7

दृढ़ पिंड की गति

अभी तक आपने एकल बिंदु द्रव्यमान की गति के विषय में अध्ययन किया। यह सरलीकरण यांत्रिकी के नियमों को समझने के लिये काफी उपयोगी है। लेकिन वास्तविक जीवन में वस्तुएं बहुत से अवयवों से मिलकर बनी होती हैं। एक छोटे से पत्थर के टुकड़े में लाखों कण होते हैं। क्या इस स्थिति में प्रत्येक कण के लिए आप अलग-अलग समीकरण लिखेंगे? इस प्रकार लाखों समीकरणों की आवश्यकता होगी। क्या इसका कोई सरल विकल्प है? इन प्रश्नों के उत्तर ढूँढ़ते समय आप द्रव्यमान केन्द्र और जड़त्व आघूर्ण आदि के बारे में जान सकेंगे। जड़त्व-आधूर्ण घूर्णन गति में वही भूमिका निबाहता है जो द्रव्यमान स्थानान्तरण-गति में निबाहता है।

इसके साथ ही हम भौतिकी की महत्वपूर्ण संकल्पना और बल आघूर्ण एवं कोणीय संवेग के विषय में भी पढ़ेंगे। यदि किसी घूर्णन करने वाले तंत्र पर कोई बाह्य असंतुलित बल आघूर्ण आरोपित नहीं होता, तो इसका कोणीय संवेग संरक्षित रहता है। इस बात की भौतिकी में बहुत उपयोगिता है। यह हमें बतलाता है कि कैसे एक तैराक एक डुबकी पटल (डाइविंग बोर्ड) से कलाबाजी करता हुआ नीचे पानी में कूदता है।

उद्देश्य

इस पाठ को पढ़ने के पश्चात आप:

- एक दृढ़ पिण्ड में द्रव्यमान केन्द्र को परिभाषित कर सकेंगे;
- यह व्याख्या कर पाएंगे कि दृढ़ पिण्ड की गति, स्थानांतरण गति और घूर्णन गति दोनों का संयोजन क्यों है;
- जड़त्व आघूर्ण को परिभाषित कर सकेंगे तथा लम्बवत् एवं समान्तर अक्षों के प्रमेयों का कथन कर सकेंगे;
- बल आघूर्ण परिभाषित कर सकेंगे तथा इसके द्वारा उत्पन्न घूर्णन की दिशा ज्ञात कर सकेंगे;
- एक दृढ़ पिण्ड की गति का समीकरण लिख सकेंगे;
- कोणीय संवेग संरक्षण के सिद्धांत को बतला सकेंगे और

- एक नत समतल पर गतिमान दृढ़ पिण्ड की गति के अंत में उसके वेग की गणना कर सकेंगे।

7.1 दृढ़ पिण्ड

जैसा कि ऊपर बताया जा चुका है कि बिंदु द्रव्यमान एक आदर्श अवधारणा है जिसे विवेचन को सरल बनाने के लिए उपयोग में लाया जाता है। व्यवहार में जब दो पिण्डों के बीच अन्योन्य क्रिया होती है तथा उनके बीच की दूरी उनके आकार की तुलना में बहुत अधिक हो तो इस स्थिति में उनके आकार को नगण्य मानकर एक बिंदु द्रव्यमान के रुप में लिया जा सकता है। *क्या आप ऐसे दो उदाहरण दे सकते हैं जिनमें पिण्डों का आकार महत्व नहीं रखता हो?* सितारों का आकार आकाशगंगा की तुलना में बहुत कम होता है। अतः सितारों को बिंदु द्रव्यमान माना जा सकता है। इसी प्रकार पृथ्वी–चन्द्रमा निकाय में, चन्द्रमा का आकार नगण्य माना जा सकता है। परन्तु जब हम किसी अक्ष के इर्द गिर्द एक दृढ़ पिण्ड के घूर्णन पर विचार करते हैं तो पिण्ड का आकार महत्वपूर्ण हो जाता है। जब हम किसी निकाय के घूर्णन पर विचार करते हैं तो हम सामान्यतया यह मान लेते हैं कि घूर्णन की अवधि में इनके अवयव कणों के बीच की दूरी अचर रहती है। कणों के इस प्रकार के निकाय को **दृढ़ पिण्ड** कहते हैं।

दृढ़ पिण्ड एक ऐसा पिण्ड होता है जिसके अवयव कण गति की अवस्था में भी अपनी सापेक्ष स्थिति बनाए रखते हैं अर्थात् कणों के बीच की दूरी में परिवर्तन नहीं होता है।

इस परिभाषा से स्पष्ट है कि गतिमान अवस्था में दृढ़ पिण्ड का आकार संरक्षित रहता है। तथापि, बिंदु कण की तरह एक दृढ़ पिण्ड भी आदर्श स्थिति है क्योंकि, यदि किसी दृढ़ पिण्ड पर अत्यधिक बल लगाएं तो उनके कणों के बीच की दूरी में परिवर्तन हो जाता हैं ,भले ही ये परिवर्तन अत्यन्त सूक्ष्म ही क्यों न हों। इस प्रकार से प्रकृति में कोई भी आदर्श दृढ़ पिण्ड नहीं है। सामान्यतः हम एक ठोस वस्तु को दृढ़ पिंड मान लेते हैं। एक क्रिकेट की गेंद, लकड़ी का गुटका, एक इस्पात की डिस्क और पृथ्वी तथा चन्द्रमा को भी इस अध्याय में दृढ़ पिंड मान लिया गया है।

क्या बाल्टी में पानी को एक दृढ़ पिण्ड माना जा सकता है? स्पष्ट रुप से एक बाल्टी में पानी दृढ़ पिण्ड नहीं हो सकता क्योंकि जब बाल्टी को इधर–उधर धकेला जाता है तो पानी आकार बदलता है।

अब आप यह जानना चाहेंगे कि दृढ़ पिंड के विषय में आपने क्या समझा है?

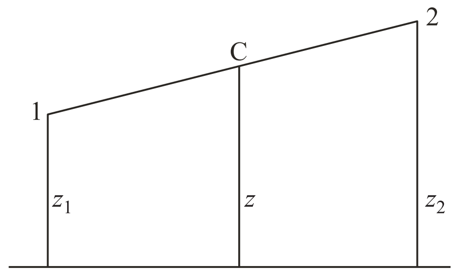
पाठगत प्रश्न 7.1

1. लकड़ियों की छः छड़ों का एक फ्रेम बनाया गया है। छड़ें इस प्रकार से एक–दूसरे से सटी हैं कि ये घूम नहीं सकतीं अथवा अलग नहीं हो सकती हैं। क्या यह निकाय एक दृढ़ पिण्ड है?
2. क्या रेत के ढेर को एक दृढ़ पिण्ड माना जा सकता है? अपने उत्तर की व्याख्या करें।

7.2 एक दृढ़ पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र

बहुत से कणों से बने दृढ़पिण्डों पर विचार करने से पूर्व एक काफी सरल निकाय पर विचार करें। माना समान द्रव्यमान के दो कण एक छड़ से जुड़े हुए हैं जिसका अपना कोई द्रव्यमान नहीं है और जो अवितान्य है (जिसकी लंबाई अचर है)। क्या हम इस तंत्र को दृढ़ पिंड कह सकते हैं?

इस निकाय में दो कणों के बीच की दूरी नियत है, अतः यह एक दृढ़ पिंड है।



चित्र 7.1 : दो कणों का निकाय

मान लीजिए कि दो कण एक क्षैतिज समतल से z_1 और z_2 ऊँचाईयों पर हैं (चित्र 7.1)। यह भी मान लें कि उस छोटे-से क्षेत्र में, जिसमें इन दो कणों का निकाय घूमता है, गुरुत्वीय बल एक समान है। दोनों कणों पर mg बल कार्य करता है। अतः निकाय पर लगने वाला कुल बल $2mg$ है। अब हमें निकाय में एक ऐसे बिंदु का पता लगाना है कि यदि $2mg$ बल उस बिन्दु पर लगे तो निकाय की गति उसी प्रकार की हो जैसी कि दोनों कणों पर लगे प्रत्येक बल mg के लगने से होती है। मान लीजिए कि बल $2mg$ बिन्दु C पर लगता है जिसकी क्षैतिज समतल से ऊँचाई z है। कण 1 तथा 2 की स्थितिज ऊर्जाएं क्रमशः mgz_1 तथा mgz_2 हैं। बिंदु C पर माने गए कण की स्थितिज ऊर्जा $2mgz$ हुई। चूँकि इसका मान दोनों कणों की संयुक्त स्थितिज ऊर्जा के बराबर होना चाहिए। अतः

$$2\,mgz = mgz_1 + mgz_2 \tag{7.1}$$

या

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2} \tag{7.2}$$

ध्यान दीजिए कि इस स्थिति में बिंदु C दो कणों के बीच स्थित होता है। यदि दोनों द्रव्यमान असमान हों, तब यह बिंदु बीच में नहीं रहेगा। यदि कण 1 का द्रव्यमान m_1 और कण 2 का द्रव्यमान m_2 हो तो समीकरण (7.1) का रुप निम्नवत हो जाएगा:

$$(m_1 + m_2)\,gz = m_1gz_1 + m_2\,gz_2 \tag{7.3}$$

अतः

$$z = \frac{m_1z_1 + m_2z_2}{(m_1 + m_2)} \tag{7.4}$$

बिंदु C निकाय का द्रव्यमान केन्द्र (cm) कहलाता है। वास्तव में यह मात्र एक गणितीय साध न है और द्रव्यमान केन्द्र जैसा कोई भौतिक कण नहीं होता है। इस संकल्पना को समझने के लिए निम्न उदाहरण का सावधानीपूर्वक अध्ययन करें।

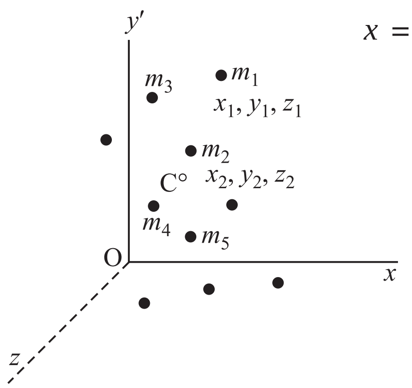
उदाहरण 7.1 : यदि उपर्युक्त स्थिति में एक कण का द्रव्यमान दूसरे कण का दुगुना हो तो, द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति ज्ञात करें।

टिप्पणियाँ

हल : $m_1 = m$ और $m_2 = 2\,m$, तब समीकरण (7.4) से प्राप्त होगा।

$$z = \frac{m\,z_1 + 2\,m\,z_2}{(m + 2\,m)} = \frac{z_1 + 2\,z_2}{3}$$

जब एक पिण्ड अनेक कणों से निर्मित होता है, तो द्रव्यमान केन्द्र को परिभाषित करने के लिए समीकरण (7.4) को व्यापक बना लेते हैं। यदि कण का द्रव्यमान m_1 और किसी एक फ्रेम के निर्देशांकों के सापेक्ष उसके निर्देशांक (x_1, y_1, z_1), द्रव्यमान m_2 के निर्देशांक (x_2, y_2, z_2) तथा इसी प्रकार अन्य द्रव्यमानों के निर्देशांक हों (चित्र 7.2) तो द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांक होंगे:



चित्र. 7.2 : अनेक कणों से बने एक निकाय (पिण्ड) का द्रव्यमान केन्द्र

$$x = \frac{m_1\,x_1 + m_2\,x_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\,x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\,x_i}{M} \qquad (7.5)$$

इसी प्रकार
$$y = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\,y_i}{M} \qquad (7.6)$$

एवं
$$z = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\,z_i}{M} \qquad (7.7)$$

जहाँ $\sum_{i=1}^{N} m_i$ सभी कणों के द्रव्यमानों का योग दर्शाता है, अत: $\sum_{i=1}^{N} m_i$ वस्तु का कुल द्रव्यमान (M) है।

हमें द्रव्यमान केन्द्र को इतना सुस्पष्ट रुप से परिभाषित करने की क्या आवश्यकता है?

याद कीजिए, विस्थापन की दर को वेग कहते हैं और वेग की दर को त्वरण कहते हैं। यदि a_{1x} कण 1 के x-अक्ष के अनुदिश त्वरण के घटक को दर्शाता है और इसी प्रकार अन्य कणों के लिए भी संगत घटक लें तो समी. (7.5) की सहायता से हम लिख सकते हैं।

$$M\,a_x = m_1\,a_{1x} + m_2\,a_{2x} + \ldots \qquad (7.8)$$

जहाँ a_x, x-दिशा में द्रव्यमान केन्द्र का त्वरण है। इसी प्रकार y- और z- अक्षों की दिशा में भी त्वरणों के लिए समान स्वरूप के समीकरण होंगे। सदिश निरुपण का उपयोग करते हुए इन तीनों समीकरणों को एक समीकरण के रुप में लिखा जा सकता है:

$$M\,\mathbf{a} = m_1\,\mathbf{a_1} + m_2\,\mathbf{a_2} + \ldots \qquad (7.9)$$

लेकिन द्रव्यमान एवं त्वरण का गुणनफल बल होता है। अत: $m_1\,a_1$ कण 1 पर लगने वाले सभी बलों का योग है। इसी प्रकार $m_2\,\mathbf{a}_2$ कण 2 पर लगने वाला नेट बल है। अर्थात् समीकरण (7.9) के दाहिनी ओर लिखे बल, पिण्ड पर लगने वाले समस्त बल हैं।

पिण्ड पर लगने वाले बल दो प्रकार के हो सकते हैं। कुछ बल पिण्ड पर बाहरी स्रोतों से लगते हैं। ऐसे बलों को **बाह्य बल** कहते हैं। इस बल का एक सुपरिचित उदाहरण गुरुत्व है। कुछ बल पिण्ड के अन्दर के कणों की पारस्परिक अन्योन्य क्रियाओं के फलस्वरुप भी लगते हैं। ऐसे बलों को **आंतरिक बल** कहते हैं। ऐसे बल का एक सुपरिचित उदाहरण ससंजक बल है।

एक दृढ़ पिण्ड के लिए आन्तरिक बलों का योग शून्य होता है क्योंकि वे एक-दूसरे को जोड़े के रुप में निरस्त करते हैं। अत: पिण्ड के अलग-अलग कणों के त्वरण बाह्य बलों के परिणामी के कारण होते हैं। इस संदर्भ में समीकरण (7.9) को इस प्रकार लिख सकते हैं-

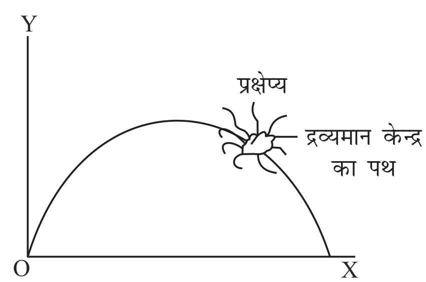
$$M\mathbf{a} = \mathbf{F}_{ext} \tag{7.10}$$

इससे स्पष्ट है कि पिण्ड का ***CM* (द्रव्यमान केन्द्र) कुछ इस तरह से गतिमान होता है जैसे कि पिंड का सारा द्रव्यमान उस बिंदु पर स्थित हो तथा पिण्ड पर लगने वाले सभी बाहरी बल उस बिन्दु पर लग रहे हों।** ध्यान दें कि द्रव्यमान केन्द्र की परिभाषा से व्युत्पत्ति कितनी आसान हो जाती है। अब हमारा किसी पिण्ड के लाखों एकल कणों से कोई वास्ता नहीं रहता है, केवल द्रव्यमान केन्द्र निर्धारण की आवश्यकता रह जाती है- ताकि एक दिए गए पिंड की गति का निर्धारण किया जा सके। यह तथ्य कि द्रव्यमान केन्द्र की गति बाह्य बलों द्वारा निर्धारित होती है तथा आंतरिक बलों की इसमें कोई भूमिका नहीं है, मनोरंजक निष्कर्षों की ओर ले जाता है।

आप प्रक्षेप्य गति से सुपरिचित हैं। क्या आपको याद है कि प्रक्षेप्य द्वारा चला गया पथ कैसा होता है?

प्रक्षेप्य पथ परवलयाकार होता है।

मान लीजिए कि प्रक्षेप्य एक बम है और वह ऊपर आकाश में हवा के बीच अनेक टुकड़ों में विस्फोटित हो जाता है। विस्फोट आंतरिक बलों के कारण होता है। बाह्य बल में, (जो कि गुरुत्वीय बल है) कोई परिवर्तन नहीं आता है। अत: प्रक्षेप्य का द्रव्यमान केन्द्र उसी परवलय पर गति करता रहता है। जिस पर यदि विस्फोट नहीं होता तो वह गमन करता (चित्र 7.3)।



चित्र.7.3 : एक प्रक्षेप्य का द्रव्यमान केन्द्र

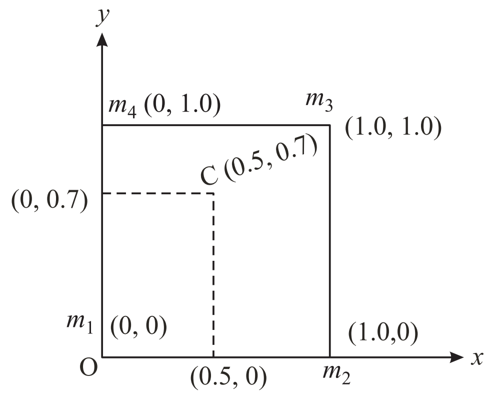
बम के टुकड़े सभी दिशाओं में परवलयाकार पथों में गति कर सकते हैं। लेकिन उनका द्रव्यमान केन्द्र मूल परवलय पर ही स्थित होता है। अब आप द्रव्यमान केन्द्र की संकल्पना का महत्व समझ गए होंगे। आगामी अनुच्छेदों में आपका सामना कुछ अन्य महत्त्वपूर्ण उदाहरणों से होगा।

टिप्पणियाँ

अत: अब हम एक सरल उदाहरण द्वारा देखते हैं कि किसी निकाय का द्रव्यमान केन्द्र कैसे ज्ञात किया जाता हैं।

उदाहरण 7.2 : मान लीजिए 1.0 kg, 2.0 kg, 3.0 kg और 4.0 kg के चार द्रव्यमान एक वर्ग के चारों कोनों पर स्थित हैं: वर्ग की भुजा 1.0 m है। इस निकाय के द्रव्यमान केन्द्र (C.M) की गणना कीजिए।

हल : वर्ग की रचना हम एक तल में कर सकते हैं। मान लीजिए यह तल (x,y) है। यह भी मानिए कि वर्ग का एक कोना तल के अक्षों के मूल बिन्दु पर पड़ता है। x तथा y दो अक्ष हैं। चार द्रव्यमानों के निर्देशांक m_1 (0,0), m_2 (1.0,0), m_3 (1.0,1.0) और m_4 (0, 1.0) हैं और सभी (लंबाइयाँ) दूरियाँ मीटर में हैं। (चित्र 7. 4)



चित्र. 7.4 : किसी वर्ग के चारों शीर्षों पर स्थित द्रव्यमानों के द्रव्यमान-केन्द्र का स्थिति निर्धारण

समीकरणों (7.5) एंव (7.6) का उपयोग करने पर

$$x = \frac{1.0\times0+2.0\times1.0+3.0\times1.0+4.0\times0}{1.0+2.0+3.0+4.0} \text{ मीटर} = 0.5 \text{ मीटर}$$

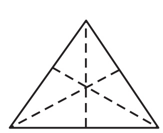
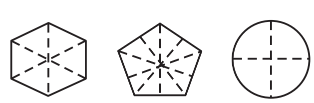
और
$$y = \frac{1.0\times0+2.0\times0+3.0\times1.0+4.0\times1.0}{1.0+2.0+3.0+4.0} \text{ मीटर} = 0.7 \text{ m}$$

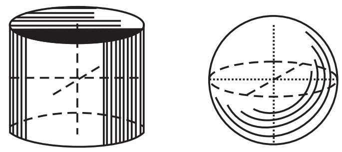
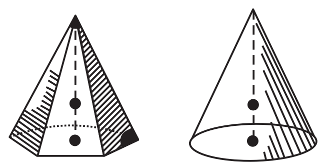
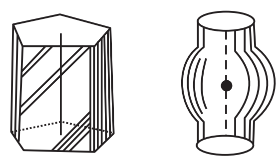
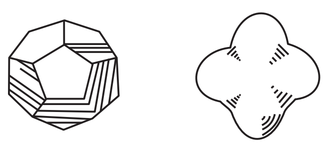
द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांक (0.5 m, 0.7 m) हैं और चित्र (7.4) में इसे C से निरुपित किया गया है। यह वर्ग के केन्द्र पर नहीं है। यद्यपि वर्ग एक सममित (symmetrical) आकृति है।

द्रव्यमान केन्द्र वर्ग के केन्द्र पर न होने के क्या कारण हैं?

इस प्रश्न का उत्तर प्राप्त करने के लिए द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांक उस स्थिति के लिए प्राप्त करें जब सभी द्रव्यमान समान हैं।

सारणी 7.1 कुछ नियमित एवं सममित पिंडों के द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति

चित्र	द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति
	त्रिभुजाकार प्लेट तीनों माध्यिकाओं का प्रतिच्छेदन बिंदु
	नियमित बहुभुज और वृत्ताकार प्लेट आकृति के ज्यामितीय केन्द्र पर

	बेलन तथा गोला आकृति के ज्यामितीय केन्द्र पर
	पिरामिड और शंकु आधार के केन्द्र और शीर्ष को जोड़ने वाली रेखा पर आधार से $h/4$ ऊँचाई पर
	अक्षीय सममिति वाली आकृति सममित आकृति के अक्ष पर
	सममित केन्द्र वाली आकृति

विस्तृत पिंडों के द्रव्यमान केन्द्रों की स्थिति की गणना आसानी से नहीं की जा सकती है। क्योंकि इसके लिए हमें पिंड का निर्माण करने वाले बहुत-से कणों पर विचार करना होगा। यह तथ्य कि किसी दृढ़ पिंड के सभी कणों का द्रव्यमान समान होता है और वे पिंड में समान रुप से वितरित रहते हैं - गणना को कुछ आसान बना देते हैं।

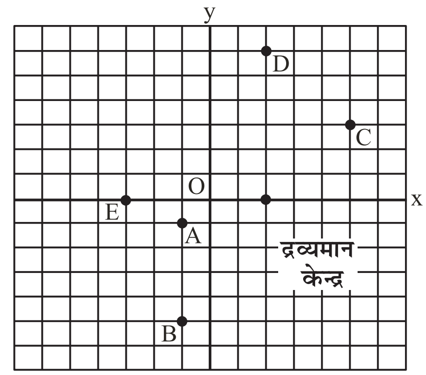
यदि किसी पिंड की आकृति नियमित और सममित हो, जैसे बेलनाकार अथवा गोलाकार तो गणना कुछ सरल हो जाती है। लेकिन ये गणनाएं इस पुस्तक के विषय क्षेत्र से बाहर हैं। फिर भी द्रव्यमान केन्द्र के महत्व को ध्यान में रखते हुए सारणी 7.1 में कुछ नियमित एवं सममित पिण्डों के द्रव्यमान केन्द्र दिए गए हैं।

द्रव्यमान केन्द्र के विषय में दो बातें याद रखनी चाहिए (i) द्रव्यमान केन्द्र वस्तु की सीमा से बाहर हो सकता है, जैसे किसी अंगूठी के लिए (ii) जब दो वस्तुएं एक-दूसरे के चारों ओर घूमती हैं तो वे वास्तव में अपने उभयनिष्ट द्रव्यमान केन्द्र के चारों ओर घूमती हैं। उदाहरण के लिए तारों के बायनेरी (Binary) निकाय में (युग्मतारानिकाय में) तारे उभयनिष्ठ द्रव्यमान केन्द्र का चक्कर लगाते हैं। सूर्य-पृथ्वी निकाय भी अपने उभयनिष्ठ द्रव्यमान केन्द्र का परिक्रमण करता है। लेकिन चूँकि सूर्य का द्रव्यमान पृथ्वी की तुलना में काफी अधिक होता है, निकाय का द्रव्यमान-केन्द्र सूर्य के केन्द्र के काफी समीप होता है।

अब यह आपका अपनी प्रगति जाँचने का समय है।

टिप्पणियाँ

पाठगत प्रश्न 7.2



चित्र. 7.5

1. दिखाई गई ग्रिड में A, B, C, D और E कण हैं जिनके द्रव्यमान क्रमशः 1.0 kg, 2.0 kg, 3.0 kg, 4.0 kg और 5.0 kg है। निकाय के द्रव्यमान केन्द्र के स्थिति निर्देशांक ज्ञात करें (चित्र 7.5)।

2. यदि तीन कण m_1, m_2, और m_3 जिनके द्रव्यमान क्रमशः 1.0 kg, 2.0 kg और 3.0 kg हैं, एक समत्रिबाहु त्रिभुज के कोनों पर अवस्थित हैं। निकाय के द्रव्यमान केन्द्र के स्थिति निर्देशांक ज्ञात करें।

3. दर्शाइए कि दो द्रव्यमानों की उनके द्रव्यमान केन्द्र से दूरियाँ उनके द्रव्यमान की व्युत्क्रमानुपाती होती हैं।

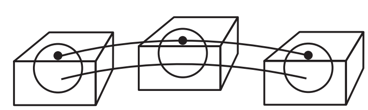
7.3 दृढ़ पिण्ड की स्थानान्तरीय एवं घूर्णन गति - एक तुलना

यदि एक दृढ़ पिण्ड इस प्रकार चलता है कि इसके सभी कण - समान्तर पथ के अनुदिश गति करते हैं (चित्र 7.6) तो इसकी गति को स्थानान्तरीय (Translational) गति कहते हैं। चूँकि सभी कण समान गति करते हैं, अतः इसका द्रव्यमान केन्द्र भी एकसमान पथ का अनुसरण करता है। अतः एक स्थानान्तरीय गति में वस्तु की गति समीकरण (7.10) द्वारा दिखायी जाती है:

$$M\mathbf{a} = \mathbf{F}_{ext}$$

क्या अब आप किसी वस्तु के द्रव्यमान केन्द्र को परिभाषित किए जाने का लाभ समझ चुके हैं? इसकी सहायता से किसी वस्तु की स्थानान्तरीय गति एक तुल्य द्रव्यमान के एकल कण की गति के समीकरण से दिखाई जा सकती है। यह कण द्रव्यमान केन्द्र पर स्थित है और दृढ़ वस्तु पर लगने वाले सभी कार्यकारी बाह्य बलों का योग इस पर कार्य करता है। इस संकल्पना को ठीक ढंग से समझने के लिए निम्न क्रियाकलाप करें:

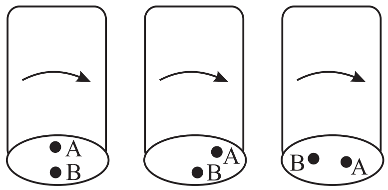
क्रियाकलाप 7.1



चित्र. 7.6 : एक लकड़ी का गुटका फर्श के तल पर चल रहा हैं। गुटका एक स्थानान्तरीय गति करता है।

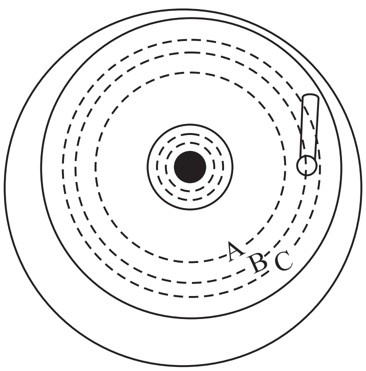
एक लकड़ी का गुटका लें। इसकी किसी भी सतह पर दो या तीन चिह्न बनाएं। अब चिह्न को अपनी ओर रखें और गुटके को क्षैतिज तल में एक धक्का दें। इन चिह्नों द्वारा बनाए गए पथों के निशान देखें। ये सभी चिह्न सतह के समान्तर एक-दूसरे के समान्तर गति करते हैं। आप यह आसानी से देख सकते हैं कि पथों की लंबाइयाँ भी बराबर हैं। (चित्र 7.6)

क्रियाकलाप 7.2



चित्र. 7.7 :एक बेलन की लुढ़कने वाली गति A ने सतह के समान्तर गति: के साथ-साथ वृत्तीय गति भी की है।

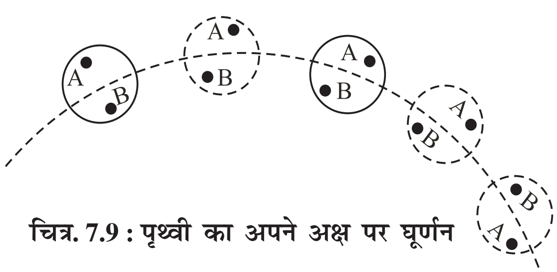
अब हम एक दूसरा सरल प्रयोग करते हैं। एक बेलनाकार लकड़ी का टुकड़ा लीजिए। इसके समतल सिरे पर एक या दो निशान बना दें। अब बेलन को धीरे से तल पर लुढ़का दें। निशान लगा हुआ समतल हिस्सा अपनी ओर रखे चित्र (7.7)। यह सतह के समान्तर चलने के साथ वृत्ताकार गति भी करता हैं अत: पिंड ने स्थानान्तरीय एवं घूर्णन दोनों प्रकार की गतियाँ की हैं। हालांकि दृढ़ वस्तुओं की आम गति स्थानान्तरीय (Translational) एवं घूर्णी, दोनों प्रकार की होती हैं लेकिन यदि पिंड का एक बिंदु नियत कर दिया जाए तो यह केवल घूर्णी गति ही कर सकता है। इस कार्य के लिए नियत कर दिया जाने वाला सबसे सुविधाजनक बिंदु इसका द्रव्यमान केन्द्र है।



चित्र. 7.8 : चक्की की शुद्ध घूर्णन गति

आपने आटा पीसने वाली चक्की अवश्य देखी होगी। पत्थर का हत्था एक वृत्तीय पथ में गति करता है। पत्थर के सभी बिंदु भी वृत्तीय पथ में गति करते हैं, जिनका अक्ष – चक्की के पत्थर के केन्द्र से गुजरता है (चित्र 7.8)।

एक दृढ़ पिंड की गति जिसमें सभी कण संकेंद्री वृत्तीय पथ में गति करते हैं, घूर्णन गति कहलाती है।

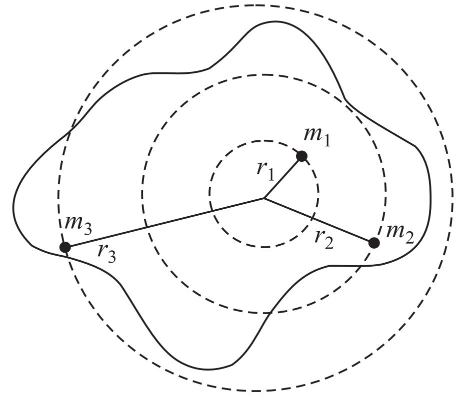


चित्र. 7.9 : पृथ्वी का अपने अक्ष पर घूर्णन

हम ऊपर देख चुके हैं कि एक दृढ़ पिंड की स्थानान्तरीय गति एकल कण की गति के समीकरण के तुल्य दर्शाई जा सकती है। आप इन समीकरणों से पूर्व परिचित हैं। अत: इस अध्याय में हम केवल एक दृढ़ वस्तु की घूर्णन गति पर ही ध्यान केन्द्रित करेंगे। पिंड के किसी एक बिंदु को स्थिर करके घूर्णन गति की जा सकती है (इस स्थिति में इसकी स्थानान्तरीय गति नहीं होगी)। गणितीय सुविधा के लिए इस बिंदु को द्रव्यमान केन्द्र (CM) लिया जाता है। ऐसी स्थिति में घूर्णन द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के परित: होता है। इसका एक अच्छा उदाहरण पृथ्वी का अपनी धुरी पर घूर्णन है (चित्र 7.9)। आपने पिछले अध्याय में अध्ययन किया कि रेखीय गति में वस्तु का द्रव्यमान एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। यह किसी लगाए गए बल द्वारा किसी वस्तु में उत्पन्न त्वरण का निर्धारण करता है। क्या हम कोई इसी प्रकार की किसी राशि का निर्धारण घूर्णी गति के लिए भी कर सकते हैं। आइए देखें।

7.3.1 जड़त्व आघूर्ण

मान लीजिए C एक दृढ़ पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र है और पिंड C से गुजरने वाले अक्ष के चतुर्दिक घूर्णन गति करता है (चित्र 7.10)।



चित्र. 7.10 :एक समतल पटल का अपने द्रव्यमान केन्द्र से गुजरती अक्ष के चारों ओर घूर्णन

मान लीजिए m_1, m_2, m_3... द्रव्यमान के कण घूर्णन अक्ष से क्रमशः r_1, r_2, r_3... दूरी पर स्थित हैं और क्रमशः υ_1, υ_2, υ_3 वेग से गति कर रहे हैं। m_1 द्रव्यमान के कण 1 की गतिज ऊर्जा (½) $m_1 \upsilon_1^2$ है। इसी प्रकार m_2 द्रव्यमान के कण की गतिज ऊर्जा (½) $m_2 \upsilon_2^2$ है। सभी कणों की गतिज ऊर्जा को जोड़ने पर हमें पिंड की कुल ऊर्जा प्राप्त होती है। यदि T पिंड की कुल गतिज ऊर्जा बतलाता है, तो हम लिख सकते हैं।

$$T = (½)\, m_1 \upsilon_1^2 + (½)\, m_2 \upsilon_2^2 + ...$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2}\right) m_i \upsilon_i^2 \qquad (7.11)$$

जहाँ $\sum\limits_{i=1}^{i=n}$ सभी कणों के योग को दर्शाता है।

अध्याय 4 में हम पढ़ चुके हैं कि कोणीय चाल (ω) व रेखीय चाल (υ) के बीच के संबंध के लिए समीकरण $\upsilon = r\,\omega$ है। इस परिणाम को समीकरण (7.11) में प्रयोग करने पर,

$$T = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2}\right) m_i (r_i \omega)^2 \qquad (7.12)$$

यहाँ ध्यान दें कि हमने ω के साथ i का प्रयोग नहीं किया है क्योंकि दृढ़ पिंड के सभी कणों की कोणीय चाल ω बराबर होती है। समीकरण (7.12) को इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$T = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{i=n} m_i\, r_i^2\right)\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}\, I\, \omega^2 \qquad (7.13)$$

राशि

$$I = \sum_i m_i\, r_i^2 \qquad (7.14)$$

को पिंड का जड़त्व-आघूर्ण कहते हैं।

उदाहरण 7.3 : m द्रव्यमान के चार कण एक वर्ग जिसकी प्रत्येक भुजा L है, के चारों कोनों पर स्थित हैं। उनका जड़त्व-आघूर्ण, वर्ग के केन्द्र से गुजरती और इसके तल के लम्बवत अक्ष के परितः परिकलित कीजिए।

हल : सरल ज्यामिती से हम जानते हैं कि प्रत्येक कण की इसके अक्ष से दूरी $r = L\sqrt{2}$. अतः

$$I = mr^2 + mr^2 + mr^2 + mr^2$$
$$= 4mr^2$$
$$= 4m\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^2 \qquad (\text{चूँकि } r = \frac{L}{\sqrt{2}}).$$
$$= 2mL^2$$

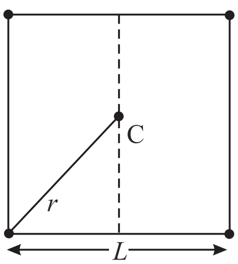


Fig. 7.11

यहाँ यह ध्यान देने योग्य है कि जड़त्व आघूर्ण को किसी घूर्णन अक्ष के संदर्भ में परिभाषित किया जाता है। इसलिए, जब भी आप जड़त्व आघूर्ण की चर्चा करें, तो घूर्णन अक्ष भी इंगित किया जाना चाहिए। वर्तमान उदाहरण में I, वर्ग के केन्द्र से होती हुई तथा चारों द्रव्यमानों के तल के लम्बवत् अक्ष के परितः पिंड का जड़त्व-आघूर्ण है (चित्र 7.10)।

जड़त्व-आघूर्ण kg m^2 में व्यक्त किया जाता है। एक दृढ़ पिण्ड का जड़त्व-आघूर्ण बहुधा

$$I = MK^2 \text{ के रूप में लिखा जाता है।} \qquad (7.15)$$

जहाँ M वस्तु का कुल द्रव्यमान है और K वस्तु की परिभ्रमण-त्रिज्या (Radius of gyration)) है। परिभ्रमण-त्रिज्या घूर्णन अक्ष से वह दूरी है जिस पर समस्त पिण्ड के द्रव्यमान को रखा हुआ माना जा सकता है। जिससे कि हमें वही जड़त्व-आघूर्ण प्राप्त हो जो कि वास्तव में पिंड का है। यहाँ यह याद रखना महत्वपूर्ण है कि किसी अक्ष के गिर्द एक वस्तु का जड़त्व-आघूर्ण उस अक्ष के चतुर्दिक द्रव्यमान के वितरण पर निर्भर करता है। यदि द्रव्यमान का वितरण परिवर्तित होता है, तो उसका जड़त्व आघूर्ण भी बदल जाएगा। इसे उदाहरण 7.3 की सहायता से समझा जा सकता है। माना कि हम दो विपरीत कोनों में m द्रव्यमान और रख देते है। तब वर्ग के लंबवत C से गुजरने वाली अक्ष के संदर्भ में-

$$\mathrm{I} = mr^2 + 2mr^2 + mr^2 + 2mr^2$$
$$= 6mr^2$$

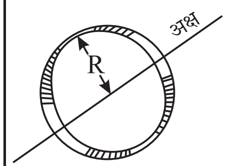
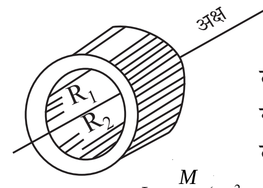
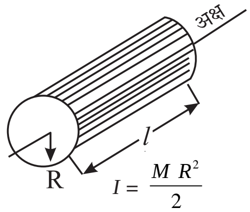
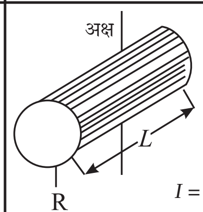
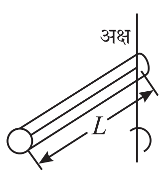
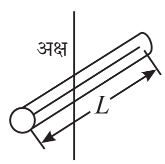
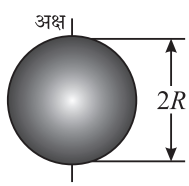
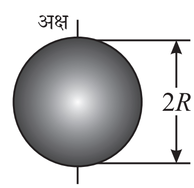
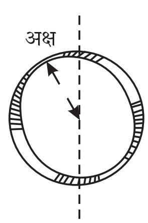
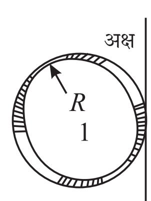
स्पष्टतया जड़त्व-आघूर्ण $6mL^2$ से 3 mL^2 में परिवर्तित हो गया है।

समीकरण 7.13 को पुनः ध्यान से देखिए तथा रेखीय गति में किसी पिण्ड की गतिज ऊर्जा के समीकरण से इसकी तुलना कीजिए। क्या आपको कोई सादृश्य दिखलाई देता है? आप देखेंगे कि

टिप्पणियाँ

रेखीय गति में जो भूमिका द्रव्यमान की है वही भूमिका घूर्णन गति में जड़त्व आघूर्ण की है और रेखीय गति में रेखीय वेग की जो भूमिका है वैसी ही भूमिका, घूर्णन गति में कोणीय वेग की है।

सारणी 7.2 कुछ नियमित और एक समान पिण्डों के जड़त्व-आघूर्ण

 $I = MR^2$	छल्ले का केन्द्रीय अक्ष के परित:	 $I = \frac{M}{2}(R_1^2 + R_2^2)$	वलयाकार बेलन या छल्ले का अपनी अक्ष के गिर्द
 $I = \frac{MR^2}{2}$	ठोस बेलन का बेलन की अक्ष के परित:	 $I = \frac{MR^2}{4} + \frac{M\ell^2}{12}$	ठोस बेलन (या डिस्क) का एक केन्द्रीय व्यास के गिर्द
 $I = \frac{ML^2}{12}$	पतली छड़ का इसके केन्द्र पर अभिलंबवत् अक्ष के गिर्द	 $I = \frac{ML^2}{3}$	एक पतली छड़ का इसके अक्ष के लंबवत एक सिरे से गुजरती रेखा के गिर्द
 $I = \frac{2MR^2}{5}$	ठोस गोले का किसी व्यास के गिर्द	 $I = \frac{2MR^2}{3}$	पतले गोलीय कोश का किसी व्यास के गिर्द
 $I = \frac{MR^2}{2}$	छल्ले का किसी व्यास के गिर्द	 $I = \frac{3MR^2}{2}$	छल्ले का एक स्पर्श रेखा के गिर्द

A. जड़त्व-आघूर्ण का भौतिक महत्व

जड़त्व-आघूर्ण का भौतिक महत्व घूर्णन गति में वैसा ही है, जैसा रेखीय गति में द्रव्यमान का होता है। जैसे रेखीय गति में द्रव्यमान वस्तु की रेखीय गति की अवस्था में परिवर्तन का विरोध करता है, वैसे ही जड़त्व-आघूर्ण घूर्णन गति में परिवर्तन का विरोध करता है। जड़त्व-आघूर्ण के इस गुण का व्यावहारिक जीवन में बहुत उपयोग किया गया है। घूर्णन गति पैदा करने वाली मशीनों में एक अवयव प्राय: एक डिस्क होती है जिसका जड़त्व-आघूर्ण बहुत अधिक होता है। रेल का वाष्प इंजन और स्वचालित वाहन इसके उदाहरण हैं। वह डिस्क जिसका जड़त्व आघूर्ण बहुत अधिक होता है, गतिपालक चक्र (Fly wheel) कहलाती है। गतिपालक चक्र की कार्यशैली को समझने के लिए कल्पना कीजिए कि रेलगाड़ी का चालक अचानक ही रेलगाड़ी की चाल बढ़ाना चाहता है, लेकिन गतिपालक चक्र इस गति का विरोध करता है। यह गति को धीरे-धीरे बढ़ने देता है। इसी प्रकार यह अचानक चाल कम करने के प्रयास का भी विरोध करता है। इसकी वजह से गाड़ी शनै:शनै रुक पाती है।

इस प्रकार से गतिपालक चक्र, अधिक जड़त्व-आघूर्ण के कारण रेलगाड़ी में लगने वाले झटकों को कम करता है और यात्री सुगमतापूर्व यात्रा कर पाते हैं।

हमने देखा कि घूर्णन गति में कोणीय वेग की सादृश्यता रेखीय गति में रेखीय वेग से है। कोणीय त्वरण (जिसे प्राय: α से दर्शाते हैं), कोणीय वेग में परिवर्तन की दर होती है, जो कि रेखीय गति में रेखीय त्वरण के सदृश्य होती है।

B. समान रुप से घूर्णन कर रहे दृढ़ पिण्ड के लिए गति के समीकरण

किसी पटल के बिंदु 0 के लम्बवत अक्ष के गिर्द घूर्णन पर विचार करें। यदि यह एकसमान कोणीय वेग ω से गति कर रहा है, जैसा कि दर्शाया गया है, तो यह t सेकन्ड में θ कोण से घूम जाएगा,

$$\theta = \omega t \qquad 7.16(a)$$

तथापि, यदि पटल पर लगातार एकसमान बल-आघूर्ण लगाया जाए (बल आघूर्ण बल का घुमाने वाला प्रभाव है।), तो इस वस्तु में एक समान कोणीय त्वरण उत्पन्न होगा। निम्नलिखित समीकरण इसकी घूर्णन गति का निरुपण करते हैं;

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t \qquad 7.16(b)$$

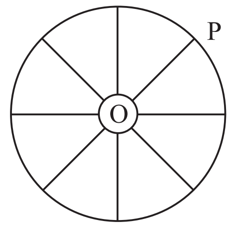
जहाँ ω_i प्रारंभिक कोणीय वेग है तथा ω_f अंतिम कोणीय वेग है।
इसी तरह हम लिख सकते हैं

$$\theta = \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad 7.16(c)$$

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha\theta \qquad 7.16(d)$$

ध्यान से देखने पर आप को इन समीकरणों की स्थानान्तरीय गति के समीकरणों से सादृश्यता स्पष्ट हो जाएगी।

उदाहरण 7.4 : एक साइकिल का पहिया एक क्षैतिज अक्ष के गिर्द चक्कर लगाने के लिए स्वतंत्र है। यह प्रारम्भ में विरामावस्था में है। इस पर खींची गई एक रेखा OP की कल्पना करें। यदि समान कोणीय त्वरण 2.5 rad s^{-2} हो, तो रेखा OP, 2 सेकन्ड में कितने कोण से घूम जाएगी?



चित्र.7.13 : एक साइकिल के पहिए का घूर्णन

हल : रेखा OP का कोणीय विस्थापन

$$\theta = \omega_0 t + (½)\, \alpha\, t^2 = 0 + (½) \times (2.5 \text{ rad s}^{-2}). \times 4 \text{ s}^2 = 5 \text{ rad}$$

हमने ऊपर सीखा है कि घूर्णन गति में पिंड का द्रव्यमान केन्द्र स्थिर रखा जाता है। ऐसा केवल सुविधा की दृष्टि से किया जाता है। लेकिन कई बार हम द्रव्यमान केन्द्र के अतिरिक्त किसी अन्य बिंदु को भी स्थिर रख सकते हैं और पिण्ड उसके गिर्द घूर्णन गति कर सकता है। तब घूर्णन अक्ष इस बिन्दु से होकर जाएगा। इस स्थिर बिन्दु से जाने वाली अक्ष के गिर्द जड़त्व आघूर्ण, दृढ़ पिण्ड के गिर्द जड़त्व आघूर्ण से भिन्न होगा। जड़त्व आघूर्ण के प्रमेयों द्वारा इन दोनों जड़त्व आघूर्णों के बीच एक संबंध प्राप्त किया जा सकता है।

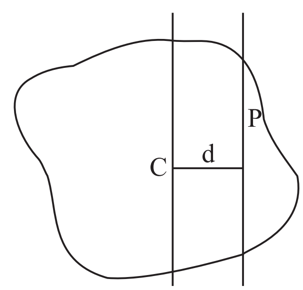
7.3.2 जड़त्व-आघूर्ण के प्रमेय

दो अक्षों के गिर्द जड़त्व-आघूर्णों के बीच परस्पर संबंध दर्शाने वाले दो प्रमेय हैं। ये है –

(i) समान्तर अक्ष प्रमेय

(ii) लम्बवत् अक्ष प्रमेय

अब हम प्रमेयों की व्याख्या करेंगे और इनके उपयोगों की चर्चा करेंगे:



चित्र.7.14 : CM से गजरने वाली अक्ष के समान्तर

(*i*) समान्तर अक्ष प्रमेय

मान लीजिए कि कोई दृढ़ पिण्ड द्रव्यमान केन्द्र के अतिरिक्त किसी अन्य बिंदु P से होकर जाने वाली अक्ष के गिर्द घूर्णनगति करता है। इस अक्ष के गिर्द जड़त्व-आघूर्ण की गणना इस अक्ष के समान्तर केन्द्र से जाने वाली अक्ष के गिर्द जड़त्व-आघूर्ण के ज्ञान से की जा सकती है। यदि p से गुजरनेवाली अक्ष के परितः जड़त्व-आघूर्ण को I से प्रदर्शित करें और द्रव्यमान केन्द्र से जाने वाली समान्तर अक्ष के गिर्द जड़त्व आघूर्ण I_C से प्रदर्शित किया जाय, तब

$$I = I_C + M d^2 \qquad (7.17)$$

जहाँ M पिण्ड का द्रव्यमान है और d दोनों अक्षों के बीच की दूरी है, इसे समान्तर अक्ष प्रमेय कहते हैं।

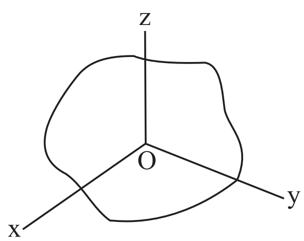
टिप्पणियाँ

(*ii*) लम्बवत् अक्ष प्रमेय

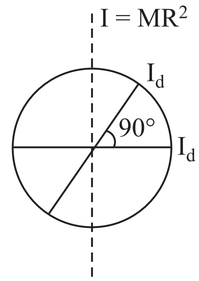
आइए अब हम परस्पर तीन लम्बवत अक्षों पर विचार करें। जिनमें से दो अक्ष- x और अक्ष-y पिण्ड के समतल में हैं और तीसरी अक्ष z पिण्ड के समतल के लम्बवत् है (चित्र 7.15)। लम्बवत अक्ष प्रमेय का कथन है कि **x–**अक्ष और **y–**अक्ष के गिर्द जड़त्व आघूर्णों का योग **z–**अक्ष के गिर्द जड़त्व आघूर्ण के बराबर होता है।

अर्थात्
$$I_z = I_x + I_y \tag{7.18}$$

अब हम एक छल्ले का उदाहरण लेते हैं, जैसा कि चित्र (7.16) में दिखाया गया है। तालिका 7.2 से आप जानते हैं कि एक छल्ले का अपनी अक्ष के गिर्द जड़त्व आघूर्ण MR^2 होता है, जिसमें M द्रव्यमान और R त्रिज्या है। लम्बवत् अक्ष के प्रमेय के अनुसार यह जड़त्व आघूर्ण दोनों व्यासों के गिर्द – जड़त्व आघूर्ण के योग के बराबर होना चाहिए क्योंकि दोनों व्यास परस्पर लम्बवत् हैं। लूप की सममिति से पता चलता है कि किसी भी व्यास के गिर्द जड़त्व आघूर्ण बराबर होता है। इसका अर्थ यह हुआ कि सभी व्यास



चित्र.7.15 : लम्बवत् अक्ष प्रमेय



चित्र.7.16 : एक छल्ले का जड़त्व आघूर्ण

तुल्य हैं। अत: कोई भी दो लम्बवत् व्यास चुने जा सकते हें। अब चूँकि प्रत्येक व्यास के गिर्द जड़त्व आघूर्ण समान हैं, माना यह I_d है। तब समीकरण 7.18 के अनुसार

$$MR^2 = 2\,I_d$$

अत:

$$I_d = (½)\,MR^2$$

अत: एक छल्ले का अपने किसी व्यास के गिर्द जड़त्व आघूर्ण $(½)\,MR^2$ होता है।

अब हम रिम पर एक बिंदु P लेते हैं। इस बिन्दु P पर लूप की स्पर्श रेखा पर विचार करते हैं। यह रेखा लूप (छल्ले) की अक्ष के समान्तर है। दोनों अक्षों के बीच की दूरी त्रिज्या R के बराबर है। स्पर्श रेखा के गिर्द जड़त्व आघूर्ण की गणना, समान्तर अक्ष प्रमेय का उपयोग करके की जा सकती है। स्पर्श रेखा के गिर्द आघूर्ण

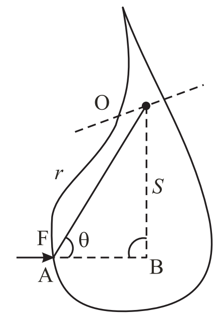
$$I_{\text{स्पर्शरेखीय}} = MR^2 + MR^2 = 2\,MR^2.$$

यहाँ यह स्पष्ट कर देना आवश्यक है कि तालिका 7.2 में बहुत:सी प्रविष्टियों में समान्तर एंव लम्बवत् अक्ष प्रमेयों का उपयोग करके गणना की गई हैं।

टिप्पणियाँ

7.3.3 बल-आघूर्ण और बल युग्म

क्रियाकलाप 7.3



चित्र.7.17 : एक वस्तु का घूर्णन

क्या आपने कभी ध्यान दिया है कि कब्जों से दूर बल लगाकर एक किवाड़ को आसानी से खोला जा सकता है? यदि आप कब्जों के पास बल लगाकर किवाड़ खोलना चाहें तो क्या होता हैं? इस क्रियाकलाप को कई बार करके देखिए। आप महसूस करेंगे कि कब्जों के नजदीक बल लगाकर किवाड़ खोलने में अधिक बल की आवश्यकता होती है। ऐसा क्यों होता है? इसी प्रकार स्पैनर द्वारा एक पेंच को घुमाने के लिए एक लम्बे हत्थे की आवश्यकता होती है। हत्था लम्बा रखने का क्या उद्देश्य है? आइये, अब हम इन प्रश्नों का उत्तर खोजते हैं।

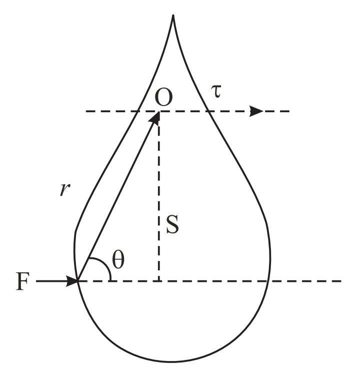
मान लें कि पिण्ड में एक स्थिर बिंदु O है और इस बिन्दु से गुजरने वाली अक्ष के गिर्द यह पिण्ड घूम सकता है (चित्र 7.17)। एक F परिमाण का बल AB रेखा की दिशा में बिंदु A पर लगाया जाता है। यदि AB रेखा बिंदु O से गुजरती है तो ऐसी स्थिति में लगाया गया बल वस्तु को घुमा नहीं पाएगा। यह AB रेखा बिंदु O से जितनी अधिक दूर होगी उतनी ही आसानी से बल प्रयोग द्वारा पिंड को O से गुजरने वाली अक्ष के गिर्द घुमाया जा सकेगा। बल के इस घूर्णन प्रभाव को बल आघूर्ण कहते हैं। इस बल-आघूर्ण का परिमाण

$$\tau = F\,s = F\,r \sin\theta \qquad (7.19)$$

जहाँ पर s घूर्णन अक्ष की उस रेखा से दूरी है जिसकी दिशा में बल लगा है। बल-आघूर्ण का मात्रक, न्यूटन मीटर (Nm) है। बल-आघूर्ण वास्तव में एक सदिश राशि है। समीकरण (7.19) को सदिश रुप में इस प्रकार भी लिखा जा सकता है:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (7.20)$$

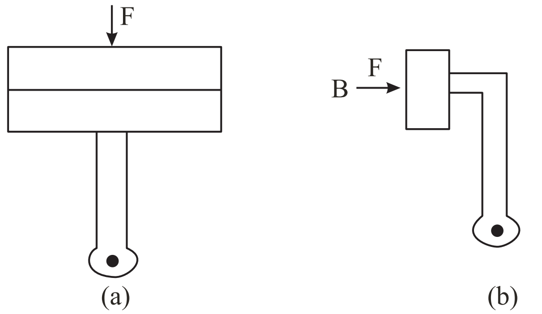
समीकरण (7.20) से बल आघूर्ण का परिमाण एवं दिशा दोनों प्रदर्शित होते हैं। पिण्ड किस दिशा में घूमेगा? इसे ज्ञात करने के लिए सदिशों के सदिश गुणनफल के नियम पर विचार कीजिए (पाठ 1 को देखिए)। $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{r}$ और $\mathbf{F}$ दोनों के लम्बवत् है; जो कि यहाँ पर काग़ज का तल है। (अर्थात् कागज के तल के लम्बवत् है) (चित्र.7.18)। यदि हम दाएं हाथ के अंगूठे को उंगलियों के लम्बवत् रखे और उंगलियों को इस प्रकार मोड़ें कि ये $\mathbf{r}$ से $\mathbf{F}$ की ओर संकेत करें, तो अंगूठे की दिशा बल आघूर्ण की दिशा को दर्शाएगी।



चित्र. 7.18 : दाहिने हाथ के अंगूठे का नियम

इस नियम का प्रयोग करके दर्शाइए कि चित्र 7.18 में बल का घूर्णन प्रभाव काग़ज की सतह के लम्बवत् नीचे की ओर लगता है। यह वस्तु के घूर्णन की दक्षिणावर्त दिशा के संगत है।

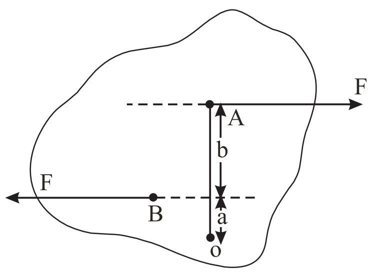
उदाहरण 7.5 : चित्र.7.19 एक साइकिल पैडल दिखाता है (*i*) मान लें जब आप पैडल को नीचे दबा रहे हैं तो आपका पैर शीर्ष पर हैं आप के द्वारा उत्पन्न बल आघूर्ण कितना है? (ii) अधिकतम बल–आघूर्ण उत्पन्न करने के लिए आपका पैर कहाँ पर होना चाहिए।



चित्र.7.19 : साइकिल पैडल **(a)** शीर्ष पर जबकि $\tau = 0$; **(b)** जबकि τ अधिकतम है

हल : (i) जब आप का पैर शीर्ष पर है तो बल की कार्य रेखा पैडल के केन्द्र से होकर गुजरती है। अत: $\theta = 0$, और $\tau = Fr \sin\theta = 0$.

(ii) अधिकतम बल आघूर्ण प्राप्त करने के लिए $\sin\theta = 1$ होना चाहिए। यह तब होता है, जबकि आपका पैर B स्थिति में हो और आप पैडल को नीचे की ओर दबा रहे हों।



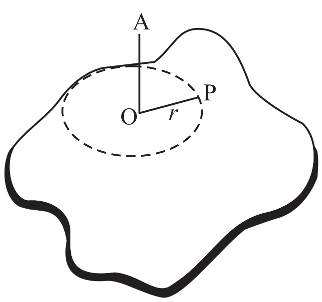
चित्र.7.20 : किसी वस्तु पर कार्य कर रहे दो विपरीत

यदि किसी पिण्ड पर बहुत-से बल आघूर्ण कार्य कर रहें हों, तो परिणमी बल आघूर्ण सभी बल–आघूर्णों का सदिश योग होता है। घूर्णनगति में बल–आघूर्ण और रेखीय गति में बल की भूमिका में क्या आप कोई सादृश्य देखते हैं?

चित्र 7.20 की भाँति वस्तु पर लगने वाले समान परिमाण एवं विपरीत दिशाओं में लगे बलों पर विचार कीजिए। मान लीजिए कि पिंड O से गुजरने वाले अक्ष के गिर्द घूमने के लिए स्वतंत्र है। पिण्ड पर लगे दोनों बल आघूर्णो का परिमाण

$$\tau_1 = (a + b) F$$

और $\tau_2 = a F$



चित्र. 7.21 : किसी अक्ष के परित: घूमती हुई एक दृढ़ वस्तु

आप सत्यापित कर सकते हैं कि इन दोनों बल आघूर्णो के घूर्णन प्रभाव विपरीत दिशा में हैं। अत: पिंड पर नेट घूर्णन प्रभाव का परिमाण बड़े बल आघूर्ण की दिशा में होगा, जो कि इस प्रकरण में τ_1 है।

$$\boldsymbol{\tau = \tau_1 - \tau_2 = bF} \qquad (7.21)$$

अतः हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि विपरीत दिशाओं में लगे दो समान बल जिनकी क्रिया रेखाएं अलग-अलग हैं ऐसा बल-युग्म बनाते हैं जिसके बल-आघूर्ण का परिमाण एक बल और बलों के बीच की लम्बवत् दूरी के गुणनफल के बराबर होता है।

बल-आघूर्ण के लिए एक और नया व्यंजक है जो कि इससे और रेखीय गति में प्रयुक्त बल में समानता प्रदर्शित करता है। बिंदु O से जानेवाली अक्ष के गिर्द घूमते हुए किसी दृढ़ पिण्ड पर विचार कीजिए (चित्र. 7.21)। स्पष्टरुप से पिण्ड का एक कण P अक्ष के गिर्द एक वृत्ताकार मार्ग में घूमता है जिसका अर्धव्यास r है। यदि वृत्तीय गति असमान हो तो कण स्पर्श रेखा एवं त्रिज्या दोनों की दिशाओं में बल का अनुभव करता है। त्रिज्या बल $m\omega^2 r$, अभिकेन्द्र बल है। यह कण को वृत्ताकार पथ में बनाए रखता है। स्पर्श रेखीय दिशा में लगने वाला बल, वेग v के परिमाण को बदलता है। याद रखें कण में वेग की दिशा सदैव वृत्ताकर पथ की स्पर्श रेखा की दिशा में होती है। इसका परिमाण ma होता है, जहाँ a स्पर्शरेखीय त्वरण है। त्रिज्य बल कोई बल-आघूर्ण उत्पन्न नहीं करता है। क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों होता है? स्पर्शरेखीय बल mar परिमाण का बल आघूर्ण निर्मित करता है। क्योंकि $a = r\,\alpha$ (α कोणीय त्वरण है) है अतः बल आघूर्ण का परिमाण $= m\,r^2\alpha$ होता है। यदि हम पिण्ड के सभी कणों पर विचार करें तो

$$\tau = \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2 \alpha = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\alpha$$

$$= I\,\alpha. \qquad (7.22)$$

$\because$ α का मान सभी कणों के लिए समान है।

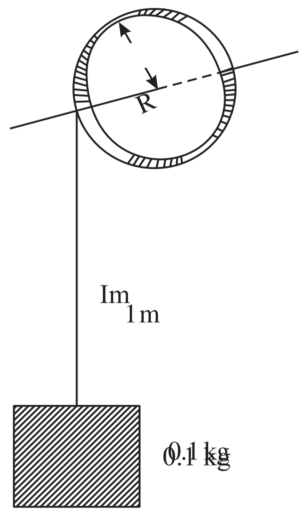
इस समीकरण और $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$ के बीच तुलना से स्पष्ट हो जाता है कि $\boldsymbol{\tau}$ की घूर्णनगति में वैसी ही भूमिका है जैसी कि $\mathbf{F}$ की रैखिक गति में होती है। सारणी 7.3 में रेखीय और घूर्णन गतियों में प्रयुक्त होने वाली राशियों के बीच समानता को दर्शाया गया है। इस सारणी की सहायता से हम घूर्णन गति में प्रयुक्त होने वाली किसी भी राशि के समीकरण को लिख सकते हैं, यदि हमें रेखीय गति में उस राशि के लिए सादृश्य ज्ञात हो।

सारणी 7.3 : रेखीय और घूर्णन गति में प्रयुक्त होने वाली राशियों में समानता

रेखीय गति		स्थिर अक्ष के परितः घूर्णन गति	
विस्थापन	x	कोणीय विस्थापन	θ
वेग	$v = \frac{dx}{dt}$	कोणीय वेग	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
त्वरण	$a = \frac{dv}{dt}$	कोणीय त्वरण	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
द्रव्यमान	M	जड़त्व आघूर्ण	I
बल	$F = m\,a$	बल आघूर्ण	$\tau = I\,\alpha$
कार्य	$W = \int F\,dx$	कार्य	$W = \int \tau\,d\theta$
गतिज ऊर्जा	$\frac{1}{2} M v^2$	गतिज ऊर्जा	$(\frac{1}{2}) I \omega^2$
शक्ति	$P = Fv$	शक्ति	$P = \tau\,\omega$
रेखीय संवेग	Mv	कोणीय संवेग	$I\omega$

समीकरण (7.22) की सहायता से हम किसी पिंड में दिए गए बल-आघूर्ण द्वारा उत्पन्न कोणीय त्वरण की गणना कर सकते हैं।

उदाहरण 7.6 : बिना घर्षण के 1.0 kg और 0.1 मीटर अर्धव्यास की एकसमान डिस्क इसके केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के गिर्द घूम सकती है। इस डिस्क की रिम में नगण्य द्रव्यमान की एक डोरी पड़ी है (चित्र 7.2)। यदि डोरी पर 0.1 kg द्रव्यमान लटका दिया जाए तो डिस्क के (i) कोणीय त्वरण (ii) एक सेकण्ड में घूमे गए कोण तथा (iii) एक सेकण्ड में जनित कोणीय वेग की गणना करें। ($g = 10$ m s^{-2})



चित्र. 7.22

हल : (i) यदि R और M डिस्क की त्रिज्या और द्रव्यमान दर्शाते हैं तो सारणी 7.2 की सहायता से हम पाते हैं कि जड़त्व आघूर्ण का समीकरण $I = (½) MR^2$ है। यदि F डोरी के सिरे से जुड़े द्रव्यमान के कारण लगे बल F $(= mg)$ को दर्शाता है, तो $\tau = FR$ तब समीकरण (7.22) देता है:

$$\alpha = \tau / I = FR/I = 2F/MR$$

$$= \frac{2\times(0.1\text{kg})\times(10\text{ms}^{-2})}{(1.0\text{kg})\times(0.1\text{ m})} = 20 \text{ rad s}^{-2}.$$

(ii) जिस कोण पर डिस्क घूमती है, उस कोण की गणना के लिए हम समीकरण (7.16) का प्रयोग करते हैं। क्योंकि प्रारंभिक वेग शून्य है। अत:

$$\theta = (½) \times 20 \times 1.0 = 10 \text{ rad (रेडियन)}$$

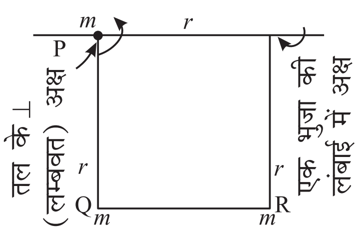
(iii) एक सेकण्ड के बाद वेग की गणना के लिए

$$\omega = \alpha\, t = 20 \times 1.0 = 20 \text{ rad s}^{-1}$$

अब, अपनी प्रगति की जाँच करने के लिए निम्न प्रश्नों के उत्तर दें।

पाठगत प्रश्न 7.3

1. r लम्बाई के एक वर्ग के कोणों पर चार कण रखे हैं जिनमें प्रत्येक का द्रव्यमान **m** है। वर्ग के तल के लम्बवत् एक कोने से होकर जाने वाली अक्ष के गिर्द जड़त्व-आघूर्ण की गणना कीजिए। वर्ग की एक भुजा से होकर जाने वाली अक्ष के गिर्द भी जड़त्व आघूर्ण की गणना कीजिए। अपने उत्तर की जाँच लम्बवत् अक्ष प्रमेय का प्रयोग करके कीजिए।



2. एक ठोस गोले की परिभ्रमण-त्रिज्या की गणना कीजिए यदि यह गोला इसके किसी बिन्दु के ऊपर खींची गई स्पर्श रेखा के परित: घूर्णन कर रहा हो। आप सारणी 7.2 का उपयोग कर सकते हें।

7.4 कोणीय संवेग

सारणी 7.3 से आप जानते हैं कि रेखीय संवेग के तुल्य घूर्णन गति में कोणीय संवेग होता है। इसके भौतिक महत्व को समझने से पूर्व हम चाहते हैं कि आप एक क्रियाकलाप करें।

क्रियाकलाप 7.4

एक ऐसा घूमने वाला स्टूल लीजिए जिसके घूमने में अधिक घर्षण न लगता हो। अपने एक साथी को उसकी बाँहे सिमटवाकर स्टूल पर बिठाइए। स्टूल को तेजी से घुमाइए और उसे घूमता छोड़ दीजिए। घूर्णन की चाल मापिए। अब अपने साथी को बाँहे फैलाने को कहिए और फिर से घूर्णन की चाल मापिए। पुन: अपने साथी को बाँहें समेटने के लिए कहें और स्टूल की चाल में परिवर्तन देखें।

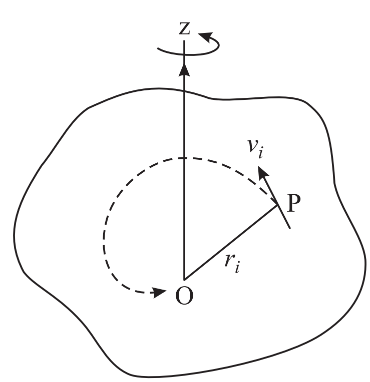
इस प्रयोग में बाँहों को फैलाने और समेटने पर स्टूल की चाल में परिवर्तन क्यों हुआ? आइए, इसे समझें।

मान लीजिए कि एक दृढ़ पिण्ड एक स्थिर बिंदु O से जाने वाले अक्ष(z –अक्ष) के गिर्द घूमता है। पिण्ड के सभी बिन्दु इस अक्ष के चतुर्दिक अपने वृत्ताकार पथों पर घूमते हैं। एक कण P पर विचार करें जो अक्ष से r दूरी पर है (चित्र 7.23)। इस कण का रेखीय वेग $r_i\omega$ ओर रेखीय संवेग $m_i r_i \omega$ है। रेखीय संवेग और अक्ष से दूरी के गुणनफल को कोणीय संवेग कहते हैं। कोणीय संवेग को L से निरुपित करते हैं। दृढ़ पिण्ड के सभी कणों के कोणीय संवेगों को जोड़ लिया जाए तो दृढ़ पिण्ड का कोणीय संवेग

$$L = \sum_i m_i \omega r_i \, r_i = \left(\sum_i m_i \, r_i^2\right)\omega$$

$$= I\omega \qquad (7.23)$$

ध्यान दीजिए कि सभी कणों का कोणीय वेग बराबर होता है। कोष्ठकों के बीच की राशि जड़त्व आघूर्ण है। रेखीय संवेग की भांति कोणीय संवेग भी सदिश राशि है। समीकरण (7.23) केवल सदिश **L** के घूर्णन–अक्ष की दिशा में घटक को दर्शाती है। यहाँ यह महत्वपूर्ण है कि I को स्थिर अक्ष के संदर्भ में प्रयोग किया जाना चाहिए। कोणीय संवेग का मात्रक kg m^2 s^{-1} है।



चित्र.7.23 : एक बिंदु 'O' के गिर्द एक अक्ष पर घूमता दृढ़ पिंड

याद कीजिए कि ω के परिवर्तन की दर α है। और $I\alpha = \tau$ अतः कोणीय संवेग की परिवर्तन दर बल-आघूर्ण के बराबर है।

सदिश राशियों के निरुपण के रुप में घूर्णन करते दृढ़ पिंड का समीकरण

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha \qquad (7.24)$$

7.4.1 कोणीय संवेग संरक्षण

समीकरण (7.24) दर्शाता है कि यदि किसी निकाय पर कोई बाह्य परिणामी बल-आघूर्ण शून्य हो, अर्थात $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$, तो निकाय का कुल कोणीय संवेग अचर रहता है। यह कोणीय संवेग संरक्षण का सिद्धान्त है। यह सिद्धांत ऊर्जा संरक्षण, रेखीय संवेग संरक्षण की तरह भौतिकी का एक बहुत महत्वपूर्ण सिद्धांत है। कोणीय संवेग संरक्षण के सिद्धांत से हमें अनेक प्रश्नों के उत्तर मिल जाते हैं। वायु में तैरती खिलौना छतरी की दिशा स्थिर क्यों रहती है? खेल छतरी (खिलौना छतरी) में उसको घुमा देना एक ट्रिक हैं। घुमाव देने से खेल छतरी में कोणीय संवेग उत्पन्न हो जाता है। वायु में छोड़ देने के पश्चात् इस पर कोई बल आघूर्ण नहीं लगता। इसका कोणीय संवेग अचर रहता है। चूँकि कोणीय संवेग एक सदिश राशि है, इसलिए, इसकी दिशा और परिमाण दोनों अचर रहते हैं। अतः खिलौना छतरी जब तक हवा में रहती है, तब तक इसकी दिशा स्थिर रहती है।

घूमने वाले स्टूल के मामले में जब स्टूल पर कोई बल आघूर्ण काम नहीं करता है तो स्टूल और उस पर बैठे व्यक्ति का संवेग संरक्षित रहना चाहिए। जब व्यक्ति अपने हाथ फैलाता है तो तंत्र का जड़त्व आघूर्ण बढ़ जाता है। तब समीकरण (7.23) के अनुसार कोणीय वेग घट जाता है। इसी प्रकार जब वह अपने हाथ सिकोड़ता है, तो निकाय का जड़त्व आघूर्ण कम होता है जिससे कोणीय वेग में वृद्धि होती है। ध्यान दीजिए कि जड़त्व आघूर्ण में अन्तर मूल रुप से घूर्णन अक्ष से कणों की दूरी में परिवर्तन के कारण होता है।

अब संवेग संरक्षण के कुछ और उदाहरणों पर विचार करें। माना हमारे पास M द्रव्यमान की एक गोलाकार गेंद है जिसकी त्रिज्या R है। एक बल आघूर्ण लगाकर इसे घुमा दिया जाता है और फिर बल आघूर्ण को हटा दिया जाता है। ऐसी स्थिति में जब गेंद पर कोई बल-आघूर्ण लग ही नहीं रहा है तो गेंद में जितना भी कोणीय संवेग उत्पन्न हो गया हो, उसे संरक्षित रहना चाहिए। गेंद का जड़त्व आघूर्ण (2/5) MR^2 है। (सारणी 7.2)। अतः इसका कोणीय संवेग है:

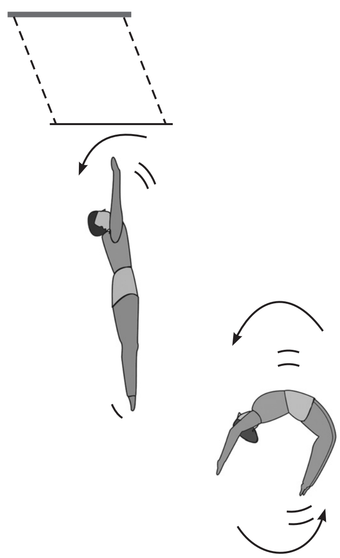
$$L = \frac{2}{5}MR^2\omega \qquad (7.25)$$

अब कल्पना कीजिए कि गेंद की त्रिज्या किसी प्रकार कम हो जाती है। तब कोणीय संवेग के संरक्षण के लिए ω का मान बढ़ जाना चाहिए और को तेजी से घूमना चाहिए। ऐसा वास्तव में कुछ तारों के साथ होता है; जो कि पल्सर बन जाते हैं (पृष्ठ 174 पर बॉक्स देखें)। यदि गेंद की त्रिज्या अचानक बढ़ जाय तो क्या होगा?

आप समीकरण (7.25) की सहायता से दर्शा सकते हैं कि यदि R बढ़ता है तो कोणीय संवेग में संरक्षण के लिए ω का मान बदलना चाहिए। इसकी त्रिज्या की बज़ाय यदि किसी प्रकार निकाय के जड़त्व आघूर्ण का मान बदल जाए तो ω का मान पुनः बदल जाएगा। इसके लिए एक रोचक प्रभाव के लिए निम्न बाक्स को देखिए।

दिन की लंबाई नियत नहीं है।

वैज्ञानिकों ने यह पाया है कि पृथ्वी के अपनी धुरी पर घूर्णन के समय इसके घूर्णन-काल अर्थात दिन की लंबाई में बहुत अल्प अंतराल के और अनियमित परिवर्तन होते हैं। इसके जिस एक कारण का पता चला है- वह है मौसम। मौसम में परिवर्तन के कारण पृथ्वी के वायुमण्डल में बड़े पैमाने की गतिविधियाँ होती हैं जिसके कारण पृथ्वी की अक्ष के चारों ओर द्रव्यमान वितरण में परिवर्तन उत्पन्न होता है और इससे पृथ्वी का जड़त्व-आघूर्ण भी बदल जाता है। चूँकि पृथ्वी का कोणीय वेग $L = I\omega$ संरक्षित रहना चाहिए। इसलिए I के मान में परिवर्तन के फलस्वरुप पृथ्वी की घूर्णन गति अथवा दिन की लंबाई बदलती है।



चित्र.7.24 : गोताखोरी के लिए बने पटल से छलांग लगाता गोताखोर

कलाबाज (Acrobats), स्केटर्स, गोता खोर तथा अन्य खिलाड़ी संवेग संरक्षण के सिद्धांत का शानदार उपयोग करके अपने करतब दिखाते हैं।

राष्टीय और अन्तर्राष्ट्रीय तैराकी प्रतियोगिताओं (जैसे ऐशियाई खेल, ओलम्पिक खेल या राष्ट्रीय खेल में आपने देखा होगा कि गोताखोर कैसे गोताखोरी के लिए बने पटलों से छलांग लगाते हैं। छलांग लगाते समय गोताखोर हवा में अपने शरीर को मोड़ लेता है मोड़ने से उसमें कुछ कोणीय संवेग उत्पन्न होता है। जब गोताखोर हवा में होता है तो उस पर कोई बल-आघूर्ण नहीं लगता है। लेकिन उसका कोणीय संवेग स्थिर रहता है। जब शरीर मोड़ने से R का मान कम हो जाता है और वह तेजी से घूमने लगता है। जब वह शरीर को फैला लेता है तो उसका जड़त्व-आघूर्ण अधिक हो जाता है (चित्र 7.24) और फलतः उसका घूमना धीमा हो जाता है। इस प्रकार शरीर की आकृति में नियंत्रण के फलस्वरुप गोताखोर हवा में अनेक करतब दिखा सकता है।

उदाहरण 7.7 : शीला घूर्णन करते हुए एक मंच के केन्द्र पर खड़ी है। इस मंच में घर्षणरहित बियरिंग लगी हैं। उसके प्रत्येक हाथ में एक 2.0 kg की वस्तु है जो कि निकाय के घूर्णन अक्ष से 1.0 m की समान्तर दूरी पर है। निकाय प्रारंभ में 10 चक्कर/मिनट की चाल से गतिशील है। गणना करें (a) प्रारंभिक कोणीय वेग रेडियन प्रति सेकंड में (b) कोणीय वेग जब वस्तुएँ घूर्णन अक्ष से 0.2 मीटर की दूरी पर लाई जाती हैं (c) निकाय की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन (d) यदि गतिज ऊर्जा में वृद्धि होती है, तो इसका क्या कारण है? (यह मान लें कि शीला और प्लेटफार्म का जड़त्व-आघूर्ण I_{SP} 1.0 kg m^2 है।

हल : (a) 1 चक्कर = 2π radian

$\therefore$ प्रारंभिक कोणीय वेग $\omega = \dfrac{10 \times 2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 1.05 \text{ rad s}^{-1}$

(b) यहाँ पर कोणीय संवेग के सिद्धांत का प्रयोग करना आवश्यक है।

प्रारंभिक जड़त्व आघूर्ण $\quad I_i = I_{SP} + m\,r_i^2 + m\,r_i^2$

$$= 1.0 \text{ kg } m^2 + (2.0 \text{ kg}) \times (1m)^2 + (2.0 \text{ kg}) \times (1m)^2$$
$$= 5.0 \text{ kg } m^2.$$

जब वस्तुएं 0.2 m की दूरी पर लाई जाती हैं, तो अंतिम जड़त्व आघूर्ण

$$I_t = I_{SP} + mr_f^2 + mr_f^2$$
$$= 1.0 \text{ kg } m^2 + 2.0 \text{ kg} \times (0.2)^2 m^2 + 2.0 \text{ kg} \times (0.2)^2 m^2$$
$$= 1.16 \text{ kg } m^2.$$

कोणीय संवेग संरक्षण के सिद्धांत के अनुसार,

$$I_i\omega_i = I_f\,\omega_f$$

या

$$\omega_f = \frac{I_i\omega_i}{I_f} = \frac{(5.0 \text{ kg } m^2) \times 1.05 \text{ rad s}^{-1}}{1.16 \text{ kg } m^2}$$
$$= 4.5 \text{ rad s}^{-1}$$

(c) माना कि गतिज ऊर्जा में परिवर्तन ΔE है। तब

$$\Delta E = \frac{1}{2}\mathrm{I}_f\,\omega_f^2 - \frac{1}{2}\mathrm{I}_i\,\omega_i^2$$
$$= \frac{1}{2} \times 1.16 \text{ kg } m^2 \times (4.5 \text{ rad s}^{-1})^2 - \frac{1}{2} \times 5.0 \text{ kg } m^2 \times (1.05 \text{ rad s}^{-1})^2$$
$$= 9.05\text{J}$$

चूँकि अंतिम गतिज ऊर्जा प्रारंभिक गतिज ऊर्जा से अधिक है, इसलिए निकाय की गतिज ऊर्जा बढ़ती है।

(d) जब शीला वस्तुओं को अक्ष की ओर खींचती है, तो निकाय पर कार्य करती है। यह किया गया कार्य निकाय की गतिज ऊर्जा को बढ़ा देता है।

पाठगत प्रश्न 7.4

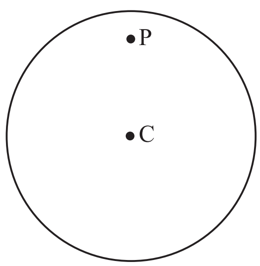
1. एक हाइड्रोजन अणु दो एकसमान परमाणुओं से बना है। प्रत्येक परमाणु का द्रव्यमान m है और उनके बीच की दूरी d है। यह दूरी स्थिर रहती है। यह अणु दोनों परमाणुओं के बीच के बिन्दु से जाने वाली अक्ष के गिर्द ω कोणीय वेग से घूमता है। अणु के कोणीय संवेग की गणना कीजिए।

2. एक वृताकार डिस्क का द्रव्यमान 2.0 kg और त्रिज्या 20 cm है। यह अपने समतल के लम्बवत व्यास के एक कोने से जाने वाली अक्ष के गिर्द 10 rad s^{-1} के कोणीय वेग से घूमती है। घूर्णन अक्ष के गिर्द इसका कोणीय संवेग निकालिए।

3. अपने ऊर्ध्वाधर अक्ष के गिर्द एक पहिया ω कोणीय चाल से घूम रहा है। एक दूसरा पहिया जिसका द्रव्यमान इसका आधा है लेकिन उतने ही अर्धव्यास का है, वह विराम की अवस्था में है। उसे उसी अक्ष पर लगा दिया जाता है। दोनों पहिए एक ही अक्ष के गिर्द समान चाल से घूमने लगते हैं। पहियों के घूमने की इस समान कोणीय चाल की गणना करें।

4. ऐसा कहा जाता है कि गैस के बादलों के सिमटने से पृथ्वी का निर्माण हुआ है। कल्पना कीजिए भूतकाल में इसकी त्रिज्या वर्तमान त्रिज्या की 25 गुनी थी। तब इसका अपनी अक्ष के गिर्द घूर्णन काल कितना था? गणना करें।

7.5 युगपत् कोणीय और स्थानान्तरीय गतियाँ



चित्र.7.25

हम देख चुके हैं कि यदि एक बिंदु किसी दृढ़ वस्तु पर स्थिर न हो, तो इसकी कोणीय और स्थानान्तरीय दोनों गतियाँ संभव हैं। एक दृढ़ वस्तु में सामान्यतया ये दोनों गतियाँ होती हैं। एक गाड़ी के पहिए की एक क्षैतिज समतल पर गति के बारे में विचार करें। मान लें कि आप एक वृत्तीय पृष्ठ का अवलोकन कर रहे हैं (चित्र 7.25) आप अपना ध्यान एक बिंदु P तथा वृत्तीय पृष्ठ के केन्द्र C पर केन्द्रित करें। इस पहिये का द्रव्यमान केन्द्र भी C पर है। जब यह लुढ़कता है तो आप देखते हैं कि बिंदु P बिंदु C के गिर्द घूर्णन करता है और बिंदु C भी गति की दिशा में गतिशील रहता है। अत: पहिए की स्थानान्तरीय एवं घूर्णन दोनों प्रकार की गतियाँ होती हैं। यदि द्रव्यमान केन्द्र C का रेखीय वेग υ_{cm} हो तो स्थानान्तरीय गतिज ऊर्जा

$$(\text{KE})_{tr} = \frac{1}{2} M \upsilon_{cm}^2 \qquad (7.26)$$

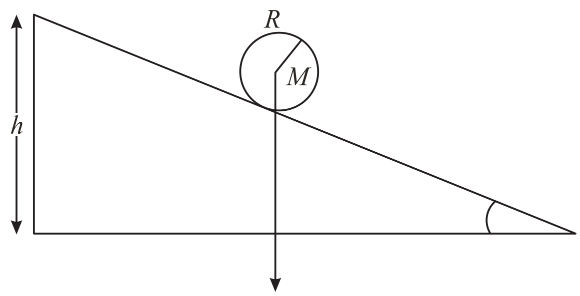
जहाँ पर M वस्तु का द्रव्यमान है। यदि ω घूर्णन की कोणीय चाल हो तो, घूर्णन गतिज ऊर्जा

$$(\text{KE})_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (7.27)$$

जहाँ पर I जड़त्व आघूर्ण है। स्थानान्तरीय एवं घूर्णन गति के फलस्वरुप कुल गतिज ऊर्जा इन दोनों के योग के बराबर होगी। आनत तल पर लुढ़की वस्तु संयुक्त स्थानान्तरीय एवं घूर्णन गति का एक मनोरंजक उदाहरण है।

उदाहरण 7.8 : मान लीजिए एक दृढ़ पिंड जिसका द्रव्यमान M, त्रिज्या R और जड़त्व आघूर्ण I है। यह h ऊँचाई के आनत समतल पर लुढ़कता है (चित्र 7.25)। पिंड अपनी यात्रा के अंत

में रेखीय वेग υ और कोणीय वेग ω प्राप्त कर लेता है। घर्षण के ऊर्जा ह्रास को नगण्य मान लें। υ का मान h के पदों में प्राप्त करें।



चित्र.7.26 : एक आनत तल पर दृढ़ निकाय की गति

हल : ऊर्जा संरक्षण के नियम के अनुसार स्थानांतरीय व घूर्णन गतियों के कारण गतिज ऊर्जा, पिण्ड के आनत समतल के ऊपरी सिरे पर स्थितिज ऊर्जा के बराबर होनी चाहिए। अतः

$$(½)\, M\upsilon^2 + ½\, \mathrm{I}\, \omega^2 = M\,g\,h \qquad (7.28)$$

यदि गति पूर्णतः लोटनिक हो और फिसलन न हो तो $\qquad \upsilon = R\,\omega$

इस व्यंजक को समीकरण (7.28) में रखने पर, हमें प्राप्त होगा:

$$\frac{1}{2} M\,\upsilon^2 + \frac{1}{2}\, I\, \frac{\upsilon^2}{R^2} = M\,g\,h \qquad (7.29)$$

यदि दृढ़ पिण्ड एक छल्ला हो तो इसका जड़त्व आघूर्ण अपने अक्ष के गिर्द MR^2 होता है। देखिए (सारणी 7.2)

तब समीकरण (7.29) से $\frac{1}{2} M\,\upsilon^2 + \frac{1}{2}\frac{M\,R^2\,\upsilon^2}{R^2} = M\,g\,h$

अथवा $\qquad \upsilon = \sqrt{g\,h} \qquad (7.30)$

क्या इस समीकरण में आप कोई मनोरंजक बात पाते हैं? छल्ले का रेखीय वेग, उसके द्रव्यमान एवं त्रिज्या से स्वतंत्र है अर्थात् छल्ला किसी भी पदार्थ का हो और उसकी त्रिज्या कितनी भी हो, वह नत समतल पर समान चाल से लुढ़कता है।

पाठगत प्रश्न 7.5

1. एक ठोस गोला किसी नत समतल पर बिना फिसलते हुए लुढ़कता है। नत समतल की ऊँचाई के पदों में इसके वेग की गणना कीजिए।

2. एक ठोस बेलन आनत समतल पर बिना फिसलते हुए लुढ़कता है। इसकी गतिज ऊर्जा का कौन सा भाग स्थानान्तरीय गतिज ऊर्जा है? h ऊँचाई के नत समतल से लुढ़कने के बाद इसके वेग के परिमाण की गणना करें।

टिप्पणियाँ

3. एक 10 cm त्रिज्या और 2 kg द्रव्यमान का गोला, एक आनत तल पर जो क्षैतिज से 30^0 का कोण बनाता है, छोड़ा जाता है। इसका (a) कोणीय त्वरण, (b) नत समतल पर रेखीय त्वरण और (c) नत समतल पर 2 मीटर चलने पर इसकी गतिज ऊर्जा की गणना कीजिए।

पल्सर्स (Pulsars) का रहस्य

पल्सर्स कोणीय संवेग संरक्षण का एक मनोरंजक उदाहरण प्रस्तुत करते हैं। ये वह तारे होते हैं, जो हमारी ओर अत्यधिक तीव्रता के विकिरण स्पंद भेजते हैं। स्पंद आवर्ती होते हैं और इनकी आवर्तता अत्यंत परिमार्जित (परिशुद्ध) होती है।

आवर्तकाल की परिसीमा एक सेकण्ड के लाखवें भाग से लेकर कई सेकण्ड तक होती हैं। इतने कम आवर्तकाल यह प्रदर्शित करते हैं कि ये तारे बहुत तेजी से घूम रहे हैं। इन तारों का अधिकतम भाग न्यूट्रॉनों से बना होता है न्यूट्रॉन तथा प्रोट्रॉन परमाणु नाभिक की निर्माण इकाइयाँ हैं)। इन तारों को न्यूट्रॉन तारा कहा जाता है। ये तारे अपने जीवन के अंतिम पड़ाव में होते हैं। तेजी से घूमने का रहस्य उनके छोटे साइज़ का होना है। एक विशेष न्यूट्रॉन तारे की त्रिज्या केवल 10 km होती है। इसकी सूर्य की त्रिज्या (7×10^5 km) से तुलना कीजिए। सूर्य अपनी अक्ष पर 25 दिन में घूमता है (घूर्णन आवर्तकाल 25 दिन है)। कल्पना कीजिए कि बिना द्रव्यमान में परिवर्तन किए सूर्य अचानक सिकुड़कर न्यूट्रॉन तारे के आकार का हो जाए तो अपने कोणीय संवेग को संरक्षित रखने के लिए सूर्य के घूर्णन का आवर्तकाल एक मिलीसेकंड से भी कम हो जाएगा।

आपने क्या सीखा

- एक दृढ़ पिण्ड की घूर्णन एवं स्थानांतरीय गतियाँ होती हैं।
- एक दृढ़ पिण्ड के स्थानान्तरीय गति के लिए समीकरण – एकल कण की गति के समीकरणों की भाँति होता है, जिसकी गति द्रव्यमान केन्द्र की गति को दर्शाती है।
- यदि किसी दृढ़ पिण्ड का एक बिंदु स्थिर हो तो यह केवल घूर्णन गति कर सकता है।
- घूर्णन अक्ष के गिर्द जड़त्व आघूर्ण $\sum_i m_i r_i^2$ द्वारा परिभाषित किया जाता है।
- घूर्णन गति में जड़त्व आघूर्ण की वैसी ही भूमिका है, जैसी रेखीय गति में द्रव्यमान की होती है।
- एक दृढ़ पिण्ड पर लगे बल F का घुमाव प्रभाव बल आघूर्ण $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ होता है।
- समान किन्तु विपरीत दिशाओं में लगे दो बल बल-युग्म बनाते हैं। बल युग्म का परिमाण एक बल और बलों की क्रिया रेखा के बीच की लम्बवत् दूरी का गुणनफल होता है।
- बाह्य बल आघूर्ण लगने से पिण्ड का कोणीय संवेग बदल जाता है।

- यदि सभी बाह्य बल आघूर्णों का योग शून्य हो तो पिण्ड का कोणीय संवेग अचर रहता है।
- जब एक बेलनाकार या एक गोलाकार (पिंड) एक आनत समतल पर बिना फिसले हुए लुढ़कता है, तब उसकी चाल उसके द्रव्यमान और त्रिज्या पर निर्भर नहीं करती है।

पाठान्त प्रश्न

1. पिण्ड के भार Mg को सामान्यतया इस प्रकार लिया जाता है कि वह पिण्ड के द्रव्यमान केन्द्र पर लगता है। क्या इसका यह अर्थ है कि पृथ्वी पिण्ड के अन्य कणों को आकर्षित नहीं करती है?

2. क्या यह संभव है कि पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र पिंड के बाहर स्थित हो? अपने उत्तर की पुष्टि में कोई दो उदाहरण दीजिए।

3. कार्बन मोनोक्साइड (CO) के अणु में दोनों परमाणुओं के नाभिकों के बीच की दूरी 1.13×10^{-10} मीटर है। अणु के द्रव्यमान केन्द्र का स्थान निर्धारित करें।

4. 100 rad s^{-1} के कोणीय वेग से 5.0 kg द्रव्यमान और 0.20 m व्यास का चक्की का पहिया घूम रहा है। इसकी गतिज ऊर्जा की गणना कीजिए। स्वतंत्रतापूर्वक गिरने की स्थिति में इसे कितनी ऊँचाई से इतनी गतिज ऊर्जा की प्राप्ति के लिये गिरना चाहिए। ($g = 10.0$ m s^{-2} लें)

5. 2 चक्कर प्रति सेकंड चक्कर प्रति सेकंड^2 प्रारंभिक कोणीय वेग से एक स्थिर अक्ष के गिर्द 1.0 m व्यास का पहिया घूम रहा है। इसका कोणीय त्वरण 3 चक्कर प्रति सेकंड^2

   (a) 2 सेकण्ड बाद कोणीय वेग की गणना कीजिए।

   (b) इतने समय में पहिया कितने कोण से घूम गया?

   (c) समय $t = 2$ सेकण्ड पर पहिये के रिम पर किसी बिन्दु पर स्पर्शीय वेग की गणना कीजिए।

   (d) समय $t = 2$ सेकण्ड पर पहिये के रिम पर एक बिन्दु का परिणामी त्वरण निकालिए।

6. 20 रेडियन/सेकंड के कोणीय वेग से घूम रहे एक पहिए को 4.0 सेकण्ड में एक अचर बल आघूर्ण के लगाने से विराम अवस्था में कर दिया जाता है। यदि घूर्णन अक्ष के गिर्द जड़त्व आघूर्ण 0.20 kg m^2 हो तो प्रथम दो सेकण्ड में बल आघूर्ण द्वारा किया जाने वाला कार्य निकालिए।

7. एक एक्सल में दो पहिए A एवं B लगे हैं। पहिये A का जड़त्व आघूर्ण 5×10^{-2} kg m^2 है तथा पहिये B का जड़त्व आघूर्ण 0.2 kg m^2 है। पहिया A 600 चक्कर प्रति सेकंड के हिसाब से घूमता है जबकि पहिया B स्थिर रखा जाता है। दोनों पहियों को एक क्लच से जोड़ दिया जाता है, ताकि वे साथ-साथ घूम सकें।

(a) वे किस चाल से घूमेंगे?

(b) क्लच के जोड़े जाने के बाद और क्लच को जोड़ने से पहले घूर्णन गतिज ऊर्जाओं की तुलना कीजिए।

(c) क्लच के कार्य करने की अवधि में यदि A, 10 चक्कर लगाता हो तो क्लच कितना बल-आघूर्ण लगाता है।

8. आपको देखने में एक जैसे दो गोल पिण्ड दिए गए हैं और यह कहा गया है कि उनमें से एक खोखला है। कौन-सा गोला खोखला है, इसका पता लगाने का कोई तरीका बताएं?

9. एक पहिए का जड़त्व आघूर्ण 1000 kg m^2 इसके घूर्णनों को एक समान त्वरित किया जाता है। किसी समय में इसका कोणीय वेग 10 रेडियन/सेकंड है। 100 रेडियन के कोण से जब पहिया घूम जाता है, तब पहिए का कोणीय वेग 100 रेडियन/सेकण्ड हो जाता है। पहिए पर लगने वाले बल-आघूर्ण की गणना कीजिए तथा गतिज ऊर्जा में परिवर्तन की भी गणना कीजिए।

10. 1.0 kg द्रव्यमान और 10 cm अर्धव्यास की एक डिस्क अपनी अक्ष के गिर्द घूम रही है। विराम अवस्था से इसे एकसमान रुप से त्वरित किया जाता है। प्रथम सेकण्ड की अवधि में यह 2.5 रेडियन घूमती है। दूसरे सेकण्ड में यह कितने कोण से घूम जाएगी? डिस्क पर लगने वाले बल आघूर्ण का परिमाण निकालिए।

पाठगत प्रश्नों के उत्तर

7.1

1. हाँ, क्योंकि फ्रेम के बिंदुओं के बीच की दूरियाँ नहीं बदल सकती।

2. नहीं, क्योंकि कोई हलचल रेत के कणों के बीच की दूरी को बदल सकती है। अतः रेत के ढेर को एक दृढ़ वस्तु नहीं समझा जा सकता है।

7.2

1. पाँच द्रव्यमानों के निर्देशांक A (–1, –1), B (–5, –1), C (6, 3), D (2, 6) तथा E (–3, 0) हैं और उनके द्रव्यमान क्रमशः 1 kg , 2 kg , 3 kg, 4 kg और 5 kg हैं।

अतः द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांक

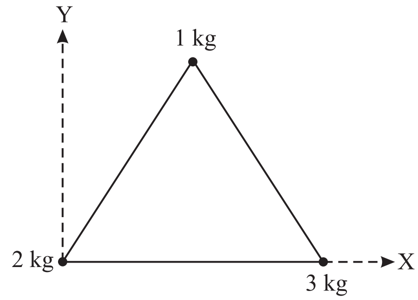
$$x = \frac{-1\times 1 - 5\times 2 + 6\times 3 + 2\times 4 - 3\times 5}{1+2+3+4+5} = 0$$

$$y = \frac{-1\times 1 - 1\times 2 + 3\times 3 + 4\times 6 + 0\times 5}{1+2+3+4+5} = \frac{30}{15} = 2.0$$

2. माना कि तीनों कणों वाले निकाय को निम्न चित्र की भाँति दर्शाया गया है जहाँ पर बिन्दु A (मूल बिंदु पर) 2 kg की द्रव्यमान स्थिति है।

$$x = \frac{2\times0+1\times0.5+3\times1}{1+2+3} = \frac{3.5}{6}\text{ m} = 0.5\text{ m}$$

$$y = \frac{2\times0+1\times\frac{\sqrt{3}}{2}+3\times0}{1+2+3} = \frac{\sqrt{3}}{12}\text{ m}$$



अत: द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांक $\frac{3.5}{6}, \frac{\sqrt{3}}{12}$ हैं।

3. माना दोनों कण x-अक्ष में स्थित हैं और उनके x– निर्देशांक 0 और x है। द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांक

$$X = \frac{m_1\times0+m_2\times x}{m_1+m_2} = \frac{m_2 x}{m_1+m_2},\ Y = 0$$

X m_1 की द्रव्यमान केन्द्र से दूरी है। m_2 की द्रव्यमान केन्द्र से दूरी

$$x - X = x - \frac{m_2 x}{m_1+m_2} = \frac{m_1 x}{m_1+m_2}$$

$$\therefore \frac{X}{x+X} = \frac{m_2}{m_1}$$

अत: कणों की द्रव्यमान केन्द्र से दूरियाँ द्रव्यमानों के व्युत्क्रम अनुपात में हैं।

7.3

1. वर्ग के तल के लंबवत् एक कोने से होकर जाने वाली अक्ष के गिर्द

   निकाय का जड़त्व आघूर्ण

   $= m\,r^2 + m\,(2\,r^2) + m\,r^2 = 4\,m\,r^2$

   एक भुजा के गिर्द जड़त्व आघूर्ण $= m\,r^2 + m\,r^2 = 2\,m\,r^2$

   सत्यापन : QP के गिर्द जड़त्व आघूर्ण $= m\,r^2 + m\,r^2 + 2\,m\,r^2$. अब लम्बवत् अक्ष प्रमेय के समीकरण के अनुसार - अक्ष SP के गिर्द जड़त्व आघूर्ण $= (2mr^2)$ + अक्ष QP 2 $m\,r^2$ से गुजरने वाली और तल के लम्बवत् अक्ष के गिर्द जड़त्व आघूर्ण। क्योंकि यह सत्य है इसलिए परिणाम सत्यापित हुए।

2. ठोस गोले की स्पर्शरेखा के गिर्द ठोस गोले का जड़त्व आघूर्ण

   $= \frac{2}{5}\,M\,R^2 + M\,R^2 = \frac{7}{5}\,M\,R^2$ है। (समान्तर अक्ष के प्रमेय द्वारा)

टिप्पणियाँ

$M K^2 = \frac{7}{5} M R^2$ यदि परिभ्रमण त्रिज्या K हो तो

$$K = R\sqrt{\frac{7}{5}}$$

7.4

1. कोणीय संवेग

$$L = m\frac{d^2}{4} + m\frac{d^2}{4} \quad \omega$$

$$L = \frac{m d^2 \omega}{2}$$

2. कोणीय संवेग एक घूर्णन अक्ष (व्यास) के गिर्द

$$L = I\,\omega = m\,\frac{r^2}{4} \times \omega$$

चूँकि छल्ले के इसके व्यास के गिर्द जड़त्व आघूर्ण $= \frac{m r^2}{4}$

$$\therefore L = 20 \text{ kg} \times \frac{(0.2)^2 m^2}{4} \times 10 \text{ rad s}^{-1} = 0.2 \text{ kg m}^2 \text{s}^{-1}.$$

3. कोणीय संवेग संरक्षण के अनुसार

$$I_1\omega = (I_1 + I_2)\,\omega_1$$

जहाँ I_1 मूल पहिये का जड़त्व आघूर्ण और I_2 दूसरे पहिये का जड़त्व आघूर्ण है। ω प्रारंभिक कोणीय चाल और ω_1 उभयनिष्ठ अंतिम कोणीय चाल

$$m r^2\,\omega = \quad m r^2 + \frac{m}{2} r^2 \quad \omega_1$$

$$\omega = \frac{3}{2}\,\omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{2}{3}\,\omega$$

4. माना कि पृथ्वी का वर्तमान परिक्रमण समय T तथा प्रारंभिक परिक्रमण समय T_0 है। कोणीय संवेग संरक्षण के अनुसार

$$\frac{2}{5} M\,(25\,R)^2 \times \left(\frac{2\pi}{T_0}\right) = \frac{2}{5}\,M R^2 \times \frac{2\pi}{T}$$

$$= \frac{2}{5} M R^2 \times \frac{2\pi}{T}$$

$$T_0 = 6.25\ T$$

अतः भूतकाल में पृथ्वी के परिक्रमण का समय $T_0 = 6.25 \times$ वर्तमान परिक्रमण समय।

7.5

1. समीकरण ($I = \frac{2}{5} M R^2$) का प्रयोग करने पर एक ठोस गोले के लिए

$$\frac{1}{2} m\upsilon^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = m g h$$

या, $$\frac{1}{2} m\upsilon^2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} m r^2 . \frac{\upsilon^2}{r^2} = m g h$$

$\because \omega = \upsilon/r.$

इससे $\upsilon = \sqrt{\frac{10}{7} . g h}$

2. एक ठोस बेलन के लिए $I = \frac{m R^2}{2}$

$\therefore$ कुल गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2} m \upsilon^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m \upsilon^2 + \frac{1}{2} \frac{m R^2}{2} . \frac{\upsilon^2}{R^2} = \frac{3}{4} m \upsilon^2$

$\because \omega = \upsilon/r$

अतः स्थानान्तरीय गतिज ऊर्जा का भाग $= \dfrac{\frac{1}{2} m \upsilon^2}{\frac{3}{4} m \upsilon^2} = \frac{2}{3}$

ऊपरी प्रश्न 1 के उत्तर की भाँति $\upsilon = \sqrt{\frac{4}{3} g h}$

पाठान्त प्रश्नों के उत्तर

3. कार्बन परमाणु से 0.64 Å की दूरी पर
4. 125 J, 2.5 m
5. (a) 16π rad s^{-1} (b) 20π rad (c) 25 m s^{-1} (d) 1280 m s^{-2}
6. 30 J
7. (a) 4π rad s^{-1} (b) $E_i = 5 E_f$ (c) 49π N m
9. $T = 5 \times 10^4$ N m, KE $= 5 \times 10^6$ J
10. 7.5 rad, $\tau = 5 \times 10^{-2}$ J