नीचे की ओर लगाता है। गुटका नीचे की ओर गति करता है और पुन: इसी भांति ऊर्ध्वाधर दोलन करता रहता है।

गैलीलियो गैलीली
(1564-1642)



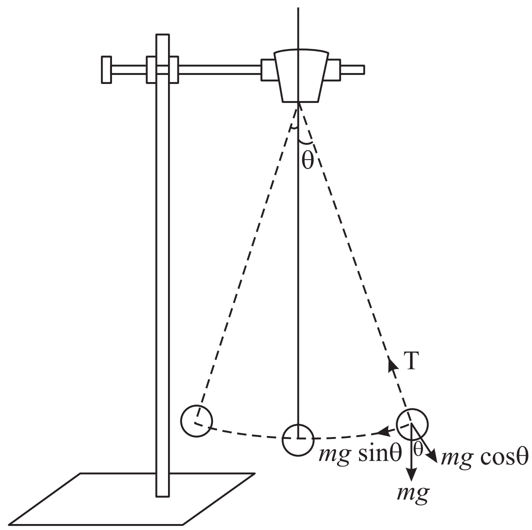
गैलीलियो के पिता विंसेनजिओं गैलीली पीसा (इटली) में एक ऊन के व्यापारी थे। गैलीलियो उन लोगो में से थे जिन्हांने आधुनिक विज्ञान में तर्क और प्रयोगों का समावेश किया। बचपन में उन्हें संगीत, कला और खिलौने बनाने में रूचि थी। किशोर गैलीलियो एक डॉक्टर बनना चाहते थे। दवाओं के बारे में अध्ययन के लिए उन्होंने पीसा के विश्वविद्यालय में प्रवेश लिया। यहाँ पर उन्होंने अपनी प्रथम खोज लोलक की समकालिकता (isochronicity) की। जिसके आधार पर क्रिश्चियन हाइगेन ने पहली पेन्डुलम घड़ी बनाई।

धन के अभाव में गैलीलियो अपनी पढ़ाई पूरी नहीं कर पाए। लेकिन अपने स्वयं के प्रयासों से उन्होंने यांत्रिकी विषय से इतना सीखा और विकसित किया कि ग्रेंड ड्यूक ऑफ टस्कनी ने उन्हें पीसा विश्वविद्यालय में गणित का प्रोफेसर नियुक्त कर दिया।

गैलीलियो ने आकाशीय पिंडों के अध्ययन के लिये दूरदर्शी यंत्र का निर्माण और उपयोग किया। अपने प्रेक्षणों के आधार पर वे संतुष्ट हो गये कि कोपरनिकस का सूर्यकेन्द्रीय ब्रह्माण्ड का सिद्धान्त ठीक था। उन्होंने अपने तर्कों को एक पुस्तक 'ए डायलॉग ऑन दि टू प्रिंसिपल ए सिस्टम आफ दि वर्ल्ड' के रूप में 1632 में प्रकाशित किया। यह तर्क वाक्य मान्यता प्राप्त अरस्तू की भूकेन्द्रीय ब्रह्माण्ड की अवधारणा के विपरीत था। जिसके लिए गैलीलियो को दंडित किया गया और उन्हें इसके लिये क्षमा मांगनी पड़ी। लेकिन 1636 में उन्होंने नयी पुस्तक ''डायलॉग ऑन द न्यू साइंसेज'' प्रकाशित की जिसमें उन्होंने पुन: अरस्तू के गति के नियमों की भ्रामकता दर्शाई।

चूंकि गैलीलियो के समय में परिष्कृत मापन यंत्र उपलब्ध नहीं थे, इसलिए उन्हें अपनी कल्पनाशक्ति (कौशल) का प्रयोग करना पड़ा। उन्होंने विचार प्रयोगों (thought experiments) की भावना को बढ़ावा दिया, जिसे कि वर्तमान में समस्त परिष्कृत युक्तियों के बावजूद भी वैज्ञानिक प्रयोग करते हैं।

13.3.3 सरल लोलक



चित्र 13.7: सरल लोलक

एक सरल लोलक दो कार्क के टुकड़ों के बीच से गुजरते हुए कसे गए सूती धागे से लटकाया गया एक गोलक है (चित्र 13.7)। गोलक को बिंदु द्रव्यमान माना गया है एवं धागा अवितान्य है। लोलक निलंबन बिन्दु के परितः मुक्त दोलन करता है।

जब गोलक को इसकी साम्य स्थिति से थोड़ा सा विस्थापित करके छोड़ दिया जाता है, तो लोलक ऊर्ध्वाधर तल में अपनी साम्य स्थिति के इधर-उधर कोणीय दोलन करने लगता है। निलंबन बिंदु और गोलक के गुरूत्व केन्द्र के बीच की दूरी को लोलक की लंबाई (l) कहते हैं। लोलक के गोलक की साम्य अवस्था से विस्थापित अवस्था में गोलक पर लगने वाले बल चित्र 13.7 में दर्शाए गए हैं।

(i) गोलक का भार mg ऊर्ध्वाधरतः नीचे की ओर कार्य करता है।

(ii) डोरी का तनाव T डोरी के अनुदिश ऊपर की ओर लगता है।

भार mg को घटकों में वियोजित करते हैं: (a) mg cosθ डोरी के अनुदिश परन्तु T की दिशा के विपरीत तथा (b) mg sinθ डोरी के लम्बवत् mg cosθ घटक तनाव T को संतुलित करता है और घटक mg sinθ गोलक में माध्य स्थिति की ओर त्वरण उत्पन्न करता है।

अतः प्रत्यानयन बल mg sin θ है। x के छोटे विस्थापनों के लिये, प्रत्यानयन बल F = mgθ

$= \dfrac{mg\,x'}{l}$ इकाई विस्थापन के लिए बल k = mg/l

अतः
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg/l}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

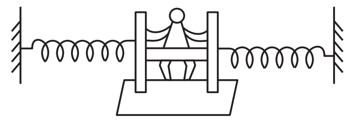
अथवा
$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

अतः
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (13.9)$$

टिप्पणियाँ

कमानी (स्प्रिंग) की सहायता से भार मापना

हम किसी निकाय का भार मापने के लिये एक स्प्रिंग तुला का प्रयोग करते हैं। इसका कार्यकारी सिद्धान्त यह है कि भार की एक निश्चित सीमा के अन्तर्गत स्प्रिंग की लंबाई में बराबर भार के लिए बराबर खिंचाव (तनन) होता है अर्थात् भार/तनन = नियत (बल नियतांक)



चित्र 13.8 एक अंतरिक्ष यात्री का द्रव्यमान मापने के लिए कमानीदार तुला

अत: स्प्रिंग की लंबाई भार के साथ रैखिक रूप से बढ़ती है। अत: आप स्प्रिंग के साथ-साथ एक रेखीय पैमाना लगाकर इसे ज्ञात भारों के लिए अशांकित कर सकते हैं। इस प्रकार बनी तुला अज्ञात भारों के मापन में प्रयुक्त होती है।

क्या ऐसी तुला गुरुत्व मुक्त अंतरिक्ष में कार्य करेगी जैसे कि अंतरिक्ष रॉकेट या उपग्रह में? स्पष्टतया नहीं शून्य गुरुत्व विहीन स्थिति में स्प्रिंग में कोई तनाव उत्पन्न नहीं होगा, तब नियमित स्वास्थ्य जांच के लिए अंतरिक्ष यात्रियों का भार मापन कैसे किया जाता है? यह एक कमानीदार तुला के द्वारा किया जाता है जो कि एक भिन्न सिद्धान्त पर आधारित है। अंतरिक्ष यात्री एक विशेष कुर्सी पर बैठता है जिसके दोनों ओर स्प्रिंग जुड़े होते हैं (चित्र 13.8)। कुर्सी के दोलनों का आवर्तकाल अंतरिक्ष यात्री के बिना और अंतरिक्ष यात्री सहित ज्ञात किया जाता है। (समय मापन के लिए इलैक्ट्रॉनिक घड़ी का प्रयोग किया जाता है)

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2 m}{k}$$

जहाँ m कुर्सी सहित अन्तरिक्ष यात्री का द्रव्यमान है।
यदि m_0 कुर्सी का द्रव्यमान है इसे हम इस तरह भी लिख सकते हैं–

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2 m_0}{k}$$

T_1 अंतरिक्ष यात्री सहित कुर्सी का दोलन काल व T_0 अंतरिक्ष यात्री के बिना दोलनों का आवर्तकाल है।

एक को दूसरे से घटाने पर, हम पाते हैं कि–

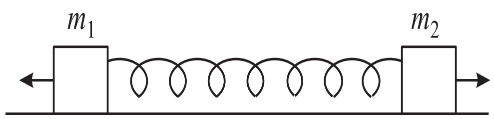
$$T_1^2 - T_0^2 = \frac{4\pi^2}{k}(\mathrm{m} - \mathrm{m}_0)$$

अत: अंतरिक्ष यात्री का द्रव्यमान

$$(m–m_0) = \frac{k}{4\pi^2}\,(T_1^2 - T_0^2)$$

चूंकि T_0 और k नियत हैं और ज्ञात हैं, अत: T_1 की माप द्रव्यमान में परिवर्तन को दर्शाती है।

उदाहरण 13.3: चित्र 13.9 में एक दोलन तंत्र दर्शाया गया है जिसमें m_1 तथा m_2 द्रव्यमान के दो पिण्ड k बल नियतांक के द्रव्यमानहीन स्प्रिंग से जुड़े हैं। प्रत्येक पिण्ड पर बल F लगाकर पिण्डों को एक दूसरे से दूर की ओर खींचकर छोड़ दिया जाता है। प्रत्येक द्रव्यमान की कोणीय आवृत्ति क्या होगी? पिण्ड एक क्षैतिज घर्षणरहित तल पर है।



चित्र 13.9: स्प्रिंग से संबंधित द्रव्यमानों का दोलनी निकाय

हल: मान लीजिए दूर की ओर खींचने पर पिण्डों के विस्थापन x_1 व x_2 है। स्प्रिंग में उत्पन्न तनन $(x_1 + x_2)$ होगा। इस प्रकार m_1 द्रव्यमान में त्वरण $k(x_1 + x_2)/m_1$ व m_2 में त्वरण $k(x_1 + x_2)/m_2$ है। चूंकि एक ही स्प्रिंग प्रत्येक द्रव्यमान को प्रत्यानयन बल प्रदान कर रही है। अत: निकाय जिसमें दोनों द्रव्यमान और स्प्रिंग हैं, का नेट त्वरण दोनों द्रव्यमानों के त्वरणों के योग के बराबर होगा। अत: निकाय का त्वरण है

$$a = \frac{k(x_1 + x_2)}{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)} = \frac{k\,x}{\mu}$$

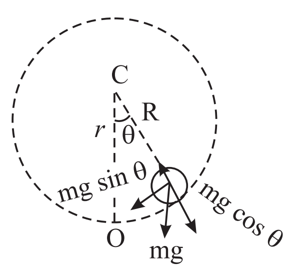
जहाँ $x = x_1 + x_2$ कमानी की लम्बाई में वृद्धि है और μ निकाय का समानीत द्रव्यमान (reduced mass) है,

$$\omega = \sqrt{k/\mu} \tag{13.10}$$

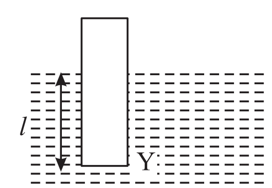
इसी तरह H_2, Cl_2, HCl, आदि द्विपरमाणुक अणुओं के कंपनों का भी विश्लेषण करके समझा जा सकता है।

पाठगत प्रश्न 13.2

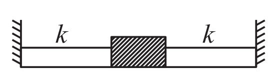
1. किसी r त्रिज्या के छोटे गोलाकार चिकने कटोरे में उसकी तली से कुछ हटकर m द्रव्यमान की एक छोटी गोलाकार गेंद रखी जाती है। गेंद के दोलनों का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए (चित्र 13.10)।



चित्र 13.10



चित्र 13.11



चित्र 13.12

2. m द्रव्यमान का एक बेलन ρ घनत्व के द्रव में ऊर्ध्वाधर तैर रहा है। द्रव के अन्दर बेलन की लंबाई l है। इसके दोलनों का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए (चित्र 13.11)।
3. एक द्रव्यमान m जो दो रबर की पट्टियों से बंधा है (चित्र 31.12) की आवृत्ति ज्ञात करें। प्रत्येक रबर की पट्टी का बल नियतांक k है।

13.4 सरल आवर्त दोलित्र की ऊर्जा

जैसा कि आप जानते हैं कि सरल आवर्त गति का एक रूप निम्न है।

$$y = a \sin \omega t \qquad (13.11)$$

जब t बदलकर $t + \Delta t$, हो जाता है तो y बदलकर $y + \Delta y$ हो जाता है। अत: हम लिख सकते हैं:

$$y + \Delta y = a \sin\omega (t + \Delta t) = a \sin (\omega t + \omega \Delta t)$$

$$= a [\sin\omega t \cos \omega\Delta t + \cos\omega t \sin \omega\Delta t]$$

जब $\Delta t \to 0$, $\cos \omega\Delta t \to 1$ and $\sin \omega \Delta t \to \omega \Delta t$. Then

$$y + \Delta y = a \sin \omega t + a \omega\Delta t \cos \omega t. \qquad (13.12)$$

(समीकरण 13.11) को समीकरण (13.12) से घटाने पर हम पाते हैं कि

$$\Delta y = \Delta t\, \omega a \cos \omega t$$

जोड़ने पर

$$\Delta y/\Delta t = \omega a \cos \omega t$$

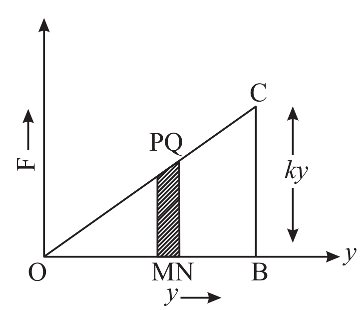
या

$$v \quad = \omega a \cos t\, \omega t \qquad (13.13)$$

जहाँ पर $v = \Delta y/\Delta t$, यहाँ t समय पर दोलक का वेग है।

अत: दोलक की t समय पर गतिज ऊर्जा $K = (1/2)\, mv^2 = (1/2)\, \omega^2 a^2 \cos^2 \omega t$ (13.14)

अब हम समय t पर दोलन की स्थितिज ऊर्जा की गणना करते हैं। जब विस्थापन y है, तो प्रत्यानयन बल ky है, जहाँ k बल नियतांक हैं इस उद्देश्य के लिए हम प्रत्यानयन बल और विस्थापन के बीच एक आरेख खींचते हैं। हम चित्र (13.13) की भांति एक सीधी रेखा पाते हैं। सरल रेखा आरेख पर हम दो बिंदुओं P और Q का चयन करते हैं और OY पर PM और QN लंब डालते हैं। चूंकि P और Q बिंदु सन्निकट हैं, अत: समलम्ब चतुर्भुज PQNM को एक आयत माना जा सकता है। आयताकार पट्टी का क्षेत्रफल (ky Δy)है। यह क्षेत्रफल प्रत्यानयन बल ky के विरुद्ध किए गए कार्य के तुल्य है, जब विस्थापन एक छोटी मात्रा



चित्र 13.13: विस्थापन y और प्रत्यानयन बल के बीच आरेख

Δy से बदलता है। ΔOBC का क्षेत्रफल विस्थापन परिवर्तन OB $(= y)$ के तुल्य किया गया कार्य $W = \frac{1}{2}ky^2$ है। यह दोलन की स्थितिज ऊर्जा है। अत: विस्थापन y के संगत दोलन की स्थितिज ऊर्जा

$$U = \frac{1}{2}ky^2$$

लेकिन $\omega^2 = k/m$. अत: $k = m\omega^2$ का मान उपरोक्त व्यंजक में प्रतिस्थापित करने पर

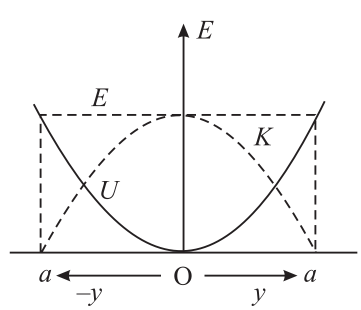
$$U = \frac{1}{2}m\omega^2 y^2$$

पुन: $y = a \sin \omega t$, को इस तरह लिख सकते हैं:

$$U = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 \sin^2\omega t \qquad (13.15)$$

अत: इसे समीकरण (13.14) के साथ जोड़ने पर

$$\begin{aligned} E &= U + K \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 (\sin^2\omega t + \cos^2\omega t) \\ &= \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \qquad (13.16) \end{aligned}$$



चित्र 13.14 :स्थितिज ऊर्जा U और गतिज ऊर्जा E तथा कुल ऊर्जा व साम्य स्थिति से विस्थापन का ग्राफ।

गतिज ऊर्जा K, स्थितिज ऊर्जा U व कुल ऊर्जा E का विस्थापन के साथ आलेख चित्र 13.14 में दर्शाया गया है। ग्राफ से यह स्पष्ट है कि $y = 0$ के लिये $K = E$ और $U = 0$ साम्य स्थिति से विस्थापन की स्थिति में जब y की दूरी बढ़ती है तो गतिज ऊर्जा कम होती है और माध्य स्थिति में स्थितिज ऊर्जा बढ़ती है। माध्य स्थिति में स्थितिज ऊर्जा शून्य और गतिज ऊर्जा अधिकतम होती है। चरम बिन्दुओं पर कुल ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा होती है। लेकिन $K + U = E$ का मान स्थिर है।

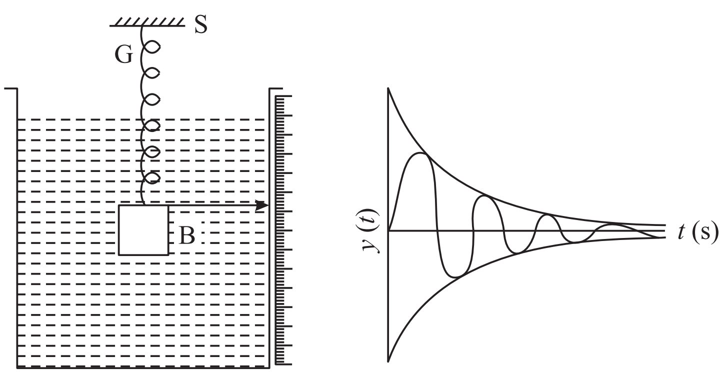
पाठगत प्रश्न 13.3

1. आवर्ती दोलित्र की गतिज ऊर्जा कब अधिकतम होगी उसकी साम्य स्थिति में या अधिकतम विस्थापन की स्थिति में? त्वरण कब अधिकतम होता है?

2. सरल लोलक का आयाम समय के साथ क्यों घटता जाता है? जब उसका आयाम घटता है तो लोलक की ऊर्जा का क्या होता है?

13.5 अवमंदित आवर्त दोलन

प्रत्येक दोलायमान निकाय के चारों ओर का माध्यम सामान्यतया श्यान होता है। जिसके फलस्वरूप प्रत्येक दोलन में इसकी कुछ ऊर्जा ऊष्मा के रूप में क्षय होती है। जैसे-जैसे दोलन की ऊर्जा का ह्रास होता है, वैसे ही दोलनों के आयाम भी कम होते हैं। लोलक के दोलनों का हवा में आयाम क्रमशः कम होता चला जाता है। ऐसे दोलनों को अवमंदित आवर्त दोलन कहते हैं। अवमंदित दोलनों को समझने के लिये हम क्रियाकलाप (13.2) करते हैं।



चित्र 13.15: (a) अवमंदित दोलन (प्रायोगिक विन्यास) (b) ग्राफीय प्रस्तुति

क्रियाकलाप 13.2

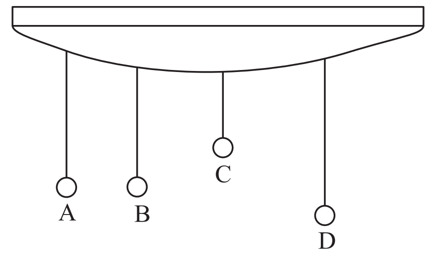
किसी सरल आवर्ती दोलित्र में एक स्प्रिंग C द्वारा धातु का गुटका (B) एक दृढ़ आधार (S) से लटका है (चित्र 13.15)। पिण्ड के नीचे एक लम्बा काँच का बेलन रखें और उसे दो-तिहाई पानी से भरें, ताकि गुटका पानी की सतह से लगभग 6 cm नीचे रहे, ओर लगभग उतना ही बेलन के तल से भी ऊपर रहे। बेलन के किनारे पर ऊर्ध्वाधर एक मिलीमीटर पैमाना चिपकाएं (गुटके में लगे संकेतक के ठीक सामने)। गुटके को कुछ सेन्टीमीटर नीचे खींचकर छोड़ दें। प्रत्येक दोलन के बाद मिलीमीटर स्केल पर संकेतक की उच्चतम स्थिति तथा समय नोट कर लें। तब समय और दोलन के आयाम के बीच ग्राफ खींचें। चित्र 13.15 (b) प्रदर्शित करता है कि आयाम समय के साथ कम होता जाता है। ऐसे दोलन अवमंदित दोलन कहलाते हैं।

13.6 मुक्त और प्रणोदित दोलनः अनुनाद

इन परिघटनाओं के बीच अंतर समझने के लिए हम निम्न क्रियाकलाप करते हैं,

टिप्पणियाँ

क्रियाकलाप 13.3



चित्र 13.16: दोलन और अनुनाद

दोनों ओर से जुड़ी हुई एक दृढ़ क्षैतिज छड़ लें। इसके सिरों को जोड़ते हुए एक ढीला किन्तु मजबूत धागा बांधें और इससे चार लोलक A, B, C, D लटकाएं जैसा कि चित्र (13.16) में दर्शाया गया है। लोलक A और B की लंबाइयाँ बराबर हैं। C की लंबाई कम और D की लंबाई A व B से अधिक है। लोलक B का गोलक भारी है। लोलक B को दोलन कराऐं आप यह पाएंगे कि कुछ समय के पश्चात शेष तीनों लोलक भी दोलन करने लग जाते हैं। इसका अर्थ यह हुआ कि यदि कई लोलक युग्मित हों तो वे अपनी ऊर्जा आगे और पीछे हस्तानांतरित करते रहते हैं। इसका तरंग संचरण के लिये बहुत महत्वपूर्ण उपयोग है। आप देखते हैं कि A का आयाम सर्वाधिक होता है। क्यों? प्रत्येक लोलक एक दोलित्र है जिसकी अपनी एक स्वाभाविक आवृत्ति होती है। लोलक B जिसका द्रव्यमान सर्वाधिक है, सभी लोलकों A, C, D को अपने दोलन संचरित कर देता है। जिसके परिणामस्वरूप लोलक C और D अपनी स्वाभाविक आवृत्ति में दोलन न करके B की आवृत्ति से दोलन करने को बाध्य हो जाते हैं, इस घटना को **प्रणोदित दोलन** कहते हैं। इन लोलकों में से किसी भी गोलक को रोककर अपनी इच्छानुसार आवृत्ति से दोलन करने के लिए बाध्य किया जा सकता है। दोनों C तथा D को B की आवृत्ति से दोलन करने के लिए बाध्य किया गया है। लेकन पेन्डुलम A जिस पर B के दोलन आरोपित हैं अपेक्षाकृत अधिक आयाम के दोलन अपनी **स्वाभाविक आवृत्ति** में करता है। इस घटना को अनुनाद कहते हैं।

जब किसी दोलक को उसकी साम्य स्थिति से विस्थापित करके छोड़ दिया जाता है, तो यह अपनी साम्य स्थिति के इधर-उधर दोलन करने लग जाता है जिसकी आवृत्ति कुछ प्राचलों पर निर्भर करती है। आवृत्ति जिससे एक दोलित्र दोलन करता है उसकी **स्वाभाविक आवृत्ति** कहलाती है। जब वस्तु बाह्य आवर्ती गति के प्रभाव में दोलन करता है तो इसके दोलन **प्रणोदित दोलन** कहलाते हैं। **प्रणोदित दोलन** में निकाय अंततोगत्वा बाह्य बल की आवृत्ति से दोलन करने लग जाता है। दोलनकारी निकाय जिस पर दोलन आरोपित किए जाते हैं, **चालित** या **प्रणोदित** और जो दोलनकर्त्ता बल लगाता है, वह **चालक** या **प्रणोदक** कहलाता है। प्रणोदित दोलनों का एक विशेष उदाहरण यह है जबकि चालित और चालक दोनों की स्वाभाविक आवृत्तियाँ समान हों। इसे अनुनाद कहते हैं। अनुनादित दोलनों में चालक व चालित एक दूसरे के आयामों को प्रबल करते हैं और इसलिए उनके आयाम अधिकतम होते हैं।

पाठगत प्रश्न 13.4

1. जब कम्पन (दोलन) करते हुए स्वरित्र की भुजा को मेज पर दबाया जाताहै तो तेज ध्वनि सुनी जाती है, क्या यह घटना अनुनाद प्रदर्शित करती है या प्रणोदित दोलन? अपना उत्तर कारण सहित दीजिए। तेज ध्वनि उत्पन्न होने के क्या कारण है?

2. विशिष्ट संगीत उपकरणों के साथ ध्वनि बाक्स क्यों लगे रहते हैं?

रहस्यमय घटनाएँ और अनुनाद

1940में वांशिगटन, (अमेरिका) टेकोमा नैरोज सस्पेन्शन ब्रिज उद्घाटन के बाद एक आंधी के दौरान छह महीनों में ही ध्वस्त हो गया। झोंके में बहने वाली हवा की आवृत्ति पुल की स्वाभाविक आवृत्ति के बराबर थी। जिसके कारण इस पुल का आयाम बढ़ता चला गया। आयाम बढ़ते-बढ़ते पुल के ढांचे पर इसकी सह्यता-सीमा से अधिक आघात पहुंचने के कारण पुल ध्वस्त हो गया।

झूलने वाले पूल (suspension bridge) के ध्वस्त होने की घटनाएं सैनिकों के कदम से कदम मिलाकर पुल को पार करने (परेड करने) पर भी हैं। इसलिए सैनिकों को पुल पर परेड करते हुए चलनेका आदेश नहीं दिया जाता है।

कारखानों की चिमनियाँ और प्रशीतक मीनारें (cooling towers) भी कभी-कभी हवा के कारण दोलन करती हुई ध्वस्त हो जाती हैं।

2.आपने कुछ गायकों की रहस्यमयी शक्तियों के बारे में सुना होगा। जब वे गाते हैं तो सभागृह की खिड़कियों के शीशे टूट जाते हैं। ये ठीक संगती के उस स्वर में गाते हैं जिसकी आवृत्ति खिड़की के शीशों की स्वाभाविक आवृत्ति से मिलती है।

3.आपको जिज्ञासा होगी कि रेडियो या टेलीविजन में एक ट्यूनर की सहायता से आप एक विशेष स्टेशन कैसे पकड़ लेते हैं? ट्यूनर वास्तव में एक इलैक्ट्रॉनिक दोलित्र है जिसमें आवृत्ति परिवर्तन की व्यवस्था होती है। जब ट्यूनर की आवृत्ति एक विशेष स्टेशन द्वारा उत्सर्जित आवृत्ति से मेल खाती है, तो अनुनाद होता है और एण्टीना उस स्टेशन द्वारा प्रसारित होने वाला कार्यक्रम पकड़ लेता है।

आपने क्या सीखा

- आवर्त गति ऐसी गति है, जिसकी कुछ निश्चित समय अंतरालों के पश्चात पुनरावृत्ति होती है।
- दोलनी गति एक माध्य स्थिति के इर्द-गिर्द होने वाली गति है। सभी दोलनी गतियाँ आवर्ती होती हैं। लेकिन सभी आवर्ती गतियाँ आवश्यक रूप से दोलनी नहीं होती हैं।
- सरल आवर्ती गति एक साम्य स्थिति के इर्द-गिर्द होने वाली गति है जो एक प्रत्यानयन बल के प्रभाव के अन्तर्गत होती है एवं जिसका मान साम्य स्थिति के कण के विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है। इसकी दिशा सदैव माध्यस्थिति की ओर होती है।
- किसी कण को एक दोलन पूरा करने में लगे समय को उसका आवर्तकाल कहते हैं।
- आवृत्ति किसी दोलक द्वारा एक सेकन्ड में पूरे किए गये दोलनों की संख्या होती है।

टिप्पणियाँ

- कलाकोण वह कोण होता है जिसकी ज्या और कोज्या किसी क्षण पर कण की स्थिति व गति की दिशा प्रदर्शित करती है।
- कोणीय आवृत्ति कलाकोण के परिवर्तन की दर होती है। याद रखें $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$ जहाँ ω रेडियन प्रति सेकंड में कोणीय आवृत्ति, ν हट्‌र्ज (Hz) में आवृत्ति और T सेकन्ड में आवर्तकाल है।
- सरल आवर्त गति का समीकरण है:

$$y = a \sin(\omega t + \phi_0)$$

अथवा

$$y = a \cos(\omega t + \phi_0)$$

जहाँ पर y किसी समय t में माध्य स्थिति से विस्थापन है, ϕ_0 ($t = 0$) पर प्रारंभिक कला कोण।

- जब एक दोलन करने वाला पिण्ड बिना किसी बाह्य दोलनी पिण्ड के प्रभाव के स्वयं के दोलन करता है तो उसके दोलन मुक्त दोलन कहलाते हैं। यदि कोई दोलनी पिण्ड A एक बाह्य पिण्ड B जिसे चालक कहते हैं, के द्वारा चालित है और A को यदि B की आवृत्ति से दोलन करने को बाध्य किया जाता है, तब A के दोलनों को प्रणोदित दोलन कहा जाता है। यदि चालक की आवृत्ति चालित की स्वाभाविक आवृत्ति के बराबर हो, तो इस घटना को अनुनाद कहते हैं।

पाठांत प्रश्न

1. आवर्ती और दोलनी गति में भेद कीजिए।
2. सरल आवर्त गति क्या है?
3. निम्न में से कौन-सा फलन प्रदर्शित करता है: (i) एक सरल आवर्त गति (ii) आवर्ती किन्तु सरल आवर्ती नहीं (iii) अनावर्ती गति। प्रत्येक आवर्ती गति का आवर्तकाल बताइए।

   (1) $\sin \omega t + \cos \omega t$ (2) $1 + \omega^2 + \omega t$

   (3) $3 \cos (\omega t - \frac{\pi}{4})$
4. हुक के नियम का पालन करने वाले एक स्प्रिंग से लटके 0.1 kg द्रव्यमान के दोलनों का आवर्तकाल 1 सेकन्ड है तो उस स्प्रिंग से लटके 0.9 kg द्रव्यमान के दोलनों का आवर्तकाल क्या होगा?
5. कलाकोण क्या है? इसका कोणीय आवृत्ति से क्या संबंध है?
6. जब एक सरल आवर्ती दोलित्र का आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ है तो सरल लोलक का आवर्तकाल गोलक के द्रव्यमान पर निर्भर क्यों नहीं करता है?

7. सरल आवर्त गति करते कण के त्वरण का मान कब अधिकतम होता है? कब प्रत्यानयन बल अधिकतम होता है?

8. दिखाइए कि सरल आवर्त गति एकसमान वृत्ताकार गति के वृत्त के किसी व्यास पर प्रक्षेप होती है। सरल आवर्त गति करने वाले दोलित्र के आवर्तकाल के लिए व्यंजक को उसके द्रव्यमान तथा बल नियतांक के पदों में ज्ञात कीजिए।

9. एक सरल आवर्त दोलित्र की तात्कालिक गतिज ऊर्जा, स्थितिज ऊर्जा तथा सम्पूर्ण ऊर्जा के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए।

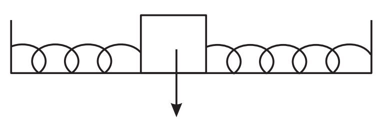
10. आलेख द्वारा दर्शाइए कि किसी सरल आवर्त दोलित्र की स्थितिज ऊर्जा U, गतिज ऊर्जा K व सम्पूर्ण ऊर्जा E उसकी माध्य स्थिति से विस्थापन के साथ किस प्रकार बदलती है?

11. किसी कण के लिए किसी क्षण किसी स्थिर बिन्दु से विस्थापन समीकरण $x = a \cos \omega t + b \sin \omega t$ से दिया जाता है। क्या कण की गति सरल आवर्त गति है? यदि उत्तर नहीं में हैं, तो समझाइए कि ऐसा क्यों है? यदि उत्तर हाँ में है तो दोलन के आयाम और कलाकोण की गणना कीजिए।

12. एक सरल लोलक के दोलनों का आयाम 0.04 मीटर तथा आवर्तकाल 10 सेकन्ड है। इसके अधिकतम वेग की गणना कीजिए।

13. कल्पना कीजिए कि एक गेंद को पृथ्वी के केन्द्र से उसके आर-पार बनाए गए घर्षण रहित सुरंग में डाल दिया जाता है। पृथ्वी की त्रिज्या और गुरुत्वजनित त्वरण के पदों में गेंद के दोलनों के आवर्तकाल की गणना कीजिए।

14. चित्र 13.17 में एक $m = 2$ kg द्रव्यमान का पिण्ड दो कमानियों से जुड़ा हुआ दिखाया गया है जिनमें से प्रत्येक स्प्रिंग का बल नियतांक $k = 400$ न्यूटन/मीटर है। पिण्ड को साम्य स्थिति से 0.05 मीटर विस्थापित करके छोड़ दिया जाता है। गणना कीजिए (a) पिण्ड की कोणीय आवृत्ति (b) इसकी अधिकतम चाल, (c) इसका अधिकतम त्वरण और विरामावस्था में इसके विरूद्ध क्षय हुई कुल ऊर्जा कितनी होगी?



चित्र13.17

पाठगत प्रश्नों के उत्तर

13.1

1. एक गति जो एक निश्चित समय के अन्तराल के बाद दोहराई जाती है, एक आवर्ती गति कहलाती है। इसी प्रकार की गति यदि किसी निश्चित बिंदु के इर्द-गिर्द होती है तो वह दोलनी गति कहलाती है। एक आवर्तगति दोलनी गति हो भी सकती है और नहीं भी हो सकती है, लेकिन दोलनी गति आवर्ती होती है।

2. (ii), (iv), (v);

3. (i) किसी लोलक का किसी साम्य बिंदु के इर्द–गिर्द की गति।

   (ii) अपने कक्ष में किसी ग्रह की गति।

13.2

1. जब गेद को साम्य स्थिति से x विस्थापित किया जाता है, तो उस पर प्रत्यानयन बल = $mg \sin \theta = mg\,\theta = mg\, x/r$. $\therefore \omega = \sqrt{g/r}$.

2. y दूरी नीचे दबाने पर बेलन पर ऊपर की ओर उत्प्लावक बल $y\alpha\sigma g$ लगता है। अतः $\omega^2 = \dfrac{\alpha\sigma g}{m}$ α बेलन की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल और $m = \alpha L\rho$। उत्पलावन के नियम के अनुसार $\alpha h\rho g = \alpha l r g$

   $\Rightarrow \qquad h\rho = \sigma\, l$

   m गुटके का द्रव्यमान अतः $\omega^2 = g/l$ or $T = 2\pi \sqrt{l/g}$.

3. $\omega^2 = k/m$ अतः $v = 1/2\pi \sqrt{k/m}$ स्मरण रहे कि जब द्रव्यमान विस्थापित होता है, तो केवल एक ही बिंदु पर प्रत्यानयन बल लगता है।

13.3

1. गतिज ऊर्जा माध्य स्थिति या साम्य स्थिति में अधिकतम होती है। त्वरण अधिकतम होताहै, जब विस्थापन अधिकतम होता है।

2. जब लोलक दोलन करता है तो यह वायु के श्यान प्रतिरोध एवं अवलंबन के घर्षण की, जिस पर यह लटकाया जाता है, के विरुद्ध कार्य करता है। यह कार्य ऊष्मा के रूप में क्षय होता है इसके परिणामस्वरूप लोलक का आयाम घटता है।

13.4

1. जब एक दोलित्र जिसको चालक कहते हैं, अपने दोलन का बल दूसरे दोलनी निकाय पर लगाता है,तो द्वितीय निकाय प्रथम निकाय की आवृत्ति से दोलन करने के लिये बाध्य होता है, इस परिघटना को प्रणोदित दोलन कहते हैं। प्रणोदित दोलनों की विशिष्ट दशा में जिसमें चालक की आवृत्ति चालित निकाय की आवृत्ति के बराबर हो, उस परिघटना को अनुनाद कहते हैं।

2. मेज की ऊपरी सतह अपनी स्वाभाविक आवृत्ति की अपेक्षा स्वरित्र की आवृत्ति से दोलन करने को बाध्य होती है। इसलिये यह प्रेक्षण प्रणोदित दोलन दर्शाता है। चूंकि एक बड़ा तल दोलन करता है,अतः ध्वनि की तीव्रता बढ़ जाती है।

3. ध्वनि बोर्ड या बॉक्स किसी यंत्र द्वारा उत्पन्न स्वर की आवृत्ति से दोलन करने के लिए बाध्य होता है, चूंकि एक बड़ा क्षेत्र दोलन करता है, इसलिए उत्पन्न स्वर की तीव्रता बढ़ जाती है। और इसकी अवधि घट जाती है।

पाठान्त प्रश्नों के उत्तर

4. 3 s

11. $A = \sqrt{a^2 + b^2}, \theta = \tan^{-1} \frac{a}{b}$

12. $\frac{2}{\pi} \times 10^{-3} \, m s^{-1}$

14. (a) 14.14 s^{-1} (b) 0.6 m s^{-1} (c) 0.3 m s^{-2} (d) 0.5 J