4

समतल में गति

पिछले दो पाठों में आप सरल रेखीय गति से संबंधित संकल्पनाओं के बारे में पढ़ चुके हैं। उन पाठों में पढ़ी गई संकल्पनाओं के द्वारा क्या आप एक तल अर्थात् दो विमाओं में गतिशील पिंडों की गति का वर्णन कर सकते हैं? ऐसा करने के लिए हमें कुछ नई संकल्पनाओं से परिचय करना होगा। द्विविमीय गति का एक रोचक उदाहरण – क्षैतिज से कोण बनाते हुए फेंकी गई एक गेंद की गति है। इस गति को **प्रक्षेप्य गति** कहते हैं।

इस पाठ में आप निम्नलिखित प्रश्नों जैसे कुछ प्रश्नों का उत्तर देना सीखेंगे: किसी वायुयान की स्थिति और वेग क्या होनी चाहिए ताकि उसके द्वारा गिराई गई खाद्य सामग्री या दवाइयों के पैकेट बाढ़ पीड़ित या भूकंप से पीड़ित लोगों तक ठीक प्रकार पहुँच सकें, किसी खिलाड़ी को चक्रिका (discuss) या भाला किस प्रकार फेंकना चाहिए ताकि वह अधिकाधिक क्षैतिज दूरी तय करें, सड़कों का डिजाइन किस प्रकार किया जाए ताकि कार मोड़ पर मुड़ते समय पलट न जाए। उपग्रह की चाल क्या हो ताकि वह पृथ्वी के चारों ओर वृत्ताकार कक्षा के चक्कर लगाए? आदि-आदि।

ऐसी स्थितियाँ प्रक्षेप्य गति या वर्तुलगति के अंतर्गत आती हैं। सामान्यतया वर्तुल गति से तात्पर्य क्षैतिज वृत्त में गति से होता है। तथापि, क्षैतिज वृत्त में गति के अतिरिक्त पिंड ऊर्ध्व वृत्त में भी गति कर सकता है। इस प्रकार की गतियों को समझाने के लिए हम कोणीय वेग, अभिकेन्द्रीय बल और अभिकेन्द्रीय त्वरण की संकल्पनाओं से आपको परिचित कराएंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के पश्चात आप,

- *प्रक्षेप्य गति और वर्तुल गति की व्याख्या कर सकेंगे और उनके उदाहरण दे सकेंगे;*
- *ऊर्ध्व वृत्त में पिंड की गति की व्याख्या कर सकेंगे;*
- *किसी प्रक्षेप्य के लिए उसके 'उड्डयन काल' (time of flight), परास (range)* तथा अधिकतम ऊँचाई (maximum height) के व्यंजक निकाल सकेंगे;
- *प्रक्षेप्य के पथ का समीकरण व्युत्पन्न कर सकेंगे;*

- *वर्तुल गति में किसी पिण्ड के वेग* व त्वरण के व्यंजक ज्ञात कर सकेंगे, और
- *त्रिज्यीय तथा स्पर्शरेखीय त्वरण* (radial and tangential acceleration) को परिभाषित कर सकेंगे।

4.1 प्रक्षेप्य गति (Projectile motion)

प्रक्षेप्य गति के वर्णन का प्रथम सफल प्रयास गैलीलियो द्वारा किया गया। उसने दिखाया कि किसी मंद घूर्णन प्रक्षेप्य की क्षैतिज और ऊर्ध्व गतियाँ परस्पर स्वतंत्र होती हैं। इसे निम्नलिखित क्रियाकलापों द्वारा सरलता से समझा जा सकता है:

क्रिकेट की दो गेंदे लीजिए। उनमें से एक गेंद को किसी इमारत की छत से क्षैतिज दिशा में प्रक्षेपित कीजिए। ठीक उसी समय दूसरी गेंद को उतनी ही ऊँचाई से नीचे की ओर गिराएं। आप क्या पाएँगे?

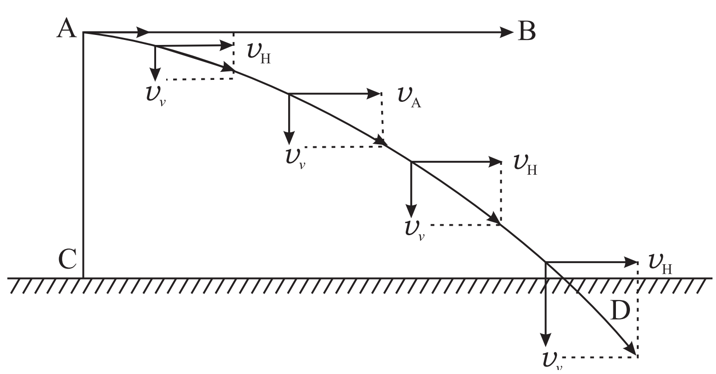
आप पाएँगे कि दोनों गेंदे एक ही समय पर जमीन पर गिरेंगी। इससे यह पता चलता है कि किसी प्रक्षेप्य का अधोमुखी त्वरण (down word acceleration) किसी मुक्त रुप से गिरती वस्तु के समान होता है। इसके अतिरिक्त वे अपनी क्षैतिज गति में स्वतंत्र होती हैं। इस तरह समय और दूरी की माप से यह पता चलता है कि क्षैतिज वेग निरंतर अपरिवर्तनीय होता है एंव ऊर्ध्वाधर गति की दृष्टि से स्वतंत्र रहता है।

दूसरे शब्दों में, प्रक्षेप्य गति की प्रमुख दो विशेषताएँ हैं:

(i) अचर क्षैतिज वेग घटक (constant horizontal velocity component)

(i) अचर ऊर्ध्वाधरतः अधोमुखी त्वरण घटक (constant vertically downword acceleration component)

इन दो स्वतंत्र गतियों के समिश्रण के फलस्वरुप प्रक्षेप्य का वक्र पथ प्राप्त होता है। चित्र 4.1 को देखिए। मान लीजिए कि कोई बालक एक गेंद को आरंभिक क्षैतिज वेग υ से फेंकता है। न्यूटन की गति के नियमानुसार, जब तक क्षैतिज दिशा में बल गेंद पर प्रभाव नहीं डालता, तब तक क्षैतिज दिशा में कोई त्वरण नहीं होगा। वायु के घर्षण की उपेक्षा करें तो गेंद जब बालक के हाथ से अलग होती है तो उस पर लगने वाला बल केवल गुरुत्व बल होता है। अतएव गेंद की क्षैतिज चाल υ_H परिवर्तत नहीं होती। किंतु जब गेंद अपनी इस चाल के साथ दाहिनी ओर आगे बढ़ती है तो वह गुरुत्व बल के प्रभाव में भी कार्य करती है। इसे सदिश वेग υ_y के ऊर्ध्वाधर घटक से दिखाया गया है। ध्यान रहे कि $\upsilon = \sqrt{v_H^2 + v_v^2}$ है और यह प्रक्षेप-पथ (trajectory) के हर बिंदु पर स्पर्शरेखीय (tangential) होता है।



चित्र. 4.1: प्रक्षेप्य का वक्रपथ

प्रक्षेप्य गति को परिभाषित करने के पश्चात हम यह ज्ञात करना चाहेंगे कि प्रक्षेप्य कितनी ऊँचाई तक, कितनी दूरी तक तथा कितने समय तक वायु में रहता है। किसी प्रक्षेप्य को किसी निश्चित लक्ष्य पर गिराने के लिए, जैसे कि फुटबॉल के खेल में गोल दागने के लिए, क्रिकेट की गेंद को सीमारेखा के पार पहुँचाने के लिए तथा राहत सामग्री गिराने के लिए यह दोनों घटक महत्वपूर्ण हैं।

4.1.1 प्रक्षेप्य की अधिकतम ऊँचाई (maximum height), उड्डयन काल (time of flight) और परास (Range)

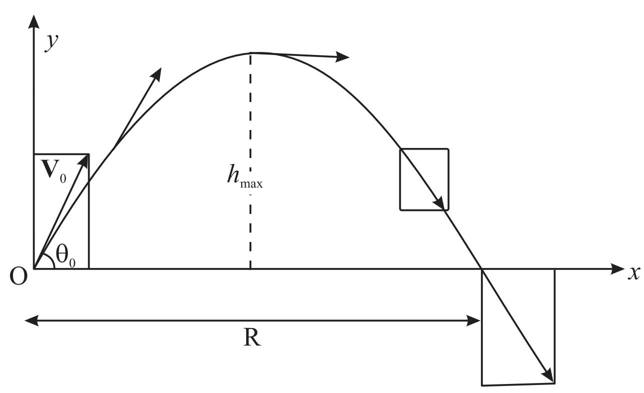
प्रक्षेप्य की अधिकतम ऊँचाई, उड्डयन काल एंव परास ज्ञात करने के लिए हम प्रक्षेप्य गति का विश्लेषण करेंगे। इसमें वायु या वायु प्रतिरोध जैसे सभी प्रभावों को नगण्य मान लेते हैं। प्रक्षेप्य गति में किसी वस्तु के प्रारंभिक वेग को हम ऊर्ध्वाधर एंव क्षैतिज घटकों में वियोजित कर सकते हैं। मान लीजिए कि क्षैतिज दिशा को x–अक्ष और ऊर्ध्वाधर दिशा को y–अक्ष से निरुपित किया जाता है (चित्र 4.2)।

मान लें, प्रक्षेप्य की प्रारंभिक स्थिति, समय $t = 0$ पर, मूल बिंदु O पर है। जैसा कि आप जानते हैं कि मूल बिंदु के निर्देशांक $x = 0$ और $y = 0$ होते हैं। अब आप मान लो कि प्रक्षेप्य x-अक्ष से θ कोण, जिसे प्रक्षेप–कोण (angle of projection) कहते हैं, पर प्रारंभिक वेग υ_0 से फेंका जाता है। x एवं y दिशा में इसके घटक क्रमशः निम्नलिखित हैं।

$$\upsilon_{ox} = \upsilon_o \cos\theta_0 \qquad (4.1\ a)$$

और

$$\upsilon_{oy} = \upsilon_o \sin\theta_0 \qquad (4.1\ b)$$



चित्र 4.2 : प्रक्षेप्य की अधिकतम ऊँचाई उड्डयन एवं काल परास

मान लें प्रक्षेप्य त्वरण के क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर घटक क्रमशः a_x और a_y हैं इस प्रकार

$$a_x = 0;\ a_y = -g = -9.8\ \text{m s}^{-2} \qquad (4.2)$$

a_y का ऋण चिह्न निर्धारित निर्देशांक तंत्र में गुरुत्वीय त्वरण को y – अक्ष की ऋणात्मक दिशा में दर्शाता है।

ध्यान दें कि a_y एकसमान है। अत: समीकरणों (2.6) और (2.9) का उपयोग किसी समय t पर प्रक्षेप्य के वेग और स्थिति के व्यंजकों को लिखने के लिए किया जा सकता है। ये व्यंजक हैं:

क्षैतिज गति
$$\upsilon_x = \upsilon_{ox}, \quad \text{चूँकि } a_x = 0 \qquad (4.3a)$$
$$x = \upsilon_{ox}\mathrm{t} = \upsilon_0 \cos \theta_0 t \qquad (4.3b)$$

ऊर्ध्व गति
$$\upsilon_y = \upsilon_{oy} - g\,t = \upsilon_0 \sin \theta_0 - gt \qquad (4.3c)$$
$$y = \upsilon_{oy}\mathrm{t} - ½g\,t^2 = \upsilon_0 \sin \theta_0 \mathrm{t} - \frac{1}{2} g\,t^2 \qquad (4.3d)$$

समीकरण (2.10) के प्रयोग द्वारा ऊर्ध्वाधर स्थिति एंव वेग घटकों का संबंध इस प्रकार आता है।

$$-g\,y = \frac{1}{2}(\upsilon_y^2 - \upsilon_{oy}^2) \quad (4.3e)$$

आप देखेंगें कि (समीकरणों 4.3a तथा b) द्वारा दर्शाई गई क्षैतिज गति स्थिर वेग को प्रदर्शित करती है। और समीकरणों 4.3(c) और 4.3(d) द्वारा दर्शाई गई ऊर्ध्वाधर गति एकसमान (अधोमुखी) त्वरण को प्रदर्शित करती है। दो घटकों के सदिश योग द्वारा किसी भी क्षण प्रक्षेप्य की गति और स्थिति का ज्ञान हो सकता है।

(a) अधिकतम ऊँचाई : जैसे–जैसे प्रक्षेप्य हवा में चलता है, वह किसी अधिकतम ऊँचाई (h) तक पहुँचकर नीचे की ओर आना शुरु करता है। प्रक्षेप्य जिस क्षण अधिकतम ऊँचाई पर होता है, उस समय प्रक्षेप्य की गति का ऊर्ध्वाधर घटक शून्य होता है। यह वह क्षण होता है जब प्रक्षेप्य का ऊपर की ओर जाना तो रुक जाता है परन्तु इस क्षण वह अभी नीचे की यात्रा शुरु नहीं करता।

अत: समीकरणों (4.3c और e) में $\upsilon_y = 0$ मान रखने पर हमें निम्न समीकरण प्राप्त होते हैं।
$$0 = \upsilon_{oy} - g\,t,$$
इस प्रकार अधिकतम ऊँचाई तक पहुँचने में लिया गया समय

$$t = \frac{v_{oy}}{g} = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \qquad (4.4)$$

अधिकतम ऊँचाई h पर वेग का ऊर्ध्वाधर घटक शून्य होता है। अत: $\upsilon^2 - u^2 = 2\,\mathrm{a}\,\mathrm{s} = 2\,g\,h$ का प्रयोग करने पर हमें अधिकतम ऊँचाई

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} \qquad (\text{चूँकि } \upsilon = 0 \text{ और } u = \upsilon_0 \sin \theta) \quad (4.5)$$

ध्यान दें कि अपनी गणनाओं में हमने वायु-प्रतिरोध के प्रभावों को नहीं लिया है। प्रक्षेप्य के काफी कम वेगों के लिए अधिकतम ऊँचाई का यह सन्निकट मान है।

समीकरण (4.4) की सहायता से वस्तु के वायुमण्डल में रहने का समय-काल प्राप्त किया जा सकता है। इसे इस उड्डयन काल (time of flight) कहते हैं।

(b) उड्डयन-काल (time of flight): *प्रक्षेप्य का उड्डयन काल प्रक्षेप्य के प्रमोचन के क्षण (फेंकने के क्षण) एवं प्रक्षेप्य के पृथ्वी पर गिरने के क्षण का समय-अंतराल है। समीकरण* (4.4) से दर्शाया गया समय t पिंड के उड्डयन-काल का केवल आधा होता है। अतः पूर्ण उड्डयन-काल का मान निम्नलिखित होगा:

$$T = 2t = \frac{2\, v_0 \sin \theta_0}{g} \qquad (4.6)$$

अंत में हम प्रक्षेप्य द्वारा क्षैतिज दिशा में चली गई दूरी की गणना करते हैं। इसे परास भी कहते हैं।

(c) परास (Range) प्रक्षेप्य का परास प्रक्षेप्य के उड्डयन-काल को प्रक्षेप्य की क्षैतिज गति से गुणा करने पर प्राप्त हो जाता है। अतः

$$\begin{aligned} R &= (\upsilon_{ox})\ (2\,t) \\ &= (\upsilon_0 \cos \theta_0)\frac{(2v_0 \sin \theta_0)}{g} \\ &= \upsilon_0^2\, \frac{(2 \sin \theta_0 \cos \theta_0)}{g} \end{aligned}$$

चूँकि, $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$, इस प्रकार परास निम्नलिखित समीकरण से प्राप्त होता है,

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} \qquad (4.7)$$

उपर्युक्त समीकरण से स्पष्ट है कि प्रक्षेप्य का परास निम्नलिखित घटकों पर निर्भर करता है:

- प्रक्षेप्य का प्रारंभिक वेग υ_0, और
- प्रक्षेप्य कोण θ_0.

अब आप ज्ञात कर सकते हैं कि डिस्क या भाला किस कोण से फेंका जाए ताकि वह पृथ्वी पर अधिकतम दूरी पर जा कर गिरे। दूसरे शब्दों में, कह सकते हैं कि वह कौन-सा कोण हो जिसके लिए क्षैतिज परास अधिकतम हो।

स्पष्ट है, किसी निश्चित वेग υ_0 के लिए R तभी अधिकतम होगा, जबकि $\sin 2\theta_0 = 1$ या $2\theta_0 = 90^0$.

या $\theta = 45°$

अतः किसी निश्चित वेग υ_0 के लिए R तभी अधिकतम होगा, जबकि $\theta_0 = 45^0$.

आइये, हम एक विशेष स्थिति में इन राशियों के मान निकालते हैं,

उदाहरण 4.1 : सन् 1996 में एटलान्टा (Atlanta) में हुए सेन्टीनियल ओलम्पिक (Centennial olympics) के दौरान स्वर्णपदक प्राप्त करने वाले खिलाड़ी ने हैमर को 19.6 m की दूरी पर फेंका। इस दूरी को अधिकतम मानते हुए हैमर की प्रारम्भिक चाल ज्ञात कीजिए। हैमर की अधिकतम ऊँचाई क्या थी? हवा में हैमर कितनी देर रहा? फेंकने वाले खिलाड़ी के हाथ की पृथ्वी से ऊँचाई को गणना में न लें।

हल : चूँकि हैमर फेंकने वाले खिलाड़ी के हाथ की ऊँचाई को गणना में नहीं लिया जा रहा है। अत: प्रक्षेप बिन्दु एंव हैमर का वापिस लौटने का स्थान एक ही ऊँचाई पर हुए। हम निर्देशांक अक्षों के मूल बिंदु 0 को प्रक्षेप बिंदु मान लेते हैं। चूँकि हैमर द्वारा तय की गई दूरी इसका परास है। अत: परास के लिए समीकरण 4.7 का उपयोग करते हुए:

$$R = \frac{v_0^2}{g} \quad \text{चूँकि } \theta_0 = 45^0 \text{ पर परास अधिकतम होता है।}$$

या

$$v_0 = \sqrt{Rg}$$

R का मान 19.6 m दिया गया है तथा g का मान 9.8 m s^{-2} लेने पर

$$v_0 = \sqrt{(19.6\ \text{m}) \times (9.8\ \text{m s}^{-2})} = 9.8\sqrt{2}\ \text{m s}^{-1} = 14.01\ \text{m s}^{-1}$$

अधिकतम ऊँचाई और उड्डयन काल क्रमश: समीकरण (4.5) और (4.6) से प्राप्त होता है। v_0 और $\sin\theta_0$ के मान समीकरण (4.5) और (4.6) में रखने पर

$$\text{अधिकतम ऊँचाई, } h = \frac{\left(9.8\sqrt{2}\right)^2 \text{m}^2\ \text{s}^{-2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{2 \times 9.8\ \text{m s}^{-2}} = 4.9\ \text{m}$$

$$\text{उड्डयन काल, } T = \frac{2 \times \left(9.8\sqrt{2}\right) \text{m s}^{-1}}{9.8\ \text{m s}^{-2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}} = 2\ \text{s}$$

आपने अब प्रक्षेप्य गति से संबंधित संकल्पनाओं और उनके अनुप्रयोग का अध्ययन कर लिया है। अपनी समझ की जाँच करने के लिए निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास करें:

पाठगत प्रश्न 4.1

1. निम्नलिखित परिस्थितियों में पहचान कीजिए कि कौन-सी गति प्रक्षेप्य है?

   (a) तीरंदाज का लक्ष्य पर तीर छोड़ना

   (b) ज्वलामुखीय विस्फोट से चट्टानों का निष्कासन

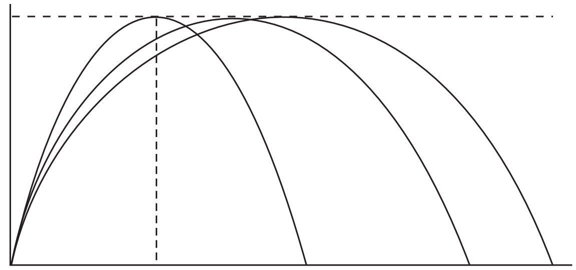
   (c) पहाड़ी सड़क पर ट्रक की गति

टिप्पणियाँ

(d) बमवर्षक वायुयान द्वारा बम गिराना (संकेत–बम के गिरते समय इसकी वायुयान के वेग के बराबर क्षैतिज गति होती है)

(e) नदी में पानी पर तैरती हुई पाल नौका

2. अलग–अलग प्रक्षेप कोणों पर फेंकी गई तीन गेंदे समान अधिकतम ऊँचाई तक पहुँचती हैं (चित्र.4.3):



चित्र 4.3 : प्रक्षेप्य का प्रक्षेपन्पथ

(a) क्या सभी गेंदों के लिए प्रारंभिक वेग के ऊर्ध्वाधर घटक समान हैं? यदि नहीं तो किस गेंद के वेग का ऊर्ध्वाधर घटक सबसे कम होगा?

(b) क्या सभी गेंदों का उड्डयन काल समान होगा?

(c) किस गेंद के वेग का क्षैतिज घटक सबसे अधिक होगा?

3. एक खिलाड़ी ने 8.90 m दूरी कूद कर लंबी कूद का कीर्तिमान स्थापित किया। मान लें कूदते समय उसका प्रारंभिक वेग 9.5 m s^{-1} था। यदि हवा के प्रतिरोध को गणना में न लें तो बताइए कि वह अधिकतम परास के कितने निकट कूदा था? g का मान 9.78 m s^{-2} लें।

4.2 प्रक्षेप्य का प्रक्षेप पथ

एक प्रक्षेप्य द्वारा तय मार्ग को उसका प्रक्षेप पथ कहते हैं। क्या आप चित्र. 4.1, 4.2 तथा 4.3 में दिखाए गए प्रक्षेप्यों के प्रक्षेप पथ को पहचान सकते हैं?

यद्यपि हमने प्रक्षेप्य गति से संबंधित अनेक तथ्यों की चर्चा की है। परन्तु अभी तक हमने मूल प्रश्न पर विचार ही नहीं किया। एक प्रक्षेप्य का प्रक्षेप पथ क्या है? अतः हमें प्रक्षेप्य के प्रक्षेप पथ के लिए समीकरण ज्ञात करना है। प्रक्षेप्य के प्रक्षेप पथ का समीकरण निकालना सरल है।

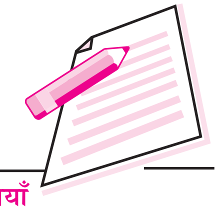
x का मान समीकरण (4.3b) से प्राप्त होता है तथा y का मान समीकरण (4.3d) से प्राप्त होता है। इन दोनों समीकरणों की सहायता से t को विलुप्त करना होगा। समीकरण (4.3b) से t का मान समीकरण (4.3d) में रखने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है:

$$y = \upsilon_{oy}\frac{x}{v_{ox}} - \frac{1}{2}\frac{g\,x^2}{v_{ox}^2} \quad \left(\text{as } t = \frac{x}{v_{ox}}\right) \qquad (4.8\text{ a})$$

समीकरण (4.1 a और b) के उपयोग से समीकरण (4.8a) का निम्न रुप हो जाता है:

$$y = (\tan\theta_0)\,x - \frac{g}{2(v_0\cos\theta_0)^2}x^2 \qquad (4.8\text{ b})$$

चूँकि $\upsilon_{oy} = \upsilon_0 \sin\theta$ और $\upsilon_{ox} = \upsilon_0\cos\theta$.



इस समीकरण का रुप $y = a\,x + b\,x^2$ के समान है जो एक परवलय (parabola) का समीकरण है। चित्र. 4.3 में आप विभिन्न प्रक्षेप कोणों पर छोड़े गए प्रक्षेप्यों के प्रक्षेप पथों को देख सकते हैं।

प्रक्षेप्य गति से संबंधित प्रश्नों को हल करने के लिए आमतौर पर समीकरण (4.5) से समीकरण (4.7) का उपयोग सरल होता है। उदाहरण के लिए इन समीकरणों का उपयोग किसी ज्ञात दूरी पर लक्ष्य को दागने के लिए आवश्यक विमोचन गति एवं प्रक्षेप कोण की गणना के लिए किया जाता है। लेकिन तय की हुई दूरी बहुत अधिक होने पर ये समीकरण प्रक्षेप्य गति का संपूर्ण व्यौरा नहीं देते हैं। अब हम किसी प्रक्षेप कोण θ पर वेग v_0 मानकर बिंदु (x_0, y_0) से छोड़े गए प्रक्षेप्य की गति संबंधी महत्वपूर्ण समीकरणों को संक्षेप में प्रस्तुत करते हैं।

प्रक्षेप्य गति से संबंधित समीकरण

$$a_x = 0 \qquad a_y = -g \qquad (4.9\text{ a})$$

$$v_x = v_0 \cos\theta_0 \qquad v_y = v_0 \sin\theta - g\,t \qquad (4.9\text{ b})$$

$$x = x_0 + (v_0 \cos\theta_0)t \qquad y = y_0 + (v_0 \sin\theta)\,t - (½)\,g\,t^2 \qquad (4.9\text{ c})$$

प्रक्षेप पथ का समीकरण

$$y = y_0 + (\tan\theta)\,(x - x_0) - \frac{g}{2(v_0 \cos\ \theta_0)^2}\,(x - x_0)^2 \qquad (4.9\text{ d})$$

ध्यान दीजिए कि ये समीकरण पहले चर्चा किए गए समीकरणों से अधिक व्यापक हैं। प्रारंभिक निर्देशांकों को (0,0) पर न लेकर व्यापक निर्देशांक (x_0, y_0) ले लिए गए है। क्या आप इस प्रक्षेप्य पथ का व्यापक समीकरण प्राप्त कर सकते हैं? आगे बढ़ने से पहले इसे ज्ञात कीजिए।

अभी तक हमने ऐसे पिंडों की गति का अध्ययन किया है जिसकी गति एक तल में होती है और जिसे हम प्रक्षेप्य गति की श्रेणी में रख सकते हैं। प्रक्षेप्य गति के दौरान पिंड के त्वरण का परिमाण और दिशा, दोनों एकसमान रहते हैं। एक और प्रकार की महत्वपूर्ण द्विविमीय गति है, जिसमें त्वरण का मान तो समान रहता है किन्तु दिशा नहीं। यह एकसमान वर्तुल गति है। सामान्यतया वर्तुल गति से तात्पर्य क्षैतिज वृत्त में गति से होता है। तथापि, ऊर्ध्वाधर वृत्त में गति भी संभव है। आगामी अनुभाग में आप इनका अध्ययन करेंगे।

इवानजेलिस्टा टोरिसेली

(1608–1647)

यह इटली के गणितज्ञ व गैलीलियो के शिष्य थे। इन्होंने पारद वायुदाबमापी का आविष्कार किया, प्रक्षेप्यों के सिद्धांत की जाँच की, दूरदर्शी यंत्र में सुधार किया और एक प्राथमिक सूक्ष्मदर्शी का आविष्कार किया। उन्होंने इस बात को गलत सिद्ध किया कि प्रकृति निर्वात पसंद नहीं करती, टोरिसेली के प्रमेयों को प्रस्तुत किया।

टिप्पणियाँ

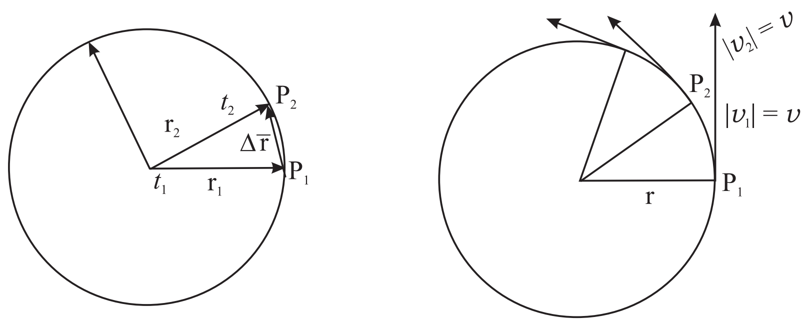
4.3 वर्तुल गति (Circular motion)

ग्रामोफोन के तवे (record) की गति अथवा चक्की के पाट की एकसमान वेग से गति, साधारण घड़ी की सूइयों की गति और यातायात के चौराहे के गोल चक्कर पर किसी गाड़ी का मुड़ना वर्तुल गति के आदर्श उदाहरण हैं। गिअर (gear), घिरनी (pulley) और पहिए (wheel) की गति भी वर्तुल गति होती है। सबसे सरल प्रकार की वर्तुल गति एक समान वृत्तीय गति होती है। घूमते हुए पंखे की पंखड़ियों पर और एकसमान चाल से घूमते हुए चक्की के पाट पर किसी बिंदु का पथ इसके उदाहरण हैं।

एकसमान वर्तुल गति का एक उदाहरण पृथ्वी के चारों ओर वृत्तीय कक्षाओं में कृत्रिम उपग्रहों की स्थापना है। उपग्रहों की INSAT श्रृंखला तथा अन्य कृत्रिम उपग्रहों से हमें अत्यधिक लाभ हुआ है। अत: हम पहले एकसमान वर्तुल गति का अध्ययन करते हैं।

4.3.1 एकसमान वर्तुल गति (Uniform Circular Motion)

किसी वृत्तीय पथ पर एक समान चाल से हो रही गति को एकसमान वर्तुल गति कहते हैं।



(a) (b)

चित्र 4.4 (a):एकसमान वर्तुल गति में कण की स्थितियाँ; (b): एकसमान वर्तुल गति

चित्र. 4.4a देखें। इसमें किसी कण (निकाय) की एकसमान चाल वाली वृत्तीय गति के लिए t_1 व t_2 समयों पर स्थिति सदिश $\boldsymbol{r}_1$ और $\boldsymbol{r}_2$ दर्शाए गए हैं। समान शब्द से तात्पर्य समान चाल से है। हम बतला चुके हैं कि कण की चाल अचर है। कण का वेग क्या है? वेग ज्ञात करने के लिये हमें औसत वेग की परिभाषा को एकसमान वर्तुल गति की P_1 और P_2 स्थितियों पर लागू करना होगा, जिससे

$$\boldsymbol{v}_{av} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \qquad (4.10\text{ a})$$

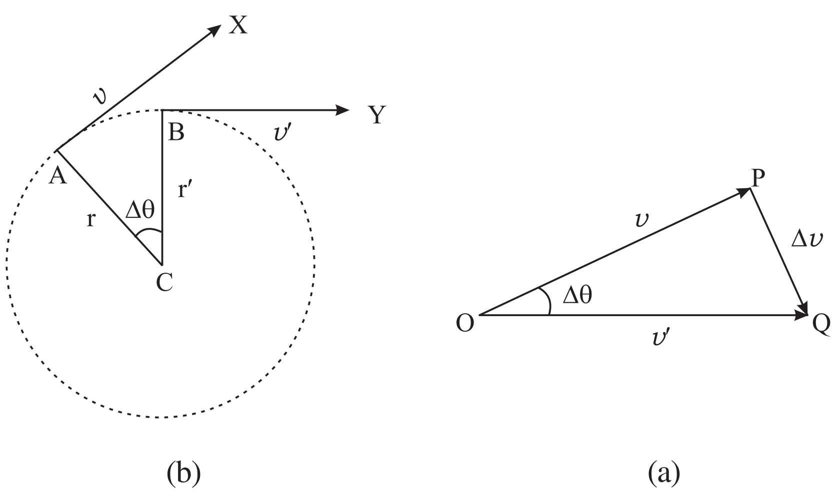
सदिश $\Delta\mathbf{r}$ चित्र 4.4(a) में दर्शाया गया है। अब मान लीजिए कि समय अन्तराल Δt अत्यंत लघु होता जाता है और शून्य मान तक पहुँचता है। इस स्थिति में $\Delta\mathbf{r}$ का परिमाण तथा दिशा क्या होगी? इस स्थिति में जैसे-जैसे $\Delta\mathbf{t}$ का मान शून्य की सीमा की ओर जाता है, Δr, बिंदु P_1 पर

वृत्त की स्पर्श रेखा बनती जाती है। गणितीय रूप से बिंदु P_1 पर तात्क्षणिक वेग की परिभाषा हम निम्नलिखित रुप में करते हैं:

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{dr}}{\mathrm{d}t} \qquad (4.11)$$

अत: एकसमान वर्तुल गति में वेग सदिश निरन्तर बदलता रहता है। क्या आप इसका कारण बतला सकते हैं? ऐसा वेग की दिशा स्थिर न होने के कारण होता है। वेग की दिशा निरन्तर बदलती जाती है। (देखिए चित्र 4.4b) **वेग के इसी परिवर्तन के कारण एकसमान वर्तुल गति त्वरित गति होती है**। एक कण के एकसमान वर्तुल गति में त्वरण को अभिकेन्द्र त्वरण कहते हैं। अब इसे थोड़ा विस्तार से समझते हैं।

अभिकेन्द्र त्वरण (centripetal acceleration) : मान लीजिए m द्रव्यमान का कोई कण एकमान चाल υ से r त्रिज्या के वृताकार पथ में चक्कर लगा रहा है। छोटे समय अन्तराल Δt के बाद कण स्थिति A से स्थिति B पर पहुँचता है। मान लें $\mathbf{r}$ व $\mathbf{r}'$, A और B स्थितियाँ के लिये स्थिति सदिश; $\boldsymbol{v}$ और $\boldsymbol{v}'$ वेग सदिश हैं (चित्र 4.5(a))।



चित्र 4.5

$\Delta\upsilon$ (वेग परिवर्तन का मान) सदिशों के त्रिभुज नियम की सहायता से ज्ञात किया जाता है। अब चूँकि कण का पथ वृत्ताकार है और किसी बिंदु पर वेग की दिशा उस बिंदु पर स्पर्श रेखा द्वारा दर्शाई जाती है। अत: υ तथा $\boldsymbol{v}'$ क्रमश: और $\boldsymbol{r}$ और $\boldsymbol{r}'$ के लम्बवत् हैं।

औसत त्वरण $\left(\mathbf{a} = \dfrac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}\right)$ $\Delta\boldsymbol{v}$ की दिशा में है

अर्थात् औसत त्वरण $\Delta\mathbf{r}$ के लम्बवत है।

माना कि स्थिति सदिश $\mathbf{r}$ और $\mathbf{r}'$ के बीच का कोण $\Delta\theta$ है, तब वेग सदिशों $\boldsymbol{v}$ व $\boldsymbol{v}'$ के बीच का कोण भी $\Delta\theta$ होगा क्योंकि वृत्तीय गति में वेग सदिश हमेशा स्थिति सदिश के लम्बवत् होते हैं।

वेग परिवर्तन $\Delta \boldsymbol{v}$ ज्ञात करने के लिए एक बिंदु O लें और AX के समान्तर व बराबर OP रेखा खींचें। यह $\boldsymbol{v}$ दर्शाती है। पुनः इसी बिंदु से एक रेखा OQ, BY के समान्तर खींचे। यह $\boldsymbol{v}'$ को दर्शाती है।

चूँकि $|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}'|$, OP = OQ. PQ को मिलाएं (चित्र. 4.5b)

अब त्रिभुज OPQ में भुजा OP और OQ के A और B बिंदुओं पर वेग सदिशों $\boldsymbol{v}$ और $\boldsymbol{v}'$ को दर्शाते हें। इसलिए इनका अन्तर PQ द्वारा दर्शाया जाता है, जो कि वेग परिवर्तन के परिमाण व Δt समय में बिंदु A से बिंदु B पर जाने में दिशा परिवर्तन को दर्शाता है।

$\therefore$ त्वरण = वेग परिवर्तन की दर

अर्थात्
$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{PQ}}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \qquad (4.12)$$

चूँकि Δt बहुत कम है AB भी बहुत कम है, जो लगभग एक सरल रेखा है। इस प्रकार Δ ACB और ΔPOQ समद्विबाहु त्रिभुज हैं जिनके अंत:कोण समान हैं। अत: ये त्रिभुज समरूप हैं।

$$\therefore \qquad \frac{PQ}{AB} = \frac{OP}{CA}$$

अथवा
$$\frac{\Delta v}{v.\Delta t} = \frac{v}{r} \quad [\because \ |\boldsymbol{v}_1| = |\boldsymbol{v}_2| = v] \qquad (4.13)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r} \qquad (4.14)$$

लेकिन, $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ कण का त्वरण है। अत:

$$\textit{अभिकेन्द्र-त्वरण, } a = \frac{v^2}{r} \qquad (4.15)$$

अब $v = r\,\omega$, अत: अभिकेन्द्र-बल का परिमाण

$$F = m\,a = \frac{m\,v^2}{r} = m\,r\omega^2. \qquad (4.16)$$

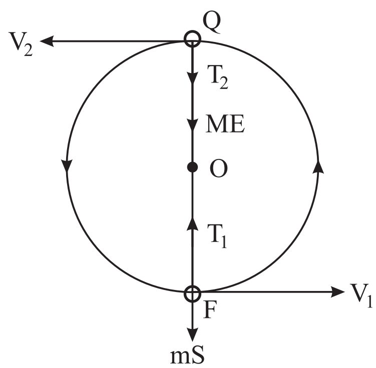
अब चूँकि Δt काफी कम है। अत: $\angle OPQ = \angle OQP = 1$ समकोण

इस प्रकार PQ, OP के लम्बवत है जो कि बिंदु A पर खींची स्पर्शरेखा AX के समान्तर है। पुन: AC, AX पर लम्बवत है इसलिए AC, PQ के समान्तर है। यह दर्शाता है किसी बिंदु पर अभिकेन्द्र-बल केन्द्र की ओर त्रिज्या के अनुदिश कार्य करता है।

यह दर्शाता है कि किसी वस्तु को वृत्ताकार पथ में गतिशील रखने के लिए एक न्यूनतम अभिकेन्द्री बल आवश्यक होता है। ऐसे बल के अभाव में वस्तु एक सरल रेखा में गति करेगी।

4.3.2 ऊर्ध्वाधर वृत्त में गति

जब कोई पिंड किसी क्षैतिज वृत्त में एक समान चाल से गति करता है तो इसके रैखिक वेग की दिशा तो बदलती रहती है किन्तु कोणीय वेग अपरिवर्तित रहता है। किन्तु, जब कोई पिंड ऊर्ध्वाधर वृत्त में गति करता है तो गुरूत्वीय त्वरण के कारण इसका कोणीय वेग भी अचर नहीं रह सकता।



चित्र 4.6

माना कि डोरी से बंधे m द्रव्यमान के किसी पिंड को बिन्दु O के परित: r त्रिज्या के एक वृत्त में घुमाया जा रहा है। क्योंकि पिंड ऊर्ध्वाधर वृत्त में गति कर रहा है, निम्नतम बिन्दु P पर इसका वेग अधिकतम है और जैसे-जैसे पिंड बिन्दु Q की ओर बढ़ता है गुरुत्व के कारण वेग कम होता जाता है और उच्चतम बिन्दु Q पर इसका मान न्यूनतम होता है। जब पिंड वृत्ताकार पथ पर चलकर Q से P की ओर आता है तो इसकी चाल फिर बढ़ने लगती है।

P बिन्दु पर पिंड पर लगने वाले बल हैं: वस्तु का भार mg और डोरी में तनाव T_1 जो चित्र में दर्शाई गई दिशाओं में प्रभावी हैं। इसी प्रकार बिन्दु Q पर पिंड पर लगने वाले बल हैं: mg एवं तनाव T_2 जो चित्र 4.9 में दर्शाई गई दिशा में लगे हैं। यदि बिन्दु P एवं Q पर पिंड के वेग क्रमश: v_1 एवं v_2 हों तो, P पर

$$T_1 - mg = \frac{mv_1^2}{r}$$

अथवा
$$T_1 = \frac{mv_1^2}{r} + mg$$

ध्यान दें कि P पर बल $(T_1 - mg)$, PO के अनुदिश लगता है और अभिकेन्द्री बल प्रदान करता है। इसी प्रकार बिन्दु Q पर

$$T_2 + mg = \frac{mv_2^2}{r}$$

अथवा
$$T_2 = \frac{mv_2^2}{r} - mg$$

यदि डोरी ढ़ीली पडे बिना पिंड को वृत्त पर चलते जाना है तो,

$$T_2 \geq 0$$

अर्थात डोरी में Q बिन्दु पर न्यूनतम तनाव शून्य होना चाहिए।

जब $T_2 = 0$, तो $$mg = \frac{mv_2^2}{r}$$

अर्थात् वृत्त के उच्चतम बिन्दु Q पर न्यूनतम वेग $\sqrt{gr}$ है।

$$\therefore \qquad \omega_2 = \frac{v}{r} = \sqrt{g/r}$$

वृत्त के न्यूनतम बिन्दु P पर न्यूनतम वेग इतना होना चाहिए कि उच्चतम बिन्दु Q पर इसका वेग $v_2 = \sqrt{gr}$ हो जाए।

संबंध $v^2 - u^2 = 2as$ का उपयोग करने पर हमें प्राप्त होता है।

$$v_2^2 - v_1^2 = -2g(2r) \qquad (\because s = 2r \text{ एवं } g \text{ ऋणात्मक है})$$

अथवा $$v_1^2 = v_2^2 + 4gr$$

$$v_1^2 = gr + 4gr = 5gr$$

$$\Rightarrow \qquad v_1 = \sqrt{5gr}$$

अतः कोई पिंड पूरी तरह ऊर्ध्वाधर वृत्त पर चल पाए इसके लिए निम्नतम बिन्दु पर निम्नतम वेग $\sqrt{5gr}$ होना चाहिए।

अथवा $$w_1 = \sqrt{5g/r}$$

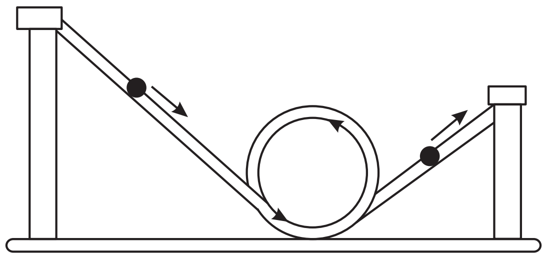
जो दर्शाता है कि जब कोई पिंड ऊर्ध्वाधर वृत्त में गति करता है तो इसका कोणीय वेग भी परिवर्तित होता है। इन तथ्यों को अनुभव करने के लिए निम्नलिखित क्रियाकलापों को करके देखें।

क्रियाकलाप 4.1

एक छोटा सा पत्थर का टुकड़ा धागे में बाँधकर व दूसरे सिरे को हाथ में लेकर क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर दिशाओं में घुमाने का प्रयास करें। आप कम घूर्णन गति से प्रारंभ कर क्रमशः इस गति को बढ़ाएं। जब घूर्णन गति कम होती है, तब क्या होता है? क्या आप पत्थर के घूमने पर अंगुलियों में कोई खिंचाव महसूस करते हैं? जब आप धागे के किनारे को छोड़ देते हैं तो क्या होता है? इसकी व्याख्या आप कैसे करेंगे?

क्रियाकलाप 4.2

एक मीटर लंबा ऐलुमिनियम का एक चैनल लें और इसे इस प्रकार मोड़ें कि बीच में एक वृताकार लूप बन जाए (चित्र 4.5)। यदि आवश्यकता हो तो किसी तकनीकी जानकर की सहायता लें।

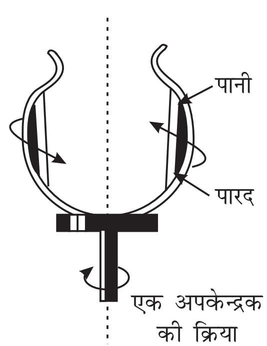


चित्र 4.7: यदि किसी गेंद को आनत (incline) तल पर पर्याप्त ऊँचाई से लुढ़काया जाए तो यह लूप का पूरा चक्कर लगा लेगी।

काँच की गोलियों को चैनल के दाई ओर भिन्न-भिन्न ऊँचाइयों से लुढ़काएं। अवलोकन करें कि क्या गोली प्रत्येक स्थिति में लूप का चक्कर लगा लेती है अथवा इसे एक न्यूनतम ऊँचाई से अधिक ऊँचाई से (इस प्रकार एक न्यूनतम वेग) से लुढ़काना पड़ेगा? इससे कम ऊँचाई से लुढ़काने पर काँच की गोली लूप का चक्कर पूरा नहीं कर पाएगी और यह नीचे गिर जाएगी। आप इसकी व्याख्या कैसे करेंगे?

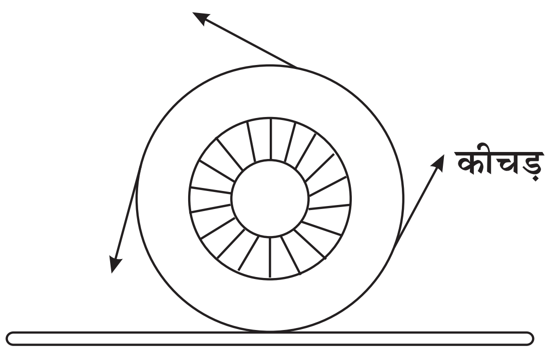
अभिकेंन्द्रीय बल के कुछ उपयोग

(i) **अपकेन्द्रक :** विभिन्न घनत्व की वस्तुओं को अलग-अलग करने के लिए घूमने वाली युक्तियों का प्रयोग किया जाता है। ये इस सिद्धांत पर आधारित हैं कि यदि दो अलग-अलग घनत्व वाले पदार्थों के मिश्रण को एक पात्र में रख कर उच्च वेग से घुमाया जाए तो भारी अवयव पर लगने वाला अभिकेन्द्र बल अधिक होगा और भारी पदार्थ पात्र में बाहर की ओर गमन करेगा और इसे अलग किया जा सकता है। इन युक्तियों को यूरेनियम को समृद्ध बनाने के लिए प्रयोग किया जाता है रसायन प्रयोगशाला में इनका उपयोग रसायनिक विश्लेषण के लिए किया जाता है।



चित्र 4.8: पारद और पानी एक तश्तरी में घूमते हैं। पानी पारे के अन्दर की ओर है। गुरुत्वीय बल की भाँति अभिकेन्द्र-बल ज्यादा भारी पदार्थ के लिए अधिक होता है।

(ii) वाहनों के पहियों पर कम गति की स्थिति में कीचड़ चिपक जाता है और गति के बहुत बढ़ जाने पर यह स्पर्शरेखीय दिशा में छिटककर दूर हो जाता है।



चित्र 4.9: तेजी से चक्कर लगाते हुए पहिए में कीचड़ और पानी छिटक कर दूर हो जाते हैं।

(iii) **ग्रहीय गति :** सूर्य की परिक्रमा करने वाले पृथ्वी तथा दूसरे ग्रहों के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र–बल उनके और सूर्य के बीच कार्य करने वाले गुरुत्वाकर्षण–बल द्वारा मिलता है

उदाहरण 4.2 : अंतरिक्ष में उड़ान के दौरान अंतरिक्ष यात्री उच्च त्वरण का अनुभव करते हैं। ऐसी स्थितियों के लिए प्रशिक्षण केन्द्रों में इनको एक ऐसे संवृत कैप्सूल (closed capsule) में रखा जाता है जो 15 m त्रिज्या की घूर्णी (revolving) भुजा (arm) के सिरे पर जोड़ दिया जाता है। इस कैप्सूल को एक वृत्ताकार पथ में उसी प्रकार घुमाया जाता है– जैसे कि हम डोरी के साथ पत्थर बाँधकर क्षैतिज वृत्त में घुमाते हैं। यदि भुजा वृत्त के चारों ओर 24 चक्कर प्रति मिनट की दर से घूमती है तो कैप्सूल का अभिकेन्द्र–त्वरण ज्ञात कीजिए।

हल : वृत्तीय पथ की परिधि का मान = $2\pi \times$ (त्रिज्या) = $2\pi \times 15$ मीटर

परिधि में एक चक्कर लगाने में लगा समय = $\dfrac{60}{24}$

इसलिए कैप्सूल की चाल $v = \dfrac{2\pi r}{T} = \dfrac{2\pi \times 15 \text{ m}}{(60/24) \text{ s}} = 38 \text{ m s}^{-1}$

अभिकेन्द्र–त्वरण का परिमाण

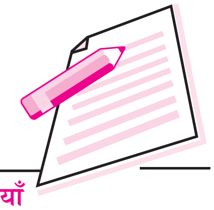
$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(38 \text{ m s}^{-1})^2}{15 \text{ m}} = 96 \text{ m s}^{-2}$$

ध्यान दें कि यह त्वरण गुरुत्वीय त्वरण से लगभग 10 गुना है।

पाठगत प्रश्न 4.2

1. एकसमान वर्तुल गति में (a) क्या चाल एकसमान होती है? (b) क्या वेग एकसमान होता है? (c) क्या त्वरण का परिमाण स्थिर होता है। (d) क्या त्वरण एकसमान होता है? स्पष्ट कीजिए।

2. ऊर्ध्व वृत्तीय गति में क्या पिंड का कोणीय वेग परिवर्तित होता है? व्याख्या कीजिए।
3. एक धावक वृत्ताकार पथ के चारों ओर 9.0 m s^{-1} की चाल से दौड़ता है, जिसका अभिकेन्द्र–त्वरण 3 m s^{-2} है। वृत्ताकार पथ की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
4. फर्मी प्रयोगशाला का त्वरक विशालतम कण त्वरणों में से एक है। इस त्वरक में प्रोटानों को एक निर्वात नली में 2 km व्यास के वृत्तीय पथ में चलने को बाध्य किया जाता है। इनकी गति प्रकाश वेग के लगभग 99.99995% है। इन प्रोटॉनों का अभिकेन्द्र त्वरण क्या है? $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.



टिप्पणियाँ

4.4 एकसमान वर्तुल गति के अनुप्रयोग

अब तक आप पढ़ चुके हैं कि एक वृत्ताकार पथ में चल रहे पिंड की गति त्वरित होती है। पिछले पाठों में आपने न्यूटन के गति के नियम भी पढ़े। न्यूटन के दूसरे नियम से आप जानते हैं कि चूँकि वृत्ताकार पथ पर गतिशील पिंड की गति त्वरित होती है, इस पर एक नेट बल अवश्य प्रभावी होना चाहिए।

इस बल की दिशा और परिमाण क्या है? ये बातें इस अनुच्छेद में आप सीखेंगे। तब हम एकसमान वर्तुल गति के लिए न्यूटन के नियमों का प्रयोग करेंगे। इससे हम यह जान पाते हें कि सड़कों को बैंकित करने का क्या कारण है, अथवा जब पायलट वायुयानों को ऊर्ध्वाधर लूपों में उड़ाते हैं तो वे अपनी सीटों पर बैठे हुए दाब महसूस क्यों करते हैं?

सबसे पहले पिंड पर लगे उस बल को ज्ञात करते हैं जो इसकी एकसमान वर्तुल गति को बनाए रखता है। मान लीजिए कि पिंड r त्रिज्या के वृत्त में स्थिर वेग v से चक्कर काट रहा है। न्यूटन के दूसरे नियम के अनुसार पिंड पर लगे बाह्य बल एंव त्वरण के बीच निम्न संबंध है:

$$\mathbf{F} = -\frac{mv^2}{r}\hat{\boldsymbol{r}}, |\mathbf{F}| = \frac{mv^2}{r} \qquad (4.17)$$

एक समान वर्तुल गति करते पिण्ड पर लग रहा नेट बाह्य बल वृत के केन्द्र की ओर निर्दिष्ट होता है और इसका परिणाम समी. (4.17) द्वारा प्राप्त होता है। इस बल को अभिकेन्द्रीय बल कहते हैं। एक और महत्वपूर्ण तथ्य समझने और याद करने का यह है कि अभिकेन्द्र बल, गुरुत्वीय बल अथवा वैद्युत बल जैसे अन्योन्यक्रिया बलों (forces of interaction) की सूची में नहीं आता है। यह परिभाषिक शब्द केवल हमें यह जानकारी देता है कि एकसमान वर्तुल गति में पिंड पर लगा नेट बल केन्द्र की ओर निर्दिष्ट होता है। इससे हमें यह पता नहीं चलता है कि यह बल कहाँ से आता है।

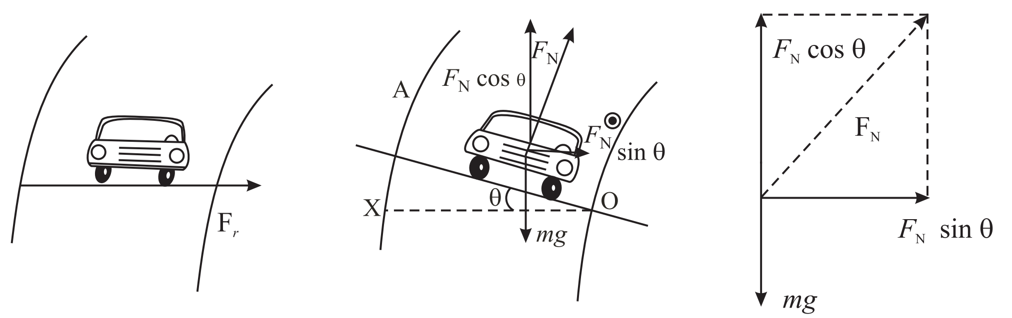
इस प्रकार, यह बल दो निकायों के बीच कार्य करने वाले गुरुत्वाकर्षण के कारण हो सकता है जैसे सूर्य के चारों ओर ग्रहों की गति के दौरान अभिकेन्द्र–बल सूर्य और उपग्रह के बीच गुरुत्वीय आकर्षण के कारण होता है। इसी प्रकार किसी मोड़ या गोलाई में मुड़ती हुई मोटर कार के लिए अभिकेन्द्र–बल सड़क एंव कार के टायरों के बीच घर्षण बल और सड़क की बैंकिंग से (अथवा बैंक्ड रोड की अभिलम्बत प्रतिक्रिया बल के क्षैतिज घटक द्वारा) मिलता है। अभिकेन्द्र–बल की धारणा और अधिक प्रत्यक्ष स्थितियों में प्रयोग किए जाने पर स्पष्ट हो जाएगी।

4.4.1 सड़कों की बैंकिंग

साइकिल चलाते हुए किसी तीव्र मोड़ पर आपने अनुभव किया होगा कि कोई बल आपको आपके पथ से बाहर की ओर धकेलने का प्रयास कर रहा है। क्या आपने कभी सोचा कि ऐसा क्यों होता है?

आप बाहर गिरने को तब प्रवृत्त होते हैं, जबकि आपको वृत्ताकार पथ में बनाए रखने के लिए आवश्यक बल का अभाव हो। सड़क एंव टायरों के बीच घर्षण से कुछ बल प्राप्त होता है लेकिन यह संभवतया पर्याप्त नहीं होता है। जब आप गति धीमी करते हैं, तो आवश्यक अभिकेन्द्र-बल कम हो जाता है और आप मुड़ने में सक्षम हो जाते हैं।

मान लीजिए राजमार्ग के किसी मोड़ वाले भाग में m द्रव्यमान की मोटर कार υ चाल से जा रही है। (चित्र. 4.6) वृत्ताकार पथ में मोटर कार को एकसमान रुप से गतिशील बनाये रखने के लिये इस पर कोई बल कार्य करना चाहिए। यह बल केन्द्र की ओर निर्दिष्ट होना चाहिए और इसका परिमाण $\frac{m\upsilon^2}{r}$ होना चाहिए। यहाँ r वक्रित भाग की वक्रता त्रिज्या (radius of curvature) है।



(a) (b) (c)

चित्र 4.10 : एक मुड़ती हुई कार (a) एक समतल सड़क पर, (b) एक बैंक्ड सड़क पर, (c) कार पर कार्यरत बल को इसके सकमोणिक घटकों में विभाजित किया गया है।

सामान्यतया उतना अधिक नहीं होता जितना चित्र में दर्शाया गया है। अब अगर सड़क समतल हो तो कार को वृत्तीय पथ में बनाए रखने के लिए सड़क व पहियों के बीच का घर्षण बल आवश्यक अभिकेन्द्र-बल प्रदान करता है। इससे पहिए काफी घिसते हैं और साथ ही यह बल सुरक्षित रुप से मुड़ने के लिए पर्याप्त नहीं भी हो सकता है। इसलिए सड़कों को मोड़ों पर बैंक्ड किया जाता है। सड़क की बैंकिंग में सड़क के बाहर के किनारे को ऊपर उठा दिया जाता है। सच्चाई तो यह है कि सड़कों का डिजाइन इस प्रकार किया जाता है कि घर्षण पर कम से कम निर्भर रहना पड़े। उदाहरण के लिए यदि मोटर के टायर घिसकर चिकने हो गए हों या सड़क पर पानी या बर्फ पड़ा हो तो घर्षण गुणांक (coefficient of friction) का मान नगण्य हो जाता है। मोड़ के पास सड़कों को इस प्रकार बैंक्ड किया जाता है कि घर्षण के नगण्य होने पर भी कार अपने पथ पर चलती रहे।

बैंकिंग कोण θ का समायोजन मोड़ की वर्तुलता और अधिकतम अनुमानित चाल के अनुसार कर लिया जाता है। कोण θ का व्यंजक प्राप्त करने के लिए हम मोटर कार के बल निर्देशक आरेख (free body diagram) का विश्लेषण करते हैं।

हम उस स्थिति पर विचार करते हैं जिसमें मोटर कार और सड़क के बीच कोई घर्षण बल कार्य नहीं करता। मोटर कार पर कार्य करने वाले बलों में से एक तो कार का भार mg है और दूसरा अभिलंब प्रतिक्रिया (Normal reaction) का बल $\mathbf{F}_N$ होता है। अभिकेन्द्र बल $\mathbf{F}_N$ के क्षैतिज घटक से प्राप्त होता है। $\mathbf{F}_N$ को इसके ऊर्ध्वाधर एंव क्षैतिज घटकों में तोड़ने पर हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होते हैं:

$$F_N \sin\theta = \frac{mv^2}{r} \qquad (4.18)$$

चूँकि इस अवस्था में कोई ऊर्ध्वाधर त्वरण नहीं है। अत: $\mathbf{F}_N$ ऊर्ध्वाधर घटक कार के भार के बराबर होता है।

$$F_N \cos\theta = m\,g \qquad (4.19)$$

हमारे पास दो अज्ञात राशियों के लिए दो समीकरण हैं। θ का मान ज्ञात करने के लिए समीकरण (4.18) को 4.19) से भाग देने पर हमें निम्न संबंध होता है।

$$\tan\theta = \frac{mv^2/r}{m\,g} = \frac{v^2}{r\,g}$$

अथवा

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v^2}{rg} \qquad (4.20)$$

θ के चुनाव एंव r की सीमाओं के संदर्भ में समीकरण (4.20) का अर्थ हम क्या लगाते हैं? सबसे पहला तथ्य समीकरण (4.20) यह बतलाता है कि बैंकिंग कोण गाड़ी के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता है। इसका अर्थ यह हुआ कि बैंकित सड़कों पर भारी गाड़ियाँ भी चल सकती हैं।

समीकरण (4.20) से दूसरा निष्कर्ष यह निकलता है कि अत्यधिक घुमावदार मोड़ों (अर्थात् r के कम मानों के लिए) एंव गाड़ियों के उच्च वेगों के लिए θ का मान अधिक होना चाहिए। θ के निश्चित मान पर यदि चाल υ की अपेक्षा कम है तो गाड़ी की प्रवृत्ति ढाल की ओर फिसलने की होगी। यदि चाल υ की अपेक्षा अधिक हो, तो गाड़ी का रुझान सड़क की ऊँचाई वाले भाग की ओर पलटने का होगा। इसलिए गाड़ी चालक को सड़क के मोड़ों पर निर्धारित चाल सीमाओं के भीतर ही चलना चाहिए, नहीं तो गाड़ी सड़क के इधर-उधर पलट जाएगी और दुर्घटनाएँ हो सकती हैं।

आमतौर पर, घर्षण बलों के कारण υ की अपेक्षा गाड़ी की सुरक्षित चाल के अधिक या कम होने का एक परास (range) होता है। मोड़ों पर मुड़ते समय यदि चाल परास सीमा में रहती है तो गाड़ी वृत्ताकार पथ में आराम से चलती रह सकती है। वास्तविक स्थिति को समझने के लिए मान लीजिए 300 m त्रिज्या की रेल पटरी को इस प्रकार बिछाया गया है कि इस पटरी पर अनुमानित चाल 50 m s^{-1} है। अनुमानित बैंकिंग का मान क्या होना चाहिए? इस कोण का

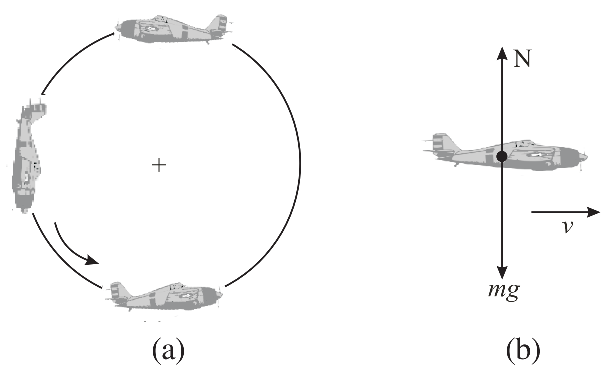
मान ज्ञात करने के लिए हम तुरंत समीकरण (4.20) का प्रयोग करते हैं। और θ का मान निम्न विधि से प्राप्त करते हैं।

$$\theta = \tan^{-1}\frac{(50\ \mathrm{m\,s^{-1}})^2}{(300\ \mathrm{m})\,(9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}})} = \tan^{-1}(0.017) = 1^0$$

आप एक अन्य उपयोगं के बारे में भी विचार करना चाहेंगे।

4.4.2 ऊर्ध्वाधर लूप बनाते हुए वायुयान की गति (Aircrafts in vertical loops)

गणतंत्र दिवस या अन्य प्रदर्शनों में भारतीय वायुसेना के पायलटों को आपने ऊर्ध्वाधर लूपों में वायुयान द्वारा उड़ान भरते हुए देखा होगा (चित्र 4.8a)। ऐसी अवस्थाओं में जब वायुयान लूप की तली में होता है तो पायलट यह अनुभव करते हैं जैसे उनकी सीट पर कई गुने गुरुत्वीय बल से कोई उन्हें दबा रहा है। ऐसा क्यों होता है? इसे समझने के लिए चित्र. (4.8b) देखिए। चित्र (4.8b) लूप की तली में पायलट का बल निर्देशक आरेख है। पायलट पर काम कर रहे बलों में एक तो mg है तथा दूसरा पायलट की सीट द्वारा लगाया जा रहा अभिलंब बल N है। नेट उपरिमुखी बल का मानए N–mg, है जो अभिकेन्द्र त्वरण प्रदान करता है।



चित्र. 4.11 : (a) ऊर्ध्वाधर लूप में वायुयान की विभिन्न स्थितियाँ (b) पायलट का बल निर्देशक आरेख

अब N की गणना निम्न प्रकार की जाती है।

$$N - mg = m\,a$$

अथवा $$N - mg = m\,\upsilon^2/r$$

अथवा $$N = m\,(g + \upsilon^2/r)$$

वास्तविक स्थिति में मान लीजिए $\upsilon = 200\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ तथा $r = 1500$ m है।

अतः $$N = m\,g\left[1+\frac{(200\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{(9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \times 1500\,\mathrm{m})}\right] = m\,g \times 3.7$$

उपर्युक्त N के मान से स्पष्ट हो जाता है कि पायलट 3.7 गुना गुरुत्वीय बल का अनुभव करते हैं। यदि यह बल निर्धारित सीमाओं से बढ़ जाय तो यहाँ तक हो सकता है कि पायलट कुछ क्षणों के लिए बेहोश हो जाय, जो कि उनके और वायुयान के लिए बहुत खतरनाक हो सकता है।

पाठगत प्रश्न 4.3

1. एकसमान वेग से उड़ते हुए वायुयान मुड़ते समय आमतौर पर बैकिंत हो जाते हैं, चित्र (4.8)। स्पष्ट कीजिए कि वायुयान बैंकित क्यों हाते हैं? इस वायुयान का बल-निर्देशक आरेख बनाइए ($\mathbf{F}_a$ वायुयान पर वायु द्वारा लगाया गया बल है।) मान लीजिए $v = 100$ m s^{-1} की चाल से उड़ता हुआ वायुयान 30^0 बैंकिंग कोण पर मुड़ता है। इस मोड़ की वक्रता त्रिज्या का मान ज्ञात कीजिए। g का मान 10 m s^{-2} लीजिए।

2. उस कार की अधिकतम चाल क्या होगी जो क्षैतिज सड़क पर दौड़ती हुई 100 m त्रिज्या के घुमाव पर मुड़ती है। टायरों और सड़क के बीच घर्षण गुणंक का मान 0.90 है। g का मान 10 m s^{-2} ले।

3. मनोरंजक प्रदर्शनों में एक मजेदार खेल यह दिखाया जाता है कि एक रस्सी से पानी की भरी बाल्टी को बाँधकर ऊर्ध्वाधर वृत्त में इस तरकीब से घुमाया जाता है कि वृत्त के ऊपरी सिरे पर पहुँच कर बाल्टी उल्टी हो जाती है परन्तु पानी नहीं गिरता। इस करतब को करने के लिए बाल्टी वृत्त के ऊपरी सिरे पर होती है तो उस समय बाल्टी की न्यूनतम चाल के लिए त्रिज्या R के पदों का व्यंजक ज्ञात कीजिए R = 1.0 m के लिए चाल का मान ज्ञात कीजिए।

आपने क्या सीखा

- **प्रक्षेप्य गति** ऐसी गति है जिसका एक निश्चित दिशा में एकसमान वेग होता है तथा इस वेग की दिशा के लम्बवत एकसमान त्वरण होता है।

$$a_x = 0 \qquad a_y = -g$$

$$v_x = v_0 \cos\theta \qquad v_y = v_0 \sin\theta - g\,t$$

$$x = x_0 + (v_0 \cos\theta)\,t \qquad y = y_0 + (v_0 \sin\theta) - \frac{1}{2}\,g\,t^2$$

- ऊँचाई $h = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$

- $T = \dfrac{2v_0 \sin\theta}{g}$

- प्रक्षेप्य का परास $R = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$

- प्रक्षेप पथ का समीकरण $\quad y = (\tan\theta_0)\,x - \dfrac{g}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}\,x^2$

टिप्पणियाँ

- **वर्तुल गति** में गति एकसमान तब होती है जब पिंड की चाल एकसमान होती है। r त्रिज्या के वृत्त में एकसमान चाल υ से चक्कर लगाने वाले पिंड के एक समान वर्तुल गति का अभिकेन्द्र त्वरण निम्न समीकरण से प्राप्त होता है।

$$\mathbf{a}_r = -\frac{v^2}{r}\,\hat{\mathbf{r}}$$

जहाँ $\hat{\mathbf{r}}$ मात्रक सदिश है जो वृत्त के केन्द्र से पिंड की ओर निर्दिष्ट होता है। पिंड की चाल और इसकी कोणीय चाल में $\upsilon = r\,\omega$ संबंध होता है।

- पिंड पर लगे अभिकेन्द्र बल का मान निम्न होता है।

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}_r = \frac{m\,v^2}{r}\,\hat{\mathbf{r}} = m\,r\,\omega^2$$

- जब कोई पिंड ऊर्ध्व वृत्त में गति करता है तो उसका कोणीय वेग अचर नहीं रह सकता।
- ऊर्ध्व वृत्तीय गति में वृत्त के उच्चतम एवं निम्नतम बिन्दुओं पर न्यूनतम एवं अधिकतम वेगों के मान क्रमशः $\sqrt{gr}$ एवं $\sqrt{5gr}$ होते हैं।

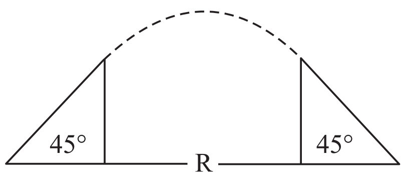
पाठांत प्रश्न

1. वृत्ताकार पथ में मुड़ते समय साइकिल सवार वृत्त की परिधि के अंदर की ओर क्यों झुक जाता है?
2. रेल पटरी के घुमावदार भाग में अंदर की पटरी के सपेक्ष बाहर की पटरी को ऊँचा क्यों कर दिया जाता है?
3. क्या वर्तुल गति में एकसमान चाल से घूमते हुए पिंड का त्वरण भी – एकसमान होता है?
4. समतल सड़क पर चलती बस की खिड़की से एक पत्थर फेंका जाता है सड़क के किनारे खड़े किसी प्रेक्षक को पृथ्वी पर पहुँचते हुए पत्थर का पथ कैसा दिखाई देगा?
5. बिना टूटे हुए कोई डोरी 100 N का अधिकतम बल झेल सकती है। 1m लम्बे डोरी के टुकड़े के एक सिरे पर 1kg द्रव्यमान बाँधकर इसकों क्षैतिज तल में घुमाया जाता है। चाल का वह अधिकतम मान परिकलित कीजिए जिससे पिंड को बिना डोरी टूटे घुमाया जा सके।
6. 10 m s^{-1} चाल से कोई मोटर साइकिल सवार 50 m त्रिज्या वाले घुमावदार मोड़ पर मुड़ता है। मुड़ते समय अभिकेन्द्र त्वरण क्या होगा?
7. क्षैतिज से 30° के कोण पर प्रारंभिक वेग 300 m s^{-1} से गोली दागी जाती है। बंदूक से कितनी दूरी पर जा कर गोली जमीन पर लगेगी?
8. किसी घड़ी की सेकंड की सुई की लंबाई 10 cm है। इस सुई की नोक की चाल क्या होगी?

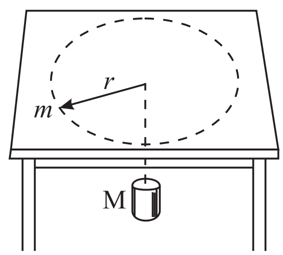
9. हिन्दी फिल्म में नायकों को आपने बड़ी लंबी कूद मार कर घोड़ों की पीठ और मोटर साइकिल पर बैठते देखा होगा। इस समस्या में कोई निडर मोटर साइकिल सवार किसी खाली जगह (gap) को 100 km h^{-1} के वेग से लाँघना चाहता है। (चित्र 4.9)। यदि दोनों ओर का आनत कोण 45^0 हो तो खाली जगह की अधिक से अधिक कितनी चौड़ाई होगी?

10. 500 m s^{-1} वेग से 30° के प्रक्षेप कोण से कोई गोला (shell) दागा जाता है। वेग के ऊर्ध्वाधर घटक, क्षैतिज घटक, गोले की अधिकतम ऊँचाई और परास का मान ज्ञात कीजिए।

11. पृथ्वी से 2000 मीटर की ऊँचाई पर 200 km h^{-1} की एकसमान चाल से क्षैतिज उड़ान भरते हुए कोई वायुयान भोजन का पैकेट गिराता है। इस पैकेट को पृथ्वी तक आने में कितना समय लगेगा? पैकेट छोड़े जाने के बिन्दु से पैकेट पृथ्वी पर कितनी क्षैतिज दूरी आगे गिरेगा?



चित्र 4.12



चित्र 4.13

12. v चाल से किसी वृत्त में घर्षणहीन (frictionless) मेज पर चक्कर लगाते m द्रव्यमान के साथ मेज में छेद करके M द्रव्यमान का पिंड डोरी द्वारा जोड़ दिया जाता है (चित्र 4. 10)। द्रव्यमान m द्रव्यमान के पिण्ड की वह चाल ज्ञात कीजिए जिससे कि M द्रव्यमान का पिंड विराम अवस्था में बना रहे।

13. 60 km h^{-1} की चाल से कोई कार 220 m त्रिज्या के घुमावदार (वृत्ताकार) पथ में चक्कर काट रही है। कार में बैठी 90 kg की सवारी पर अपकेन्द्र बल क्या होगा?

पाठगत प्रश्नों के उत्तर

4.1

(1) (a), (b), (d)

(2) (a) हाँ (b) हाँ (c) अधिकतम परास की गेंद

(3) अधिकतम परास $\dfrac{v_0^2}{g} = \dfrac{(9.5\ \text{m s}^{-1})^2}{9.78\ \text{m s}^{-2}} = 9.23$ m

अतः अन्तर का मान 9.23 m – 8.90 m = 0.33 m

4.2

(1) (a) हाँ (b) नहीं (c) हाँ (d) नहीं

वेग और त्वरण समान नहीं हैं क्योंकि इनकी दिशाएं लगातार बदल रही हैं।

(2) चूँकि

$$a = \frac{v^2}{r}, r = \frac{v^2}{\alpha} = \frac{(9.0\,\text{m s}^{-1})^2}{3\,\text{m s}^{-2}} = 27\text{ m}$$

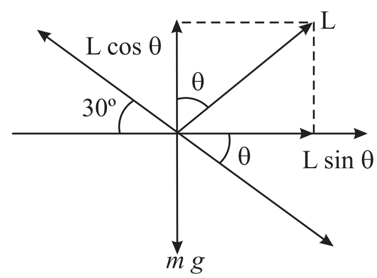
(3) $$a = \frac{c^2}{r} = \frac{(3\times10^8\text{ m s}^{-1})^2}{10\times10^3\text{ m}}$$

$$= 9 \times 10^{13}\text{ m s}^{-2}$$

4.3

(1) यह प्रश्न सड़कों की बैंकिंग के समान है। यदि वायुयान बैंक करता है तो बल F का घटक बल त्रिज्या की दिशा में कार्य करके आवश्यक अभिकेन्द्र त्वरण प्रदान करता है। वक्रता त्रिज्या का मान निम्नलिखित होता है:

$$\text{R} = \frac{v^2}{g\tan\theta_0} = \left(\frac{100\text{ m s}^{-1}}{10\text{ m s}^{-2}\times\tan 30^\circ}\right)^2 = 10\sqrt{3}\text{ m} = 17.3\text{ m}$$



चित्र 4.14

(2) घर्षण बल, अभिकेन्द्र-त्वरण उपलब्ध कराता है। अत:

$$\text{F}_s = \mu_s\text{N} = \frac{mv^2}{r}$$

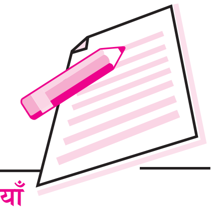
चूँकि सड़क क्षैतिज (समतल) है इसलिए $\text{N} = \text{mg}$, इसलिए

$$\mu_s\, mg = \frac{mv^2}{r}$$

अथवा $\upsilon^2 = \mu_s g\, r$

or $\upsilon = (0.9 \times 10\text{ m s}^{-2} \times 100\text{ m})^{1/2}$

$\upsilon = 30\text{ m s}^{-1}$.



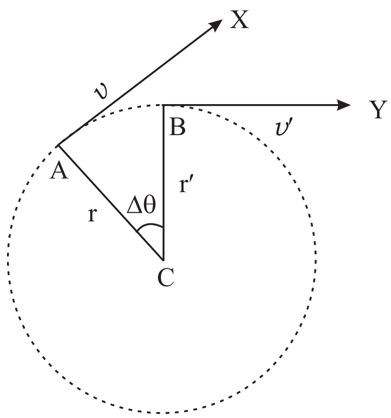
टिप्पणियाँ

(3) चित्र 4.15 में बाल्टी वृत के ऊपरी बिन्दु पर मुक्त निकाय आरेख दशाया गया हे। बाल्टी घुमाने पर पानी इससे बाहर न गिरे इस के लिए आवश्यक शर्त यह है कि जल का भार आवश्यक अभिकेन्द्र बल प्रदान करे

अर्थात्, $mg = \dfrac{mv^2}{r}$

$\Rightarrow$ $v^2 = Rg$

अथवा $v = \sqrt{Rg}$



चित्र. 4.15

यह ऊर्ध्वाधर वृत्त के ऊपरी सिरे पर बाल्टी की चाल का न्यूनतम मान है।

R = 1.0 m तथा g = 10 m s^{-2} रखने पर

$$v = \sqrt{1.0\ \text{m} \times 10\ \text{m s}^{-2}} = 3.2\ \text{m s}^{-1}$$

पाठांत अभ्यास के उत्तर

5. 10 m s^{-1}
6. 2 m s^{-2}
7. $900\sqrt{3}$ m
8. 1.05×10^{-3} m s^{-1}
9. 77.1 m
10. $v_x = 250\sqrt{3}$ m s^{-1}

    $vy = 250$ m s^{-1}

    ऊर्ध्वाधर ऊँचाई = 500 m

    क्षैतिज परास = 3125 m
11. $t = 20$ s, 999.9 m
12. $v = \sqrt{\dfrac{Mgr}{m}}$
13. 125 N