2

सरल रैखिक गति

हम अपने चारों ओर अनेक वस्तुओं को चलते हुए देखते हैं। मनुष्यों, पशुओं, वाहनों को भूमि पर चलते हुए देख सकते हैं। मछली, मेंढक तथा अन्य जलीय पशु जल में तैरते हुए देखे जा सकते हैं। पक्षी एवं वायुयान हवा में गति करते हैं। यद्यपि हमें अनुभव नहीं होता पर जिस पृथ्वी पर हम रहते हैं वह भी अपने अक्ष पर घूमती हुई सूर्य की परिक्रमा करती है। अत: यह बिल्कुल स्पष्ट है कि हम एक गतिमान विश्व में रह रहे हैं। इसलिए अपने चारों ओर के भौतिक विश्व को समझने के लिए गति के बारे में अध्ययन करना बहुत आवश्यक है। यह गति एक रेखा में (1D), एक तल में (2D) या अंतरिक्ष में (3D) हो सकती है। यदि वस्तु की गति केवल एक दिशा में हो तो उसे 'सरल रेखीय गति' कहते हैं। उदाहरणार्थ, सीधी सड़क पर कार का चलना, सीधी रेल की पटरी पर रेल का चलना, मुक्त रुप से गिरती हुई वस्तु की गति, लिफ्ट का चलना तथा सीधे ट्रेक पर धावक का दौड़ना आदि।

इस पाठ में आप सरल रेखीय गति के बारे में अध्ययन करेंगे। आगामी पाठों में आप गति के नियमों, समतल में गति एवं अन्य प्रकार की गतियों का अध्ययन करेंगे। आप अवकलन और समाकलन की संकल्पनाओं के विषय में भी अध्ययन करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ का अध्ययन करने के पश्चात आप

- दूरी एवं विस्थापन तथा चाल एवं वेग में भेद कर सकेंगे;
- अवकलन एवं समाकलन की संकल्पनाओं का अध्ययन कर सकेंगे;
- तात्क्षणिक वेग, सापेक्ष वेग एवं औसत वेग की व्याख्या कर सकेंगे;
- त्वरण एवं तात्क्षणिक त्वरण को परिभाषित कर सकेंगे;
- एकसमान एवं असमान गतियों के वेग–समय आरेख की व्याख्या कर सकेंगे;
- एकसमान त्वरण के साथ गति संबंधी समीकरणों को व्युत्पन्न कर सकेंगे;
- गुरुत्व बल के अन्तर्गत गति का वर्णन कर सकेंगे, एवं
- गति के समीकरणों पर आधारित आंकिक प्रश्नों को हल कर सकेंगे।

2.1 चाल एवं वेग (Speed and Velocity)

आपने अपनी पूर्ववर्ती कक्षाओं में अध्ययन किया है कि किसी वस्तु द्वारा तय किये गए पथ की कुल लंबाई उसके द्वारा ***चलित दूरी*** कहलाती है जबकि वस्तु की आरंभिक और अन्तिम स्थिति के बीच का अंतर ***विस्थापन*** कहलाता है। विस्थापन मूलत: दो स्थितियों के बीच अल्पतम दूरी है, जिसकी एक निश्चित दिशा होती है। इस प्रकार विस्थापन एक सदिश राशि है जबकि दूरी अदिश राशि है। आपने यह भी सीखा होगा कि समय के साथ दूरी में होने वाले परिवर्तन की दर चाल कहलाती है जबकि वस्तु के विस्थापन की दर वेग कहलाती है। एक सरल रेखीय गति में सदिश राशि के दिशा संबंधी पहलूओं को + और – चिह्नों द्वारा दर्शाया जाता है। अत: एकविमीय गति में विस्थापन, वेग एवं त्वरण जैसी सदिश राशियों को निरुपित करने के लिए हमें सदिश संकेतों की आवश्यकता नहीं पड़ती है।

2.1.1 औसत वेग

जब कोई पिंड कोई दूरी अलग-अलग वेगों से चलता हुआ तय करता है तो इसकी गति को औसत वेग द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है। किसी पिंड का औसत वेग विस्थापन-परिवर्तन की दर के रुप में परिभाषित किया जाता है। यदि x_1 एवं x_2 समय t_1 एवं t_2 में पिण्ड की स्थितियाँ हो तो गणितीय रुप से हम औसत वेग को निम्न प्रकार दिखा सकते हैं।

$$\bar{\upsilon} = \frac{\text{विस्थापन}}{\text{विस्थापन में लगा समय}}$$

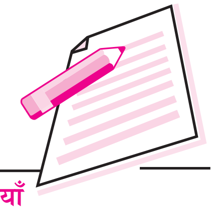
$$= \frac{x_2 - x_1}{t_1 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (2.1)$$

जहाँ स्थिति परिवर्तन $x_2 - x_1$ को Δx से एवं इसके संगत समय परिवर्तन $t_2 - t_1$ को Δt से इंगित किया गया है। यहाँ पर $\bar{\upsilon}$ (वेग के संकेत के ऊपर एक छोटी रेखा) वेग के औसत मान का एक मानक संकेत है। औसत वेग को υ_{av} भी लिखा जा सकता है। किसी वस्तु की औसत चाल प्राप्त करने के लिए उसके द्वारा चली गयी कुल दूरी को यह दूरी चलने में लिए गये कुल समय से विभाजित किया जाता है।

$$\text{अत: औसत चाल} = \frac{\text{तय की गयी कुल दूरी}}{\text{लिया गया कुल समय}} \qquad (2.2)$$

यदि सरल रेखीय गति एक दूरी तय करने में एक निश्चित दिशा में हो तो औसत चाल एवं औसत वेग के परिमाण का मान बराबर होते हैं। लेकिन सदैव ऐसा नहीं होता (देखिये उदाहरण 2.2) निम्न उदाहरणों की सहायता से आप औसत चाल और औसत वेग में अन्तर को समझ पायेंगे।

उदाहरण 2.1 : x-अक्ष के अनुदिश गति कर रहे किसी पिंड की स्थिति का समीकरण $x = 20t^2$ हैं, जहाँ t समय है और इसकी इकाई सेकंड है और स्थिति को x द्वारा निरुपित किया गया है। 3s से 4s के समय-अंतराल में वस्तु के औसत वेग का परिकलन कीजिए।



टिप्पणियाँ

हल : दिया है

$$x = 20t^2$$

ध्यान दें x का मात्रक मीटर और t का मात्रक सेकंड है। इसका अर्थ यह हुआ कि समानुपातांक (20) की विम m s^{-2} है।

हम जानते हैं कि औसत वेग निम्नलिखित संबंध द्वारा प्राप्त होता है।

$$\bar{\upsilon} = \frac{x_2 - x_1}{t_1 - t_1}$$

क्योंकि $t_1 = 3\text{s}$,

$$x_1 = 20 \times (3)^2$$

$$= 20 \times 9 = 180 \text{ m}$$

इसी प्रकार, $t_2 = 4 \text{ s}$

$$x_2 = 20 \times (4)^2$$

$$= 20 \times 16 = 320 \text{ m}$$

$$\therefore \qquad \bar{\upsilon} = \frac{x_2 - x_1}{t_1 - t_1} = \frac{(320 - 180) \text{ m}}{(4 - 3) \text{ s}} = \frac{140 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 140 \text{ ms}^{-1}$$

अत: औसत वेग $= 140 \text{ ms}^{-1}$

उदाहरण 2.2 : एक आदमी 300 मीटर के वृत्ताकार ट्रैक पर दौड़ता है तथा 200 सेकंड में वापस प्रारंभिक स्थान पर आ जाता है। व्यक्ति की औसत चाल और औसत वेग क्या है?

हल : दिया है

ट्रैक की लम्बाई $= 300$ m.

इस लंबाई को तय करने में लगा समय $= 200$ s

अत: औसत चाल $= \dfrac{\text{कुल तय की गयी दूरी}}{\text{दूरी तय करने में लगा समय}}$

$$= \frac{300}{200} \text{ ms}^{-1} = 1.5 \text{ ms}^{-1}$$

क्योंकि आदमी वापस उसी स्थान पर आ जाता है।

अत: विस्थापन = 0, इसलिए औसत वेग भी शून्य हुआ।

ध्यान दें कि उपरोक्त उदाहरण में औसत चाल परिमाण में औसत वेग के बराबर नहीं है। क्या आप कारण जानते हैं?

2.1.2 आपेक्षिक वेग

जब हम यह कहते हैं कि एक बैलगाड़ी 10 किलोमीटर प्रति घंटा की गति से दक्षिण की ओर जा रही है तो इसका अर्थ यह हुआ कि गाड़ी अपने प्रारंभिक स्थान से दक्षिण दिशा की

टिप्पणियाँ

ओर चलती है और 1 घंटे में 10 किलोमीटर की दूरी तय करती है। इसके लिए हमें एक संदर्भ बिंदु की आवश्यकता होती हैं वास्तव में किसी वस्तु का वेग सदैव किसी दूसरी, वस्तु की तुलना में निश्चित किया जाता है। अत: वेग एक सापेक्ष राशि है।

एक वस्तु A एक दूसरी वस्तु B के सापेक्ष अपनी स्थिति बदल रही है। उदाहरण के लिए यदि υ_A और υ_B एक सरल रेखा में चल रहे दो निकायों (वस्तुओं) के वेग हों तो A की तुलना में B का आपेक्षिक वेग $(\upsilon_B - \upsilon_A)$ होगा।

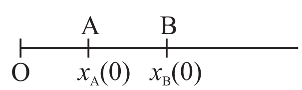
एक वस्तु की आपेक्षिक स्थिति में दूसरी वस्तु के सापेक्ष परिवर्तन दर को दूसरी वस्तु के सापेक्ष पहली वस्तु का आपेक्षिक वेग कहते हैं।

आपेक्षिक वेग का महत्व

एक वस्तु की स्थिति एवं वेग किसी दूसरी वस्तु के सापेक्ष निश्चित किया जाता है। यदि संदर्भ के लिए चुनी गई वस्तु स्थिर हो तो वस्तु की गति का वर्णन आसानी से किया जा सकता है। इस पाठ में आप शुद्धगतिक समीकरणों के बारे में जानेंगे। लेकिन यदि संदर्भ के लिए चुनी गई वस्तु भी गति कर रही हो तो ऐसी स्थिति में क्या होता है? इस प्रकार की गति एक स्थिर प्रेक्षक को द्विनिकाय तंत्र की गति प्रतीत होती है। आपेक्षिक गति की अवधारणा द्वारा इसे आसानी से समझा जा सकता है।

माना दो वस्तुओं A और B की प्रारंभिक स्थितियाँ $x_A(0)$ और $x_B(0)$ हैं। यदि धनात्मक x-अक्ष की ओर वस्तु A वेग υ_A एवं वस्तु B वेग υ_B से गति करती हैं तो t सेकन्ड के पश्चात उनकी स्थितियाँ निम्नवत् होंगी।

$$x_A(t) = x_A(0) + \upsilon_A t$$
$$x_B(t) = x_B(0) + \upsilon_B t$$



अत: B का A से आपेक्षिक पृथकन (दूरी)

$$x_{BA}(t) = x_B(t) - x_A(t) = x_B(0) - x_A(0) + (\upsilon_B - \upsilon_A)\, t$$
$$= x_{BA}(0) + \upsilon_{BA} t$$

जहाँ $\upsilon_{BA} = (\upsilon_B - \upsilon_A)$ A के सापेक्ष B का आपेक्षिक वेग कहलाता है। इस प्रकार आपेक्षिक वेग की अवधारणा के प्रयोग द्वारा द्विनिकायी समस्या को एकल निकायी समस्या में रुपान्तरित किया जा सकता है।

उदाहरण 2.3 : एक रेलगाड़ी A उत्तर से दक्षिण की ओर एक सीधी पटरी पर 60 km h^{-1} की गति से चल रही है। दूसरी रेलगाड़ी 70 km h^{-1} की गति से दक्षिण से उत्तर की ओर आ रही है। A के सापेक्ष B रेलगाड़ी का वेग क्या है?

हल : दक्षिण से उत्तर की दिशा को धनात्मक मान लेने पर हमें प्राप्त होगा

रेलगाड़ी B का वेग $(\upsilon_B) = +\,70$ km h^{-1}

और रेलगाड़ी A का वेग (v_A) = – 60 km h^{-1}

अत: रेलगाड़ी A के सापेक्ष रेलगाड़ी B का वेग

$$= v_B - v_A$$
$$= 70 - (-60) = 130 \text{ km h}^{-1}.$$

उपरोक्त उदाहरण में आपने देखा कि एक रेलगाड़ी के सापेक्ष दूसरी रेलगाड़ी आपेक्षिक वेग उनके संबंधित वेगों के योग के बराबर होता है। इसलिए आपकी रेलगाड़ी से विपरीत दिशा में चलने वाली रेलगाड़ी बहुत तेजी से चल रही प्रतीत होती है। लेकिन यदि दूसरी रेलगाड़ी समान दिशा में चल रही हो तो उसकी गति बहुत धीमी प्रतीत होती है।

2.1.3 त्वरण

बस या कार में यात्रा करते समय आपने ध्यान दिया होगा कि उसकी चाल कभी तेज व कभी धीमी हो जाती है। यानि उसके वेग में परिवर्तन होता रहता है। जैसा कि वेग को स्थिति के परिवर्तन की समय दर से परिभाषित किया जाता है, वैसे ही त्वरण को वेग के परिवर्तन की समय दर से परिभाषित किया जाता है। त्वरण एक सदिश राशि है और इसका मात्रक ms^{-2} है। एक–विमीय गति में त्वरण के लिये किसी सदिश अंकन की आवश्यकता नहीं होती जैसा कि वेग के संदर्भ में बताया जा चुका है।

किसी वस्तु का औसत त्वरण निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

$$\text{औसत त्वरण } (\overline{a}) = \frac{\text{अंतिम वेग} - \text{आरंभिक वेग}}{\text{वेग परिवर्तन के लिये लिया गया समय}}$$

$$\overline{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_1 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (2.3)$$

एक विमीय गति में जबकि त्वरण उसी दिशा में हो जिसमें कि गति या वेग है तो त्वरण की दिशा धनात्मक होती है। त्वरण गति की विपरीत दिशा में भी हो सकता है ऐसी स्थिति में त्वरण को ऋणात्मक माना जाता है। जिसे प्राय: मंदन (retardation) कहा जाता है। अत: हम कह सकते हैं कि त्वरण वेग वृद्धि की समय दर है और मंदन वेग ह्रास की समय दर है।

उदाहरण 2.4 : पूर्व की ओर गतिशील कार का वेग 3s में 0 से 12 ms^{-1} हो जाता है। औसत त्वरण की गणना कीजिए।

हल : दिया है,

$$v_1 = 0 \text{ m s}^{-1}$$
$$v_2 = 12 \text{ m s}^{-1}$$
$$t = 3.0 \text{ s}$$

$$a = \frac{(12.0 \text{ ms}^{-1})}{3.0\text{s}}$$
$$= 4.0 \text{ m s}^{-2}$$

पाठगत प्रश्न 2.1

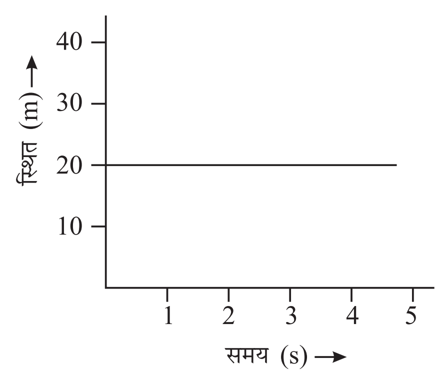
1. क्या यह संभव है कि किसी दिये गये समय अंतराल में किसी गतिशील वस्तु की औसत चाल शून्य न हो लेकिन औसत वेग शून्य हो? यदि हाँ तो इस को उदाहरण द्वारा समझाइये।
2. एक महिला 8 किलोमीटर प्रति घंटा की चाल से बाजार गई। बाजार को बंद पाकर वह अपने घर 10 किलोमीटर प्रति घंटा की चाल से लौट आयी। यदि उसके घर से बाजार 2 किलोमीटर दूर हो उसकी औसत चाल और औसत वेग ज्ञात कीजिए।
3. क्या एक गतिशील वस्तु का दूसरी गतिशील वस्तु की तुलना में आपेक्षिक वेग शून्य हो सकता है? एक उदाहरण दीजिए।
4. एक व्यक्ति एक रेलगाड़ी के अन्दर 1.0 m s^{-1} के वेग से रेलगाड़ी की गति की दिशा में चल रहा है। यदि रेलगाड़ी का वेग 3.0 m s^{-1} हो तो

   (a) रेलगाड़ी में बैठे को व्यक्ति को उसका वेग कितना प्रतीत होगा?

   (b) प्लेटफार्म पर बैठे व्यक्ति के सापेक्ष उस का वेग क्या होगा?

2.2 स्थिति समय ग्राफ (Position - Time Graph)

यदि आप एक गेंद को जमीन पर लुढ़काते हैं तो आप देखेगें कि विभिन्न समय पर गेंद की विभिन्न स्थितियाँ होती हैं। विभिन्न क्षणों और तदनुसार गेंद की विभिन्न स्थितियों की मूल बिंदु से दूरियों को ग्राफ पर प्रकट करने से हमें एक निश्चित रेखा प्राप्त होती है। इस प्रकार की रेखा को स्थिति-समय ग्राफ कहते हैं। सामान्यत: समय x–अक्ष पर दर्शाते हैं और वस्तु की स्थिति y–अक्ष पर दर्शाते हैं।



चित्र. 2.1 : विराम अवस्था में वस्तु का स्थिति-समय ग्राफ

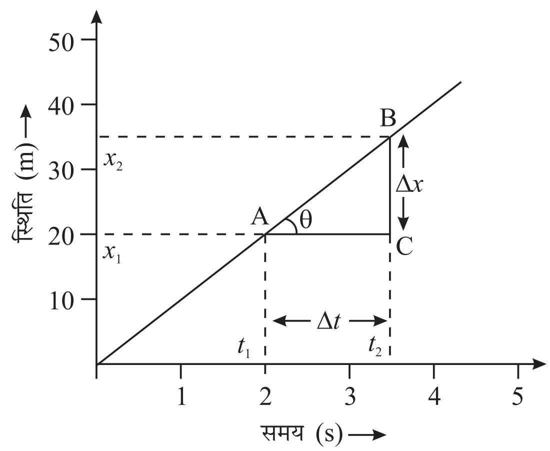
अब हम मूल बिंदु से 20 मीटर दूर विराम अवस्था में वस्तु के लिये एक स्थिति-समय ग्राफ खींचते हैं। वस्तु की स्थिति 1s, 2s, 3s, 4s और 5s के बाद क्या होगी? आप पायेंगे कि आलेख समय अक्ष के समान्तर सीधी रेखा है जैसा चित्र 2.1 में दिखाया गया है।

2.2.1 एकसमान गति के लिये 'स्थिति-समय ग्राफ'

आइये अब हम एक अन्य परिस्थिति पर विचार करें। जिसमें एक वस्तु समान समय अंतराल में समान दूरी तय करती है। उदाहरण के लिये यदि वस्तु प्रत्येक 1 सेकंड में 10 m की दूरी तय करती हैं। यदि हम 5 सेकंड तक हुई गति का अध्ययन करें तो विभिन्न समय पर वस्तु की स्थिति निम्न सारणी के अनुसार दर्शायी जायेगी।

समय (t) सेकन्ड में	1	2	3	4	5
स्थिति (x) मीटर में	10	20	30	40	50

इन आंकड़ों का आलेख बनाने के लिए x–अक्ष पर समय लीजिए जिसमें 1cm को 1 सेकंड मानिए और स्थिति को y–अक्ष पर लीजिए जिसमें 1cm को 10 मीटर के बराबर मानिए। 'स्थिति–समय ग्राफ' चित्र 2.2 के समान होगा।



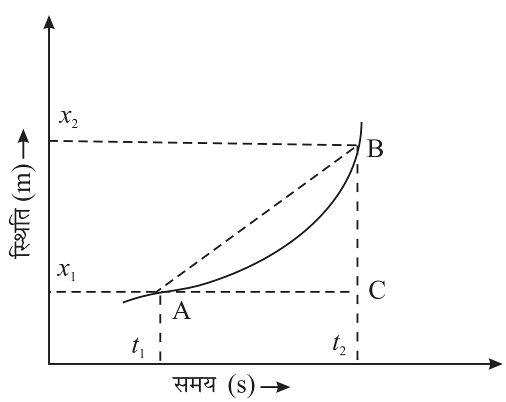
चित्र 2.2 : एक समान गति के लिये स्थिति-समय-ग्राफ

ग्राफ एक सीधी रेखा है जो कि x–अक्ष से एक कोण θ बनाती है। ऐसी गति जिसमें गतिशील वस्तु का वेग अचर रहे एकसमान गति कहलाती है। इसका स्थिति समय ग्राफ समय अक्ष पर झुकी हुई (एक कोण बनाती हुई) सरल रेखा के रुप में होता है।

दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि जब गतिशील वस्तु समान समय अंतराल में समान दूरियाँ तय करती है तो उसकी गति एकसमान गति कहलाती है।

2.2.2 असमान गति के लिये 'स्थिति–समय ग्राफ'

आइये अब हम एक रेलगाड़ी का उदाहरण लें जो एक स्टेशन से चलती है, गति पकड़ती है तथा कुछ अवधि तक एकसमान वेग से चलती है और दूसरे स्टेशन पर रुकने से पूर्व धीमी हो जाती है। इस उदाहरण में आप देखेंगे कि समय के समान अंतरालों में तय की गयी दूरियाँ समान नहीं हैं। इस प्रकार की वस्तुओं के लिये 'स्थिति–समय' ग्राफ' चित्र 2.3 में दिखाया गया है।



चित्र 2.3 : त्वरित गति का सततवक्र के रुप में स्थिति समय ग्राफ

ध्यान दें कि त्वरित गति के लिये 'स्थिति–समय ग्राफ' एक सतत वक्र है। अत: वस्तु वेग में निरंतर परिवर्तन हो रहा है। ऐसी स्थिति में अत्यंत छोटे समय अंतराल में औसत या तात्क्षणिक वेग को परिभाषित करना उपयुक्त है। आइये ऐसा करना सीखें।

टिप्पणियाँ

2.2.3 'स्थिति-समय ग्राफ की व्याख्या

जैसा कि आपने देखा कि विभिन्न गतिशील वस्तुओं का 'स्थिति-समय ग्राफ' विभिन्न हो सकता है। यदि यह समय अक्ष के समान्तर सीधी रेखा है तो आप कह सकते हैं कि वस्तु विराम अवस्था में है। (चित्र 2.1)। लेकिन यदि सीधी रेखा समय अक्ष की ओर झुकी है तो यह दर्शाता है कि चाल एकसमान है (चित्र 2.2)

(a) स्थिति-समय ग्राफ से वेग : 'स्थिति समय ग्राफ की सीधी रेखा का ढाल गतिशील वस्तु का वेग बताता है। ढाल का निर्धारण करने के लिये सरल रेखा पर (चित्र 2.2) कोई दो बिंदु (A और B) चुनिए तथा y–अक्ष तथा x–अक्ष के समान्तर रेखा खींच कर त्रिभुज बनाइये। इस प्रकार वस्तु का औसत वेग निम्नलिखित है।

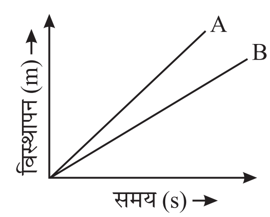
$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} \qquad (2.4)$$

अतः वस्तु का वेग सरल रेखा AB के ढाल के बराबर है।

इससे पता चलता है कि 'स्थिति-समय ग्राफ दर्शाने वाली सीधी रेखा का जितना ढाल ($\Delta x/\Delta t$) होगा उतना ही अधिक वस्तु का वेग होगा। ध्यान रहे कि क्षैतिज रेखा के साथ सरल रेखीय ग्राफ द्वारा बनाए गये कोण की स्पर्शज्या (tangent) उसके ढाल का माप है।

अर्थात् $$\tan\theta = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

ग्राफ पर किन्हीं दो स्थितियों के अन्तराल Δx व संगत समयों के अन्तराल Δt का उपयोग ढाल निकालने और इस प्रकार इस समय अंतराल में औसत वेग का मान प्राप्त करने में किया जा सकता है।

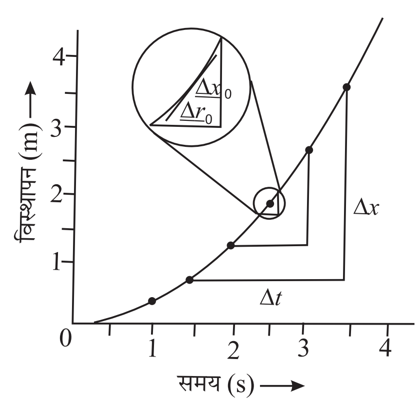


चित्र 2.4 :

उदाहरण 2.5 : दो वस्तुओं A और B का स्थिति-समय ग्राफ चित्र 2.4 में दर्शाया गया है। इनमें से किसका वेग अधिक है?

हल : वस्तु A का वेग अधिक है क्योंकि वस्तु A के लिये ग्राफ का ढाल अधिक है।

(ख) तात्क्षणिक वेग (Instantaneous velocity) : जैसा कि आपने सीखा कि सीधी रेखा में वेग प्रत्येक क्षण समान रहता है लेकिन असमान गति के प्रकरण में 'स्थिति-समय-ग्राफ' वक्र रेखा के रुप में आता है जैसा कि चित्र 2.5 में दर्शाया गया है। चयन किये गये समय अन्तरालों के आकार पर ढाल या औसत वेग भिन्न-भिन्न होता है। इस प्रकार के प्रकरणों में किसी समय या स्थिति में वस्तु का वेग तात्क्षणिक वेग कहलाता है।

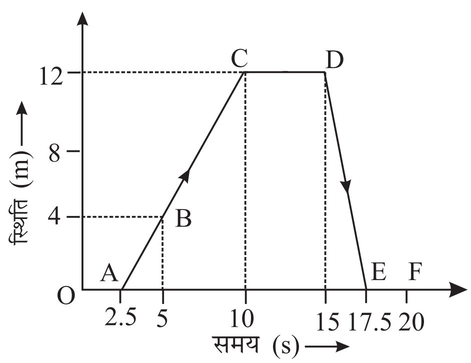


चित्र 2.5 : असमान गति के लिये स्थिति समय वक्र

ध्यान दें कि Δt समय अन्तराल में औसत वेग $\bar{v}$ निम्नवत होता है। $\bar{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$. जब Δt का मान न्यून से न्यून किया जाता है तो औसत वेग क्रमशः तात्क्षणिक वेग के बराबर हो जाता है। $\Delta t \to 0$ सीमा लेने पर उस रेखा का ढाल $\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)$ जो उस बिंदु पर वक्र की स्पर्शज्या होती है तात्क्षणिक वेग बताता है। तथापि एक समान गति के लिये औसत और तात्क्षणिक बराबर होता है।

उदाहरण 2.6 : एक वस्तु की 20 सेकंड तक गति के लिये 'स्थिति समय ग्राफ' चित्र 2.6 में दर्शाया गया हैं बतलाइए कि वस्तु द्वारा निम्नलिखित समय अन्तरालों में कितनी गति से कितनी दूरी तय की गयी?

(i) 0 सेकंड से 5 सेकंड, (ii) 5 सेकंड से 10 सेकंड, (iii) 10 सेकंड से 15 सेकंड, (iv) 15 सेकंड से 17.5 सेकंड? 20 सेकंड के सम्पूर्ण समय काल में वस्तु की औसत चाल क्या होगी?



चित्र 2.6: स्थिति-समय ग्राफ

हल :

i) 0 सेकंड से 5 सेकंड के दौरान तय की गयी दूरी = 4 m

$$\text{चाल} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}} = \frac{4}{5-0} = 0.8\ \text{ms}^{-1}$$

ii) 5 सेकंड से 10 सेकंड के दौरान तय की गयी दूरी = 12 – 4 = 8 m

$$\text{चाल} = \frac{12-4}{10-5} = \frac{8}{5} = 1.6\ \text{ms}^{-1}$$

iii) 10 से 15 सेकंड के दौरान तय की गयी दूरी = 12 – 12 = 0

$$\therefore \text{चाल} = \frac{0}{5} = 0$$

iv) 15 सेकंड से 17.5 सेकंड के दौरान तय की गयी दूरी = 12 m

$$\therefore \text{चाल} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}} = \frac{12\ \text{m}}{2.5\ \text{s}} = 4.8\ \text{m s}^{-1}$$

अब आप अपनी प्रगति जाँचने के लिये निम्न प्रश्नों को हल कीजिए।

टिप्पणियाँ

पाठगत प्रश्न 2.2

1. शून्य त्वरण की गति के लिये 'स्थिति-समय ग्राफ' बनाइए।
2. निम्नलिखित चित्र में दो विद्यार्थियों A और B का विस्थापन-समय ग्राफ दर्शाया गया है जो अपने विद्यालय से चलते हैं और अपने घर पहुँचते हैं। ग्राफों को ध्यान से देखें और निम्न प्रश्नों के उत्तर दें।

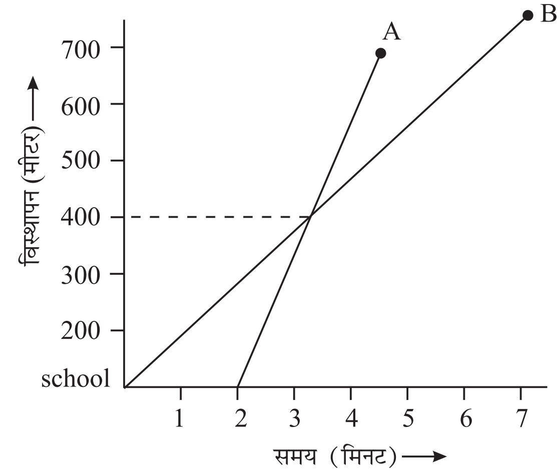
(i) क्या वे एक ही समय विद्यालय से चलते हैं?

(ii) कौन विद्यालय से अधिक दूरी पर रहता है?

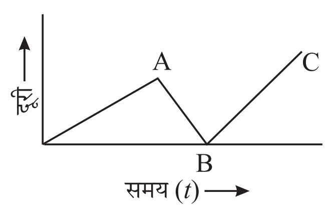
(iii) क्या दोनों अपने-अपने घर एक ही समय पर पहुँचते हैं?

(iv) कौन अधिक तेज चलता है?

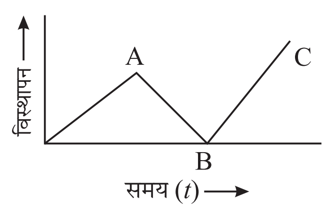
(v) वे विद्यालय से कितनी दूरी पर एक दूसरे को पार करते हैं?



3. किन परिस्थितियों में औसत वेग तात्क्षणिक वेग के बराबर होता है?
4. निम्न ग्राफ में से कौन सा संभव नहीं है? कारण सहित उत्तर दीजिए।



(a)



(b)

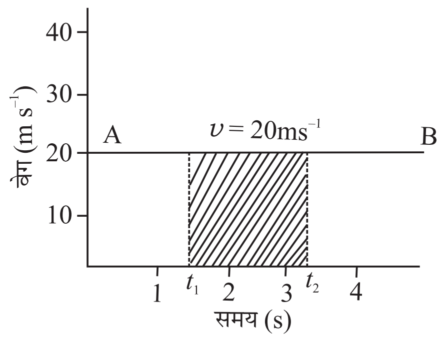
2.3 वेग-समय ग्राफ

स्थिति-समय ग्राफ की भाँति हम वेग-समय ग्राफ बना सकते हैं? वेग-समय ग्राफ बनाने के लिए सामान्यत: समय को x-अक्ष तथा वेग को y-अक्ष पर लिया जाता है।

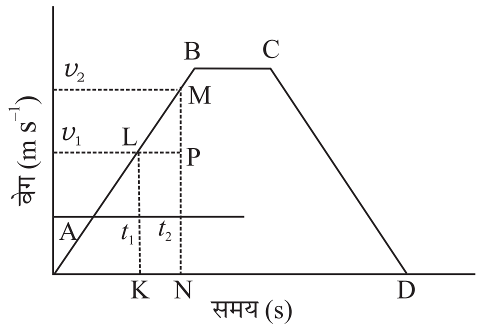
2.3.1 एकसमान गति के लिये वेग-समय ग्राफ

जैसा कि आप जानते हैं कि सरल रखीय एकसमान गति में वस्तु का वेग अचर रहता है अर्थात् समय में परिवर्तन के साथ वेग में कोई परिवर्तन नहीं होता। इस प्रकार की एकसमान गति

के लिये वेग-समय ग्राफ समय अक्ष के समान्तर सरल रेखा के रुप में होता है। जैसा कि चित्र 2.6 में दर्शाया गया है।



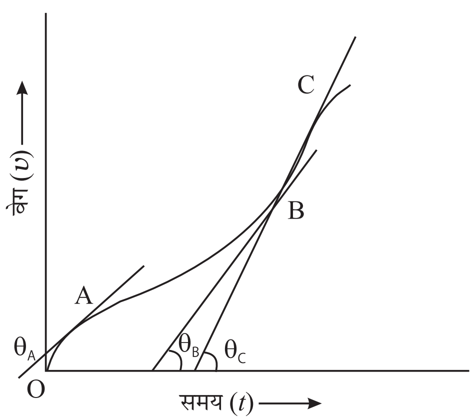
चित्र 2.6 : समान गति के लिये वेग समय ग्राफ



चित्र 2.7 : अचर त्वरण वाली तीन स्थितियों के लिये वेग-समय ग्राफ

2.3.2 असमान गति के लिये वेग-समय आलेख

यदि समय के साथ वस्तु का वेग समान रुप से बदलता है तो त्वरण एकसमान रहता है। इस प्रकार की गतिशील वस्तु के लिये वेग-समय ग्राफ सरल रेखा के रुप में होता है जैसा कि समय अक्ष की ओर झुका रहता है जैसा कि चित्र 2.7 में सरल रेखा AB द्वारा दर्शाया गया है। ग्राफ से स्पष्ट है कि एकसमान समय अंतरालों में समान परिमाणों से वेग बढ़ता है। वस्तु का औसत त्वरण निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है।



चित्र 2.8 : विभिन्न त्वरण के साथ गति के लिये वेग-समय ग्राफ

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\text{MP}}{\text{LP}}$$

= सरल रेखा का ढाल

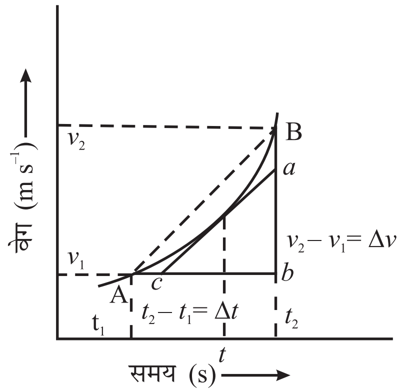
क्योंकि सरल रेखा का ढाल स्थिर रहता है। अत: वस्तु का त्वरण अचर रहता है। यद्यपि असमान गति के ऐसे प्रकरण हो सकते हैं जिनमें वेग परिवर्तन की दर अचर न हो। इस प्रकार की स्थिति में वेग-समय ग्राफ का ढाल प्रत्येक क्षण भिन्न होगा जैसा कि चित्र 2.8 में दिखाया गया है। यह देखा जा सकता है कि विभिन्न बिंदुओं A, B और C पर θ_A, θ_B और θ_C के मान अलग-अलग हैं।

2.3.3 वेग-समय ग्राफ की व्याख्या

वेग-समय ग्राफ की सहायता से हम वस्तु द्वारा तय की गयी दूरी और विभिन्न क्षणों में वस्तु का त्वरण भी निर्धारित कर सकते हैं। आईए देखें हम ऐसा किस प्रकार कर सकते हैं।

टिप्पणियाँ

(a) वस्तु द्वारा तय की गयी दूरी का निर्धारण: चित्र 2.7 में दर्शाये गये वेग-समय ग्राफ पर पुनः विचार करें। इस ग्राफ में AB भाग अचर त्वरण के साथ गति दर्शाता है जबकि CD भाग अचर मंदित-गति दर्शाता है। भाग BC एकसमान गति दर्शाता है।



चित्र. 2.9 : असमान त्वरण की गति का वेग-समय ग्राफ

समान गति से चलती हुई वस्तु द्वारा t_1 से t_2 समय के बीच चली गयी दूरी $s = \upsilon\,(t_2 - t_1) =$ t_1 व t_2 अंतराल के बीच वक्र तथा समय अक्ष के बीच का क्षेत्रफल (चित्र 2.6)।

इस परिणाम के व्याप्तिकरण द्वारा चित्र 2.7 के लिये हम पाते हैं कि t_1 व t_2 के बीच के समय-अंतराल में चली गयी दूरी

s = समलम्ब चतुर्भुज KLMN का क्षेत्रफल

$$= (½) \times (KL + MN) \times KN$$

$$= (½) \times (\upsilon_1 + \upsilon_2) \times (t_2 - t_1)$$

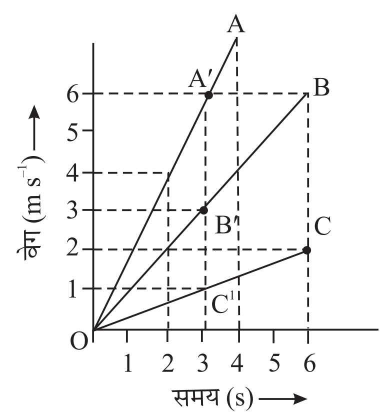
(b) वस्तु के त्वरण का निर्धारण : हम जानते हैं कि किसी वस्तु की समय के साथ वेग परिवर्तन की दर को त्वरण कहते हैं। यदि आप चित्र 2.9 में वेग समय ग्राफ का अवलोकन करें तो AB चाप की ढाल द्वारा औसत त्वरण दर्शाया गया है। जो निम्न प्रकार व्यक्त किया गया है।

औसत त्वरण $(\bar{a}) = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$.

यदि समय-अंतराल को अत्यधिक न्यून कर दिया जाय तो औसत त्वरण तात्क्षणिक त्वरण बन जाता है। अतः तात्क्षणिक त्वरण,

$a = \underset{\Delta t \to 0}{\text{limit}} \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{dv}{dt}$ = समय t के संगत बिन्दु पर स्पर्श रेखा का ढाल

अतः वेग-समय आलेख के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा का ढाल $= \dfrac{ab}{bc}$, उस बिंदु या समय पर त्वरण का परिमाण प्रदान करता है।



चित्र. 2.9(a) : सम त्वरण युक्त तीन भिन्न वस्तुओं की गति का वेग-समय ग्राफ

उदाहरण 2.7 : तीन वस्तुओं A, B और C के लिये वेग समय ग्राफ चित्र 29.a में दर्शाये गये हैं।

(i) इनमें से किसका सबसे अधिक त्वरण है तथा वह कितना है?

(ii) पहले 3 सेकंड में इन वस्तुओं द्वारा तय की गयी दूरी की गणना कीजिए।

(iii) इन तीन वस्तुओं में से कौन अपनी पूरी यात्रा में अधिकतम दूरी तय करता है?

(iv) 2 सेकंड के क्षण में तीनों वस्तुओं के वेग क्या-क्या हैं।

हल :

(i) क्योंकि $\upsilon - t$ ग्राफ का ढाल त्वरण प्रदान करता है और वस्तु A के लिये $\upsilon - t$ ग्राफ का ढाल अधिकतम है। अतः इसका त्वरण अधिकतम है और इसका मान

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{6-0}{3-0} = \frac{6}{3} = 2 \text{ m s}^{-2}.$$

(ii) वस्तु द्वारा तय की गयी दूरी υ-t ग्राफ के क्षेत्रफल के बराबर होती है। पहले 3 सेकन्ड में

A द्वारा तय की गयी दूरी = Area OA′L

$= (½) \times 6 \times 3 = 9$ m.

B द्वारा तय की गयी दूरी = क्षेत्रफल OB′L

$= (½) \times 3 \times 3 = 4.5$ m.

C द्वारा तय की गयी दूरी $= (½) \times 1 \times 3 = 1.5$ m.

(iii) यात्रा पूरी होने पर B द्वारा तय की गयी अधिकतम दूरी

$= (½) \times 6 \times 6 = 18$ m.

(iv) क्योंकि प्रत्येक वस्तु के लिए υ-t ग्राफ सरल रेखा है, अतः तात्क्षणिक त्वरण औसत त्वरण के बराबर है। दो सेकंड पर,

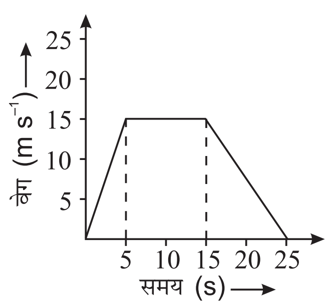
A का वेग $= 4 \text{ m s}^{-1}$

B का वेग $= 2 \text{ m s}^{-1}$

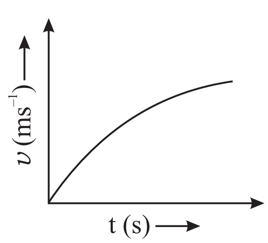
C का वेग $= 0.80 \text{ m s}^{-1}$ (लगभग)

पाठगत प्रश्न 2.3

1. एक सरल रेखा में चलते हुए कण की गति संलग्न $\upsilon - t$ ग्राफ में दर्शायी गयी है। (i) वेग, त्वरण एवं चली गयी दूरी के संदर्भ में ग्राफ का वर्णन करो (ii) औसत चाल का मान ज्ञात करो।

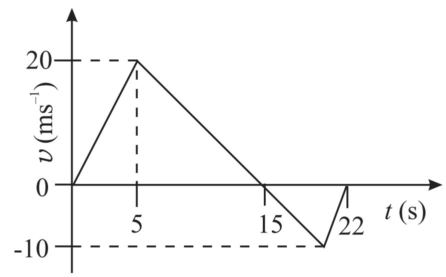


2. संलग्न वक्र किस प्रकार की गति को दर्शाता है– एकसमान गति, त्वरित गति या मंदित? व्याख्या करें।



टिप्पणियाँ

3. संलग्न $v-t$ ग्राफ को प्रयोग करते हुए 0.22 सेकन्ड समय अन्तराल के लिये (i) कण का औसत वेग (ii) कण की औसत चाल ज्ञात करें। कण सतत रुप से सरल रेखीय गति कर रहा है।



2.4 गति के समीकरण

जैसा कि आप जानते हैं कि वस्तु की गति का वर्णन करने के लिए हम भौतिक राशियों जैसे दूरी, वेग और त्वरण का उपयोग करते हैं। गति के समीकरणों की सहायता से स्थिर त्वरण की स्थिति में वेग व तय की गयी दूरी संबंधी गणनाएं की जा सकती हैं। ये उपयोग में आसान हैं और इनके अनेक अनुप्रयोग हैं।

2.4.1 एक समान गति का समीकरण

इस समीकरण की व्युत्पत्ति के लिये हम प्रारंभिक समय t_1 को शून्य लेते हैं, अर्थात् $t_1 = 0$ अब हम यह मान सकते हैं कि $t_2 = t$ बीता हुआ समय है। वस्तु की प्रारंभिक स्थिति ($x_1 = x_0$) और समय t पर वे x_2 व υ_2 के बजाय x व υ कहलाये जायेंगे। समीकरण 2.1 के अनुसार समय t के दौरान औसत वेग निम्नलिखित होगा

$$\bar{\upsilon} = \frac{x - x_0}{t}. \qquad (2.4)$$

2.4.2 एक समान त्वरण युक्त गति का पहला समीकरण

यदि त्वरण ज्ञात हो तो गति का पहला समीकरण एक निश्चित समय के बाद वस्तु के वेग को निर्धारित करने में सहायता करता है। जैसा आपको परिभाषा द्वारा ज्ञात है कि

$$\text{त्वरण } (a) = \frac{\text{वेग में परिवर्तन}}{\text{लिया गया समय}} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

$$a = \frac{v - v_0}{t} \qquad (2.5)$$

अथवा

$$\upsilon = \upsilon_0 + at \qquad (2.6)$$

यह गति का पहला समीकरण कहलाता है। यहाँ υ_0 वस्तु का प्रारंभिक ($t = 0$ पर) वेग है एवं υ क्षण t पर वेग है।

उदाहरण 2.8 : यदि एक कार विश्रामावस्था से 10 m s^{-2} के त्वरण के साथ चलती है तो 5 सेकंड बाद इसका वेग कितना होगा?

हल : दिया है

प्रारंभिक वेग $v_0 = 0$

त्वरण $a = 10 \text{ m s}^{-2}$

समय $t = 5 \text{ s}$

गति के पहले समीकरण का उपयोग करने पर,

$$v = v_0 + at$$

समय $t = 5\text{s}$ के बाद वेग

$$v = 0 + (10 \text{ m s}^{-2}) \times (5 \text{ s})$$
$$= 50 \text{ m s}^{-1}$$

2.4.3 स्थिर (अचर) त्वरण वाली गति का दूसरा समीकरण

गति के दूसरे समीकरण का उपयोग अचर त्वरण a से चल रही वस्तु की समय t के बाद की स्थिति का परिकलन करने के लिए किया जाता है।

माना $t = 0$ पर $x_1 = x_0$;

$v_1 = v_0$ और $t = t$ पर $x_2 = x$ और $v_2 = v$

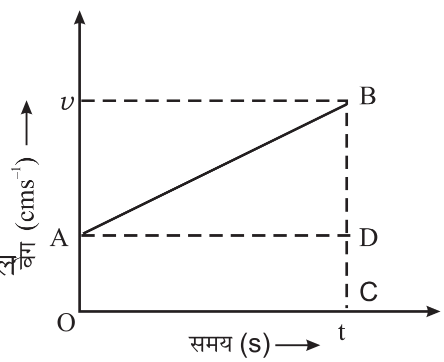
अतः तय की गयी दूरी

$= v - t$ ग्राफ के नीचे का क्षेत्रफल

= समलम्ब चतुर्भुज OABC का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}(\text{CB} + \text{OA}) \times \text{OC}$$

$$x - x_0 = ½ (v + v_0)\, t \text{ ....} \quad (2.7)$$



चित्र 2.10 : समान रुप से त्वरित गति के लिये v–t ग्राफ

क्योंकि $v = v_0 + at$ औसत $v = \dfrac{v - v_0}{2}$ .... (2.8)

$$= v_0 t + ½\, at^2$$

अथवा $$x = x_0 + v_0 t + ½\, at^2 \quad (2.9)$$

उदाहरण 2.9 : एक कार A सीधी सड़क पर 60 km h^{-1} की एकसमान चाल से जा रही है। दूसरी कार उसके पीछे 70 km h^{-1} के एकसमान के वेग से चल रही है। इन दोनों के बीच जब 2.5 km की दूरी रह गयी तो कार B में 20 km h^{-1} का मंदन किया गया। कितनी दूरी और कितने समय में कार B कार A को पकड़ लेगी?

हल : मान लो B कार A कार को t– समय के बाद x–दूरी पर पकड़ लेती है। तब

कार A द्वारा t–समय में तय की गयी दूरी $x' = 60 \times t$.

टिप्पणियाँ

कार B द्वारा t समय में तय की गयी दूरी

$$x = x_0 + v_0 t + ½\, at^2$$
$$= 0 + 70 \times t + ½\,(-20) \times t^2$$
$$x' = 70\,t - 10\,t^2$$

लेकिन दो कारों के बीच की दूरी $x - x' = 2.5$

$$(70\,t - 10\,t^2) - (60\,t) = 2.5$$

या $$10\,t^2 - 10\,t + 2.5 = 0$$

इससे t का मान

$t = ½$ मान रखकर ½ घंटा प्राप्त होता है। समीकरण हल करने पर

$$x = 70t - 10t^2$$
$$= 70 \times ½ - 10 \times (½)^2$$
$$= 35 - 2.5 = 32.5 \text{ km.}$$

2.4.4 अचर त्वरण वाली गति का तीसरा समीकरण

इस समीकरण का उपयोग उस स्थिति में किया जाता है जब वस्तु का त्वरण, स्थिति और प्रारंभिक वेग ज्ञात हो तथा अंतिम वेग अपेक्षित हो, लेकिन समय t ज्ञात न हो,

समीकरण (2.7) को हम निम्न प्रकार लिख सकते हैं।

$$x - x_0 = ½\,(v + v_0)\,t$$

समीकरण (2.6) के अनुसार

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

समीकरण 2.7 में t का मान प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है।

$$x - x_0 = ½\,(v + v_0)\left(\frac{v - v_0}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 2a\,(x - x_0) = v^2 - v^0$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = v_0^2 + 2a\,(x - x_0) \qquad (2.8)$$

यह गति का तीसरा समीकरण है।

अतः अचर त्वरण के लिये गति के तीन समीकरण इस प्रकार हैं।

$$v = v_0 + at$$
$$x = x_0 + v_0 t + ½\, at^2$$

और $$v^2 = v_0^2 + 2a\,(x - x_0)$$

टिप्पणियाँ

उदाहरण 2.10 : एक मोटर साइकिल सवार एक सीधी सड़क पर $4\ m\ s^{-2}$ के अचर त्वरण से जा रहा है। प्रारंभ में वह 5 मीटर की दूरी पर था और उसका वेग $3\ m\ s^{-1}$ था तो

(i) समय $t = 2s$ पर स्थिति और वेग बताइए

(ii) मोटर साइकिल सवार की स्थिति बताइए जब उसका वेग $5\ m\ s^{-1}$ हो।

हल : दिया गया है

$$x_0 = 5m,\ \upsilon_0 = 3m\ s^{-1},\ a = 4\ m\ s^{-2}.$$

समीकरण (2.7) का उपयोग करने पर

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + ½\, at^2 = 5 + 3 \times 2 + ½ \times 4 \times (2)^2 = 19\ m$$

समीकरण 2.6 से

$$\upsilon = \upsilon_0 + at = 3 + 4 \times 2 = 11\ m\ s^{-1}$$

$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2a\,(x - x_0)$ का उपयोग करने पर

$$(5)^2 = (3)^2 + 2 \times 4 \times (x - 5) \text{ से हमें}$$

$$x = 7 \text{ मीटर प्राप्त होता है।}$$

अतः मोटरसाइकिल सवार की स्थिति $(x) = 7$ m.

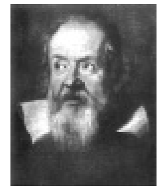
2.5 गुरुत्वाधीन गति

आपने देखा होगा कि जब हम किसी वस्तु को ऊपर की दिशा में फेंकते हैं या किसी ऊँचाई से पत्थर गिराते हैं तो दोनों ही स्थितियों में वे पृथ्वी की ओर आते हैं। क्या आप जानते हैं कि वे पृथ्वी पर क्यों आ जाते हैं और वे किस प्रकार का पथ अपनाते हैं। यह उन वस्तुओं पर लगने वाले पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण बल के कारण होता है। गुरुत्व के प्रभाव के अन्तर्गत होने वाली इस प्रकार की गतियाँ एक सीधी दिशा या सीधी रेखा में होती हैं। पृथ्वी की ओर किसी वस्तु का स्वतंत्र रुप से गिरना अचर त्वरण (लगभग) के साथ गति का एक सर्वाधिक सामान्य उदाहरण हैं। वायु प्रतिरोध की अनुपस्थिति में यह देखा गया है कि सभी वस्तुएँ चाहे उनका साइज या द्रव्यमान कुछ भी हो पृथ्वी की सतह पर समान त्वरण के साथ गिरती हैं। यद्यपि गुरुत्व जनित त्वरण का मान ऊँचाई के साथ परिवर्तित होता है लेकिन पृथ्वी की त्रिज्या की तुलना में नगण्य दूरियों के लिये इस परिवर्तन को नगण्य मान लिया जाता है और गति की अवधि में इसका मान स्थिर रहता है। इसके व्यावहारिक उपयोग के लिये वायु प्रतिरोधकता एवं ऊँचाई के साथ त्वरण में भिन्नता का प्रभाव नगण्य लिया जाता है।

गुरुत्व के कारण स्वतंत्र रुप से गिरती वस्तु के त्वरण को 'g' से दर्शाते हैं। पृथ्वी की सतह पर इसका परिमाण लगभग $9.8\ m\ s^{-2}$ ऊँचाई और अक्षांशों में परिवर्तन के कारण इसकी भिन्नता और अधिक परिशुद्ध मानों का विस्तृत विवेचन इस पुस्तिका के पाठ 5 में किया जायेगा।

टिप्पणियाँ

गैलीलियो (1564–1642)



इनका जन्म पीसा, इटली में 1564 में हुआ था, इन्होंने गिरती हुई वस्तुओं के नियमों का प्रतिपादन किया। इन्होंने एक दूरबीन बनाई तथा उसे खगोलीय प्रेक्षणों के लिए उपयोग किया। "डायलॉग्स अबाउट टू ग्रेट सिस्टम ऑफ दि वर्ल्ड " और "कन्वर्सेसन्स कंसरनिंग द न्यू साइंसेज" इनकी महान कृतियाँ हैं। इन्होंने इस विचार का अनुमोदन किया कि पृथ्वी सूर्य की परिक्रमा करती है।

उदाहरण 2.11 : एक पत्थर को 50 m की ऊँचाई से गिराया जाता है और यह स्वतंत्र रुप से गिरता है। निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए:

(i) 2s में तय की गयी दूरी

(ii) पृथ्वी पर पहुँचने पर पत्थर का वेग

(iii) गिरने के 3 सेकन्ड बाद वेग

हल : दिया गया है

ऊँचाई (h) = 50 m और प्रारंभिक वेग $\upsilon_0 = 0$

प्रारंभिक स्थिति (y_0) को शून्य तथा मूल बिंदू '0' पर मानें। अत: इसके नीचे y–अक्ष (ऊर्ध्वाधर अक्ष) ऋणात्मक होगी। चूँकि त्वरण ऋणात्मक y–अक्ष की दिशा में नीचे की ओर है।

अत: $a = -g = -9.8\ \text{ms}^{-2}$.

(i) समीकरण 2.9 का उपयोग करने पर

$$y = y_0 + \upsilon_0 t + ½\, at^2$$

हमें प्राप्त होता है:

$$y = 0 + 0 - ½\, gt^2 = -½ \times 9.8 \times (2)^2$$
$$= -19.6\ \text{m}.$$

ऋणात्मक चिन्ह दर्शाता है कि दूरी मूल बिंदु से नीचे की ओर अधोगामी दिशा में है।

(ii) पृथ्वी पर $y = -50$ m

समीकरण 2.9 को उपयोग करने से

$$\upsilon^2 = v_0^2 + 2a\,(y - y_0)$$
$$= 0 + 2\,(-9.8)\,(-50 - 0)$$
$$\upsilon = 9.9\ \text{m s}^{-1}$$

(iii) समीकरण $\upsilon = \upsilon_0 + at$ का उपयोग करने पर, जहाँ $t = 3\text{s}$ है

$$\therefore \quad \upsilon = 0 + (-9.8) \times 3$$
$$\upsilon = -29.4\ \text{m s}^{-1}$$

यह दर्शाता है कि $t = 3$ s पर पत्थर का वेग 29.4 m s^{-1} है और यह अधोगामी दिशा में है। अब एक विराम के बाद निम्नलिखित प्रश्नों को हल करें।

टिप्पणी : यहाँ यह बात ध्यान देने योग्य है कि गति के समीकरणों में हम चिह्नों की एक परिपाटी का उपयोग करते हैं जिसके अनुसार ऊर्ध्व एवं दक्षिणवर्ती दिशाओं में राशियों को धनात्मक एवं अधोमुखी एवं वामवर्ती दिशाओं में राशियों को ऋणात्मक मान लिया जाता है।

2.6 अवकलन एवं समाकलन की संकल्पनाएं

भौतिकी के नियमों की व्याख्या और बोध के लिए तथा विभिन्न भौतिक राशियों के बीच संबंध प्राप्त करने में गणित की सभी शाखाओं ने अत्यन्त उपयोगी साधनों का काम किया है। इस संबंध में बीजगणित ओर त्रिकोणमिति के उपयोग से आप पहले से ही परिचित हैं। भौतिकी के आगे के अध्ययन में आपको अवकलन एवं समाकलन के उपयोग से संबंधित समस्याएं मिलेंगी। इसलिए अवकलन एवं समाकलन की संकल्पनाओं का एक संक्षिप्त विवरण दिया जा रहा है। इन संकल्पनाओं के और गहन अध्ययन के लिए आप गणित की पुस्तकों का अवलोकन कर सकते हैं।

इस विषय का अध्ययन करते समय आपको निम्नलिखित पद मिलेंगे। आइए इनकी परिभाषा जानें

अचरांक: यह एक ऐसी राशि है जिसका मान गणितीय संक्रियाओं के दौरान नहीं बदलता। उदाहरण: 1, 2, 3....जैसे पूर्णांक, भिन्नें, π, e, आदि।

चर: यह एक ऐसी राशि है जो गणितीय संक्रियाओं के दौरान अलग-अलग मान ग्रहण कर सकती हैं। चर को प्राय: x, y, z आदि द्वारा निरूपित किया जाता है।

फलन: यदि 'x' के प्रत्येक मान के संगत 'y' का एक निश्चित मान हो तो 'y' को हम 'x' का फलन कहते हैं।

गणित में हम इसे नीचे दिए अनुसार निरूपित करते हैं–

$$y = f(x)$$

अर्थात y चर x का फलन है।

अवकलन गुणांक–किसी चर 'x' के सापेक्ष चर 'y' का अवकलन गुणांक 'y' में 'x' के सापेक्ष आने वाले तात्क्षणिक परिवर्तन की दर है।

माना कि 'y' चर 'x' का फलन है, अर्थत $y = f(x)$, माना कि x के मान में अत्यल्प वृद्धि δx की जाती है तो y में इसके संगत अत्यल्प वृद्धि δy होती है। तब $y + \delta y$ भी $(x + \delta x)$ का फलन होगा।

अथवा $$y + \delta y = f(x + \delta x)$$

अथवा $$\delta y = f(x + \delta x) - y$$

टिप्पणियाँ

अथवा $$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$$

राशि $\frac{\delta y}{\delta x}$ संवृद्धि अनुपात कहलाता है तथा x एंव $(x + \delta x)$ के परिसर में x के सापेक्ष y में परिवर्तन की औसत दर को निरूपित करता है। x के सापेक्ष y में परिवर्तन की तात्क्षणिक दर ज्ञात करने के लिए हमें $\frac{\delta y}{\delta x}$ का सीमान्त मान δx के शून्य होते हुए $(\delta x \to 0)$ मान के लिए ज्ञात करना होगा।

अर्थात् $$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$$

अतः x के सापेक्ष y में परिवर्तन की दर का तात्क्षणिक मान होगा $\lim\limits_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$. यह x के सापेक्ष y का अवकलन गुणांक कहलाता है और इसे हम $\frac{dy}{dx}$ से निरूपित करते हैं।

समाकलन

समाकलन अवकलन की व्युत्क्रम गणितीय संक्रिया है। इस संकल्पना को समझने के लिए, माना कि पिंड पर एक नियत बल **F** लगता है जिसके कारण यह x दूरी तय करता है। तब बल द्वारा किया गया कार्य गुणनफल $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$ द्वारा ज्ञात किया जाता है।

परन्तु यदि बल परिवर्तनशील हो तो साधारण बीजगणित का उपयोग करके किए गए कार्य का परिकलन नहीं किया जा सकता।

उदाहरण के लिए यदि किसी पिंड को पृथ्वी की सतह से बहुत ऊपर ले जाना हो तो जैसे-जैसे पिंड ऊपर जाता है इस पर गुरुत्व का बल परिवर्तित होता है। इस तरह के प्रकरण में कार्य के परिकलन के लिए समाकलन विधि का उपयोग करते हैं।

परिवर्तनशील बल द्वारा किए गए कार्य के परिकलन के लिए (देखिए, अनुभाग 6.2 परिवर्ती बल द्वारा किया गया कार्य)

कृत कार्य, $$W = \Sigma F(x)\Delta x$$

Δx के अत्यल्प मान के लिए

$$W = \sum_{\lim \Delta x \to 0} F(x)\,dx$$

इसको लिख सकते हैं

$$W = \int F(x)\,dx$$

यह व्यंजक x के सापेक्ष फलन $F(x)$ का समाकल कहलाता है। संकेत '$\int$' समाकलन निर्दिष्ट करता है।

प्रायः उपयोग में आने वाले समाकलन एवं अवकलन के कुछ सूत्र

(i) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ (for n $\neq 1$)	(i) $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
(ii) $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \log x$	(ii) $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$
(iii) $\int dx = \int x^0 dx = \frac{x^1}{1} = x$	(iii) $\frac{d}{dx}(x) = 1$
(iv) $\int cxdx = c\int xdx$ (c अचरांक है)	(iv) $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{d}{dx}(u)$
(v) $\int (u \pm v \pm w)dx = \int udx \pm \int vdx \pm \int wdx$	(v) $\frac{d}{dx}(u \pm v \pm w) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx}$
(vi) $\int e^x dx = e^x$	(vi) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
(vii) $\int \sin xdx = -\cos x$	(vii) $\frac{d}{dx}\{\sin(x)\} = +\cos x$
(viii) $\int \cos xdx = \sin x$	(viii) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
(ix) $\int \sec^2 xdx = \tan x$	(ix) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec x$
(x) $\int \text{cosec}^2 xdx = -\cot x$	(x) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\text{cosec}^2 x$

इस सारणी को ध्यान से देखेंगे तो आपको यह स्पष्ट हो जाएगा कि समाकलन और अवकलन एक दूसरे की व्युत्क्रम संक्रियाएं हैं।

कुछ देर रुकिए और नीचे लिखे प्रश्नों को हल कीजिए।

पाठगत प्रश्न 2.4

1. एक वस्तु विराम अवस्था से प्रारंभ करके अचर त्वरण के साथ 4 सेकन्ड में 40 मीटर की दूरी तय करती है। इसका अंतिम वेग ज्ञात कीजिये तथा कुल दूरी का आधा भाग तय करने के लिये आवश्यक समय बताइए।
2. एक कार एक सड़क पर 5 मीटर/सेकन्ड के अचर त्वरण के साथ चल रही है। प्रारंभ में 5 मीटर पर उसका वेग 3 मीटर/सेकंड था। 2 सेकंड के बाद इसकी स्थिति और वेग की गणना कीजिए।

टिप्पणियाँ

3. एक वस्तु को ऊर्ध्वाधर दिशा में किस वेग से फेंका जाय कि वह 25 मीटर की ऊँचाई तक पहुँचे। यह भी बताइए कि वह कितने समय तक वायु में रहेगी।

4. एक गेंद ऊपर की ओर हवा में फेंकी गयी। उसका त्वरण फेंकते समय अधिक होगा या फेंकने के कुछ समय बाद।

आपने क्या सीखा

- एक वस्तु के विस्थापन एवं तदनुरुप समय अंतराल का अनुपात औसत वेग कहलाता है।
- तय की गयी दूरी को, दूरी तय करने में लिये गये समय से भाग देने पर औसत चाल प्राप्त होती है।
- एक वस्तु की आपेक्षिक स्थिति में दूसरी वस्तु के सापेक्ष परिवर्तन की दर दूसरी वस्तु के सापेक्ष पहली वस्तु का आपेक्षिक वेग कहलाता है।
- एकांक समय में वेग में परिवर्तन त्वरण कहलता है।
- विराम स्थिति में वस्तु का स्थिति-समय ग्राफ, समय अक्ष की ओर झुकी हुई रेखा के रुप में होता है।
- एकसमान चाल के लिये स्थिति-समय ग्राफ, समय अक्ष की ओर झुकी हुई रेखा के रुप में होता है।
- वस्तु द्वारा समान समय अंतराल में समान दूरी तय करने को एकसमान चाल कहते हैं।
- समय के किसी एक क्षण या उसके पथ के किसी एक बिंदु पर वस्तु का वेग उसका तात्क्षणिक वेग कहलाता है।
- 'स्थिति-समय आलेख का ढाल वेग बतलाता है।
- सतत त्वरण के साथ गतिशील वस्तु के लिये वेग समय ग्राफ समय अक्ष पर झुकी हुई सीधी रेखा के रुप में होता है।
- वेग समय ग्राफ के अंतर्गत आने वाला क्षेत्रफल तय की गयी दूरी बताता है।
- वस्तु के त्वरण का परिकलन वेग समय आलेख के ढाल द्वारा किया जा सकता है।
- वस्तु की गति की व्याख्या के लिये निम्नलिखित तीन समीकरण उपयोग किये जाते हैं।

  (i) $v = v_0 + at$

  (ii) $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$

  (iii) $v^2 = v_0^2 + 2a.(x - x_0)$

- अवकलन एवं समाकलन की संकल्पनाओं सम्बन्धी प्रारम्भिक ज्ञान।

पाठांत प्रश्न

1. औसत चाल और औसत वेग में अंतर बताइए।

2. एक कार "A" 65 किलामीटर प्रति घण्टे की चाल से सीधी सड़क पर जा ही है। उसी दिशा में एक मोटर साइकिल "B" भी उससे आगे 80 किलोमीटर/प्रतिघंटे की चाल से जा रही है। "A" के सापेक्ष "B" का वेग क्या है?

3. एक कार 30 m की दूरी तय करने में कितना समय लेगी यदि वह विराम की अवस्था से 2.0 m s^{-2} की दर से त्वरण करती है?

4. एक मोटर साइकिल चालक दो स्थानों के बीच की आधी दूरी 30 km h^{-1} की चाल से और शेष आधा भाग 60 km h^{-1} की चाल से तय करता है। मोटर साइकिल की औसत चाल ज्ञात कीजिए।

5. एक जल पक्षी सीधे दक्षिण की ओर 25 किलोमीटर दूरी जाने के लिये 20 किलोमीटर प्रति घंटे के अचर वेग से उड़ता है। यह जल पक्षी वह दूरी तय करने में कितना समय लेगा?

6. बंगलौर-नई दिल्ली की वायुयान यात्रा में सरल रेखीय दूरी 1200 किलोमीटर है और ट्रेन से दूरी 1500 किलोमीटर है। यदि वायुयान द्वारा यात्रा 2 घंटे में पूरी होती है और रेल द्वारा 20 घंटे में तो दोनो यात्राओं की औसत चाल का अनुपात बताइए।

7. एक कार विरामवस्था से सीधी सड़क पर गति करती हुई 5 सेकन्ड में 50 किलोमीटर प्रति घंटे का वेग प्राप्त करे तो उसका औसत त्वरण बताइए।

8. एक वस्तु 2.1 मीटर/सेकंड के प्रारंभिक वेग से शुरु करके 3 सेकन्ड के लिए 8.0 मीटर/सेकन्ड^2 त्वरण से गति करती है।

   (a) वस्तु त्वरण की अवधि में कितनी दूरी तय करेगी।

   (b) यदि वस्तु प्रारंभ में विराम अवस्था में होती तो वह कितनी दूरी तय करती?

9. एक गेंद एक चट्टान के शिखर से विराम अवस्था से छोड़ी जाती है। चट्टान के शीर्ष को शून्य स्तर पर लेते हुए और ऊपर की स्थिति को धनात्मक दिशा लेते हुए निम्न ग्राफ खींचिऐ।

   (i) विस्थापन-समय ग्राफ; (ii) वेग-समय ग्राफ; (iii) चाल समय ग्राफ

10. एक गेंद h ऊँचाई वाली चट्टान के शिखर से वेग v_0 से ऊर्ध्वाधर दिशा में ऊपर की ओर फेंकी जाती है और चट्टान तल पर आ गिरती है। तल को संदर्भ स्थल (शून्य तल) लेते हुए और ऊपर की दिशा को धनात्मक मानते हुए निम्नलिखित ग्राफ बनाइए।

    (i) दूरी-समय ग्राफ; (ii) वेग-समय ग्राफ; (iii) विस्थापन-समय ग्राफ; (iv) चाल-समय ग्राफ

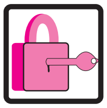
11. एक वस्तु 10 मीटर/सेकन्ड के वेग से ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर फेंकी जाती है। उच्चतम बिंदु पर वस्तु के त्वरण और वेग का क्या मान होगा?

टिप्पणियाँ

12. 10 ग्राम एवं 100 ग्राम द्रव्यमान की दो वस्तुएँ एकसमान ऊँचाई से गिराई जाती हैं। क्या वे एक समय पर भूमि पर पँहुचेंगी? व्याख्या कीजिए।

13. एकसमान गति करते पिंड में उसकी गति की दिशा से समकोण पर त्वरण दिया जाता है। इससे उसकी गति किस प्रकार प्रभावित होगी?

14. किसी क्षण पर वेग-समय ग्राफ का ढाल क्या बतलाता है?



पाठगत प्रश्नों के उत्तर

2.1

1. हाँ। जब वस्तु अपनी प्रारंभिक स्थिति पर वापस आती है तो उसका वेग शून्य होता है लेकिन उसकी चाल शून्य नहीं होती।

2. औसत चाल $= \dfrac{2+2}{\dfrac{2}{8}+\dfrac{2}{10}} = \dfrac{4}{9}\times 20 = 8.89\ \text{km h}^{-1}$, तथा औसत वेग $= 0$

3. हाँ, जब दो कारें समान वेग से समान दिशा में गति कर रही हों तो उनका आपेक्षिक वेग शून्य होगा।

4. (a) 1 मीटर/सेकंड

   (b) 2 मीटर/सेकंड

2.2

1. चित्र 2.2 देखें

2. (i) A, (ii) B अधिक दूरी तय करता है।

   (iii) B (iv) A

   (v) जब वे प्रारंभिक बिंदु से 3 किलोमीटर दूरी पर हैं।

3. एक समान गति में

4. (a) संभव नहीं है, क्योंकि चली गयी दूरी शून्य नहीं हो सकती।

2.3

1. (i) (a) वस्तु शून्य वेग से चलना प्रारंभ करती है।

   (b) प्रारंभ से लेकर 5 वें सेकंड तक गति समान रुप से त्वरित है। इसे रेखा OA द्वारा दर्शाया गया है।

$$a = \frac{15-0}{5-0} = 3 \text{ m s}^{-2}$$

(c) 5वें एवं 10वें सेकंड के बीच वस्तु एकसमान गति करती है। इसे AB द्वारा दर्शाया गया है।

$$a = \frac{15-15}{15-5} = \frac{0}{10} = 0 \text{ m s}^{-2}.$$

टिप्पणियाँ

(d) 15वें सेकंड से 25वें सेकंड तक गति समानरुप से मंदित है। इसे रेखा BC द्वारा दर्शाया गया है।

$$a = \frac{0-15}{25-15} = -1.5 \text{ m s}^{-2}.$$

(ii) (a) $\text{औसत चाल} = \frac{\text{तय की गयी दूरी}}{\text{लिया गया समय}} = \frac{\text{OABC का क्षेत्रफल}}{(25-0)}$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\times 15\times 5)\right) + (15\times 10) + \left(\frac{1}{2}\times 15\times 10\right)}{25} = \frac{525}{50} = 10.5 \text{ m s}^{-1}.$$

(b) मंदित-वेग समय के साथ घटता है।

(c) $\text{कुल चली गयी दूरी} = \left(\frac{20\times 15}{2}\right)\text{m} + \left(\frac{10\times 7}{2}\right)\text{m} = 185 \text{ m}.$

$\therefore \text{औसत चाल} = \left(\frac{185}{22}\right)\text{ms}^{-1} = 8.4 \text{ m s}^{-1}.$

$\text{कुल विस्थापन} = \left(\frac{20\times 15}{2}\right)\text{m} - \left(\frac{10\times 7}{2}\right)\text{m} = 115 \text{ m}.$

$\therefore \text{औसत वेग} = \frac{115}{22}\text{ms}^{-1} = 5.22 \text{ m s}^{-1}.$

2.4

1. समीकरण $x = x_0 + v_0 t + ½\, at^2$ का प्रयोग करते हुए

$$40 = \frac{1}{2} \times a \times 16$$

$$\Rightarrow a = 5 \text{ m s}^{-2}$$

टिप्पणियाँ

अब $v^2 = v_0^2 + 2a\,(x - x_0)$ का प्रयोग करने पर

$v = 20 \text{ m s}^{-1}$

पुनः आधी दूरी तय करने में लगा समय t का मान निम्न समीकरण द्वारा ज्ञात किया जायेगा।

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\text{at}^2$$

$$\Rightarrow\ 20 = 0 + \frac{1}{2} \times 5 \times t^2$$

$$\Rightarrow\ t^2 = 8 \text{ or } t = 2\sqrt{2} \text{ s}$$

2. समीकरण (2.9) के उपयोग द्वारा

   $x \quad = 21 \text{ m}$

   और समीकरण (2.6) के उपयोग द्वारा

   $v = 13 \text{ m s}^{-1}$

3. अधिकतम ऊँचाई पर $v = 0$,

   समीकरण (2.10) का उपयोग करने पर

   $v_0 = 7\sqrt{10} \text{ m s}^{-1} = 22.6 \text{ m s}^{-1}$.

   वस्तु अधिकतम ऊँचाई पर पहुँचने में लिए गए समय के दो गुने समय तक हवा में रहेगी।

4. फेंकते समय गेंद का त्वरण अधिक होता है।

पाठांत प्रश्नों के उत्तर

2. 15 km h^{-1}
3. 5.47 s
4. 40 m s^{-1}
5. 1.25 h
6. 8 : 1
7. 2.8 m s^{-2} (या 3000 km h^{-2})
8. (i) 42 m (ii) 36 m
11. O और 9.8 m s^{-2}.